MÉTRIQUE SUR LE FIBRÉ UNITAIRE TANGENT AU PLAN HYPERBOLIQUE

par

Pierre Claver NSANZAMAHORO

mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 2016

Le 05 Août 2016

le jury a accepté le mémoire de Monsieur Pierre Claver NSANZAMAHORO dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur Virginie Charette
Directrice de recherche
Département de mathématiques

Professeur Jean-Marc Belley
Membre interne
Département de Mathématiques

Professeur Vasilisa Chramchenko
Présidente-rapporteuse
Département de mathématiques

DÉDICACES

À mon épouse KAMARIZA Gloriose

À mes fils
NSANZAMAHORO Alain Christian
et
NSANZAMAHORO Elysé Joël

À mes parents

À mes soeurs et frères

À tous ceux qui me sont chers

Je dédie ce mémoire.

SOMMAIRE

Nous nous proposons dans ce mémoire une étude de la métrique sur le fibré unitaire tangent au plan hyperbolique.

Dans un premier temps, quelques définitions et théorèmes rencontrés dans la géométrie riemannienne et dans la géométrie différentielle, dont certains sont démontrés, ont été dégagés pour faciliter l'élaboration de ce mémoire dans un langage compréhensif.

Pour mieux aborder le sujet on a abordé dans ce travail, de façon détaillée, les notions de la géométrie hyperbolique en utilisant le modèle du demi-plan de Poincaré.

Après avoir étudié l'action de groupe projectif spécial linéaire à entrées réelles, PSL(2,$\mathbb{R}$)=SL(2,$\mathbb{R}$)$/\{-I, I\}$ et celle du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent, $T^1\mathbb{H}$; nous avons aussi, en utilisant la décomposition de Iwasawa, mathématicien japonais (11 Septembre 1917 - 26 Octobre 1998), présenté en détail les relations qui permettent d'exprimer, de façon unique, les éléments du fibré unitaire tangent au plan hyperbolique en termes d'éléments de PSL(2,$\mathbb{R}$).

Enfin, les symboles de Christoffel sont exprimés en fonctions des coefficients de la première forme fondamentale afin de les utiliser pour étudier la métrique connue sous le nom de métrique de Sasaki, mathématicien japonais (18 Novembre 1912 - 14 Aout 1987).

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes physiques et morale auxquelles je voudrais adresser mes remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier, très vivement, ma directrice de recherche, Madame Virginie Charette qui, malgré ses multiples responsabilités, a accepté d'assurer la direction de ce mémoire. Sa rigueur scientifique, sa disponibilité et ses qualités humaines m'ont profondément touché.

Je remercie tous les professeurs qui m'ont enseigné durant toute ma formation à l'Université de Sherbrooke, plus particulièrement Jean-Marc Belley et Vasilisa Shramchenko d'avoir accepté de faire parti de mon jury . J'ai apprécié leur sympathie, leur disponibilité et surtout leur enthousiasme à partager leurs connaissances.

Je voulais souligner également le soutien moral que j'ai reçu de mes camarades du département de mathématiques. Ils m'ont généreusement offert des conseils et des orientations qui ont facilité mon intégration dans la communauté de l'Université de Sherbrooke.

Mes remerciements vont également au Gouvernement Canadien qui, via son Programme de Bourses de la Francophonie, m'a soutenu financièrement.

De plus, mes remerciements seraient incomplets, si je ne fais pas mention de mon épouse KAMARIZA Gloriose et de mes deux enfants NSANZAMAHORO Alain Christian et NSANZAMAHORO Elysé Joël, sans oublier mes parents et mes frères et Soeurs qui ont pu supporter mon absence.

NSANZAMAHORO Pierre Claver

Sherbrooke, 2016

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le monde qui nous entoure est fait de beaucoup de formes variées dont certaines ne peuvent pas être étudiées et comprises sur base de la géométrie usuelle construite sur toute une liste de postulats présentés dans "*Éléments d'Euclide, vol.13*". Le postulat le plus célèbre qui a bouleversé plusieurs mathématiciens est le cinquième : le postulat des parallèles qui dit que

Étant donné une droite D et un point $p \notin D$, il existe une unique droite D' passant par p et ne coupant jamais D.

Au XVII ème siècle, Girolamo Saccheri, mathématicien italien (1667-1733) a tenté de démontrer ce postulat mais sans succès. Au XIX ème siècle, Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski, mathématicien russe (1er décembre 1792 - 24 février 1856) a publié l'article intitulé "*Géométrie Imaginaire*", initialement en russe 1829 puis en français en 1840 [15]. En fait, il a démontré qu'il était possible de construire une géométrie, malgré la négation de ce postulat.

Ce travail de Lobatchevski va alors entrainer l'apparition de la nouvelle géométrie dite "*Géométrie non euclidienne*". Différents modèles dont le modèle du demi-plan de Poincaré, utilisé dans ce mémoire, sont utilisés pour étudier cette géométrie.

La généralisation de la géométrie usuelle s'accompagne de la généralisation de certaines formules. Par exemple, René Descartes, mathématicien, physicien et philosophe français (31 Mars 1596 - 11 Février 1650) avait défini la distance entre deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ par la formule $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$. Georg Friedrich Bernhard Riemann, mathématicien allemand (17 Septembre 1826 - 20 Juillet 1866) a généralisé cette notion de distance en s'appuyant sur les formes quadratiques. Il a proposé la formule $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$, pour déterminer la distance où g_{ij} porte le nom de tenseurs. On considère aussi que la notion variété différentiable [9] [11] [12] est due à Riemann. Il a aussi proposé des méthodes, qui avaient été inventées pour les courbes et surfaces, pour étudier des ensembles d'objets non-géométriques. Cette idée fut longtemps développée par les géomètres du XIX ème siècle et du début du XX ème sciècle.

Dans ce mémoire on s'intéresse à la métrique définie sur le fibré unitaire tangent au plan hyperbolique. Dans le premier chapitre, on fait une présentation de quelques concepts et résultats utiles pour étudier la géométrie du plan hyperbolique. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des isométries du plan hyperbolique ainsi que qu'à la détermination de la distance entre deux points quelconques de ce plan. Dans le troisième et dernier chapitre le but est d'étudier l'action de PSL(2,$\mathbb{R}$) sur le plan unitaire tangent, $T^1\mathbb{H}$, d'établir la relation entre PSL(2,$\mathbb{R}$)et $T^1\mathbb{H}$ ainsi que la détermination de la métrique de Sasaki.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES ET PLAN HYPERBOLIQUE

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier la métrique sur le fibré unitaire tangent au plan hyperbolique. Pour atteindre cet objectif, beaucoup de concepts et exemples sont indispensables mais d'autres définitions de base, comme l'espace topologique et les outils utiles pour le définir vont être supposées connues et familières. Dans les premiers temps, on va présenter les notions de variétés différentiables qui vont nous conduire à la définition de la variété hyperbolique sans oublier bien sûr la présentation du plan hyperbolique.

1.1 VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Dans l'étude du calcul différentiel et de la physique classique, la structure de variété topologique n'est pas suffisante du fait qu'il nous faudra pouvoir différencier les fonctions un nombre de fois suffisant. Pour faire face à cette insuffisance, il nous faut une structure adaptée c'est-à-dire qu'il nous faut supposer que les variétés considérées doivent être lisses. De telles variétés sont dites différentiables [12].

Définition 1.1 *Soit M un espace paracompact de Hausdorff. On dit que M est une* variété topologique *de dimension n si pour tout point $p \in M$ il existe un ouvert U dans M contenant p tel que U soit homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ par un homéomorphisme φ.*

Définition 1.2 *On appelle* cartes *de M, les couples (U_i, φ_i) formés par des ouverts U_i de M et des homéomorphismes $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

Sur l'intersection de deux cartes $U_i \cap U_j$, on a deux façons de repérer les points. Cette intersection produit deux ouverts $V_i = \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ et $V_j = \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$. On note $g_{ji} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ l'homéomorphisme de changement de cartes défini par $g_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Il est facile de voir que son inverse est g_{ij}.

Définition 1.3 *On appelle* atlas *de M, noté $\mathcal{A}(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, toute famille de cartes (Ui, φ_i) qui recouvrent entièrement M.*

Définition 1.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. On dit qu'une application $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est* lisse *ou différentiable si elle a des dérivées partielles de tous les ordres (f est $\mathcal{C}^\infty$).*

Définition 1.5 *Une application $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ est un* difféomorphisme *si elle est bijective et si f et f^{-1} sont lisses.*

Remarque 1 *Une application différentiable est automatiquement continue et, par conséquent, un difféomorphisme est automatiquement un homéomorphisme.*
De plus, l'ensemble des difféomorphismes d'une variété différentiable constitue un groupe par la composition des applications.

Définition 1.6 *Soit M une variété topologique de dimension n. Une* structure différentiable *est déterminée par la donnée d'un atlas $\mathcal{A}(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ de M ayant les propriétés suivantes :*
1) Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la restriction de $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$;
2) Si $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ est une autre atlas de M satisfaisant la condition précédente, alors $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Définition 1.7 *On appelle* variété différentiable *toute variété topologique munie d'une structure différentiable.*

Exemple 1 La sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x.x = 1\}$ est une variété différentiable de dimension n.
En effet, $S^n = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1\}$. Par la projection stéréographique, on peut établir une correspondance bijective entre $S^n \setminus \{(0, \cdots, 1)\}$, $S^n \setminus \{(0, \cdots, -1)\}$ et $\mathbb{R}^n$.
Tout point $(x^1, \cdots, x^{n+1}) \neq (0, \cdots, 1)$ peut être relié à $(0, \cdots, 1)$ par une droite rencontrant l'hyperplan $x^{n+1} = 0$ en un point $(y^1, \cdots, y^n, 0)$. Vu que ces trois points sont alignés, on a :
$(y^1, \cdots, y^n, 0) - (0, \cdots, 1) = \lambda[(x^1, \cdots, x^{n+1}) - (0, \cdots, 1)]$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
En résolvant cette équation, on a :

$$\lambda = \frac{1}{1 - x^{n+1}}.$$

En substituant λ dans l'équation, on déduit une application

$$\begin{aligned}\varphi : & S^n \backslash \{(0, \cdots, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x^1, \cdots, x^{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - x^{n+1}}(x^1, \cdots, x^n).\end{aligned}$$

Le couple (U, φ), avec $U = S^n \backslash \{(0, \cdots, 1)\}$ est une carte de coordonnées, de plus φ est bijective et $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$.

De façon analogue, mais cette fois-ci en utilisant le point $(0, \cdots, -1)$, on a une autre application

$$\begin{aligned}\psi : & S^n \backslash \{(0, \cdots, -1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x^1, \cdots, x^{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 + x^{n+1}}(x^1, \cdots, x^n).\end{aligned}$$

Le couple (V, ψ), avec $V = S^n \backslash \{(0, \cdots, -1)\}$ est une autre carte de coordonnées.

Les applications φ et ψ sont inversibles d'inverses respectives

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(y^1, \dots y^n) &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}\left(2y^1, \cdots, 2y^n, -1 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2\right) \\ \psi^{-1}(y^1, \dots y^n) &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2}\left(2y^1 \cdots, 2y^n, 1 - \sum_{i=1}^n (y^i)^2\right).\end{aligned}$$

On a donc

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(y^1, \cdots, y^n) = (\varphi \circ \psi^{-1})(y^1, \cdots, y^n) = \frac{(y^1, \cdots, y^n)}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}.$$

Il est clair que

$$\begin{aligned}U \cap V &= S^n \backslash \{(0, \cdots, 1), (0, \cdots, -1)\} \\ \varphi(U \cap V) &= \psi(U \cap V) \\ &= \mathbb{R}^n \backslash \{(0, \cdots, 0)\},\end{aligned}$$

de plus $\varphi \circ \psi^{-1}$ et $\psi \circ \varphi^{-1}$ sont lisses et $S^n = U \cup V$.

1.1.1 Fibré tangent

Soit M une variété différentiable et p un point de M. Considérons l'ensemble de toutes les fonctions lisses à valeurs réelles définies sur certains voisinages de p, et notons cet ensemble par $\mathfrak{F}(p)$. Si f et g sont des éléments de $\mathfrak{F}(p)$, alors $f+g$ et $f.g$ sont définies sur l'intersection des voisinages sur lesquels f et g sont définies respectivement ; $\lambda f, \quad \lambda \in \mathbb{R}$, est définie sur un voisinage sur lequel f est définie[9].
Considérons une courbe différentiable $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(0) = p$ et écrivons

$$\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

où $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Alors,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(0) &= (\dot{x}_1(0), \cdots, \dot{x}_n(0)) \\ &= \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Considérons maintenant $f \in \mathfrak{F}(p)$. On peut faire une restriction de f sur γ et exprimer la dérivée directionnelle suivant la direction de $\overrightarrow{v}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \left.\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t=0} \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \left(\sum_i \dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f. \end{aligned}$$

Définition 1.8 *Soit M une variété différentiable. Une fonction $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ est appelée* courbe *dans M.*
Supposons que $\gamma(0) = p \in M$ et $\mathfrak{D}$ l'ensemble de fonctions de M différentiables en p.
Le vecteur tangent à la courbe lisse γ en $t = 0$ est une fonction

$$\dot{\gamma}(0) : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$$

telle que

$$\dot{\gamma}(0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in \mathfrak{D}.$$

Un vecteur tangent *en p est le vecteur tangent à une courbe $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ en $t = 0$ telle que $\gamma(0) = p$.*

Remarque 2 *En définissant l'addition et la multiplication sur les vecteurs tangents à M comme suit,*
$(u + v)(f) = u(f) + v(f)$ *;*
$(\lambda v)(f) = \lambda(v(f))$ *;*
pour tous $u, v \in M, f \in \mathfrak{D}(p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; il est clair que l'ensemble de tous les vecteurs tangents à M en p muni de ces opérations forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.9 *Soit M une variété et p un point de M. On appelle* espace tangent *à M en p, et on note T_pM, l'espace vectoriel construit sur l'ensemble de vecteurs tangents en p. Par définition, T_pM et T_qM sont disjoints si $p \neq q$.*

Définition 1.10 *On définit le* fibré tangent *à la variété différentiable M, et on le note TM, la réunion disjointe de tous les espaces tangents en tous les points de M. On écrit $TM = \sqcup_{p \in M} T_pM$.*

1.1.2 Variété riemannienne

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une variété différentiable de dimension n muni du produit scalaire euclidien. La restriction du produit scalaire euclidien sur chaque espace tangent T_pM nous donne la première forme fondamentale ou la métrique qui est lisse. La base de l'espace[9]

$L^2(T_pM,\mathbb{R}) = \{\alpha : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} | \alpha \text{ est linéaire}\}$

est donnée par

$\{dx^i|_p \otimes dx^j|_p \text{ avec } i, j = 1 \cdots n\}$

où dx^i forment la base duale dans l'espace $(T_pM)^* = L(T_pM,\mathbb{R})$ qui se définit comme

$$dx^i|_p(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Les formes bilinéaires $dx^i|_p \otimes dx^j|_p$ sont telles que

$$(dx^i|_p \otimes dx^j|_p)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}|_p, \frac{\partial}{\partial x^l}|_p\right) = \delta^i_k \delta^j_l = \begin{cases} 1 & si\ i = k\ et\ j = l \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

En écrivant

$$\alpha = \sum_{i,j} \alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

on a :

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right);$$

et donc

$$\alpha_{ij} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Définition 1.11 *Soit M une variété différentiable et p un point de M. On appelle* métrique riemannienne *ou structure riemannienne toute forme bilinéaire $p \mapsto g_p \in L^2(T_pM,\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :*

i) $g_p(X,Y) = g_p(Y,X)\ \forall X, Y$;

ii) $g_p(X,X) > 0\ \forall X \neq 0$;

iii) Les coefficients g_{ij} en n'importe quelle représentation locale (c'est-à-dire en n'importe quelle carte)

$$g_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) dx^i|_p \otimes dx^j|_p$$

sont des fonctions différentiables.

Définition 1.12 *On appelle variété riemannienne toute variété différentiable M munie d'une structure riemannienne g. On la note (M, g).*

Exemple 2 Le demi-plan supérieur de Poincaré $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ muni de la métrique

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$$

avec

$$(g_{ij}(x, y)) = \frac{1}{y^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une variété riemannienne.

Définition 1.13 *Si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont des variétés riemanniennes, la variété produit $M_1 \times M_2$ est munie de la métrique riemannienne $g = g_1 \oplus g_2$, appelée métrique produit,définie par [10]*
$g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$
avec $X_i, Y_i \in T_{p_i}$ et $T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2 = T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2$.

Pour toutes coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ de M_1 et $(x^{n+1}, \ldots, x^{n+m})$ de M_2, $M_1 \times M_2$ a pour coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^{n+m})$.
En terme de ces coordonnées, l'expression locale de la métrique produit est donnée par

$g_{ij}dx^idx^j$, où g_{ij} est la matrice diagonale par blocs de $(g_1)_{ij}$ (bloc supérieur à gauche)et $(g_2)_{ij}$ (bloc inférieur à droite). C'est-à-dire que

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} (g_1)_{ij} & 0 \\ 0 & (g_2)_{ij} \end{bmatrix}.$$

1.2 PLAN HYPERBOLIQUE

On va considérer une des représentations de la géométrie hyperbolique, c'est-à-dire un modèle permettant de représenter graphiquement et de manière cohérente(mais dans ce mémoire on ne va pas faire des représentations graphiques) la géométrie hyperbolique et ses propriétés.
Il existe plusieurs représentations de la géométrie hyperbolique et pour le cas qui nous intéresse on va adopter le modèle du demi-plan de Poincaré. Signalons qu'il existe des isomorphismes permettant de passer d'un modèle à un autre. Dans l'espace à deux dimensions, deux modèles (le demi-plan supérieur et le disque unité de Poincaré) sont souvent utilisés pour étudier le plan hyperbolique.

Définition 1.14 *On définit le demi-plan supérieur par*
$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$
et sur lequel on définit une métrique

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dzd\bar{z}}{(Im(z))^2} \\ &= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \end{aligned}$$

1.2.1 Distances hyperboliques

Comme en géométrie euclidienne, par deux points $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ distincts il passe une et une seule géodésique, et une courbe γ est un arc de géodésique si et seulement si elle est incluse dans une géodésique (notion étudiée dans le second chapitre).
Par contre, par un point donné du plan hyperbolique il passe une infinité de droites hyperboliques parallèles à la droite hyperbolique donnée.

Définition 1.15 *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{H}$, telle que $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, un arc de courbe continue et C^1 par morceaux. La longueur hyperbolique de la courbe γ est*

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\gamma(t)) &= \int_a^b \frac{1}{Im(\gamma(t))}|\gamma'(t)|dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)}dt. \end{aligned}$$

Dans le cas où l'arc reliant deux points se trouvant sur l'orthogonale à l'axe réel, la longueur hyperbolique de l'arc contenu dans la droite hyperbolique qui les relient est facile à calculer.
Par exemple, considérons $0 < a < b$ et $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{H}$, l'arc de courbe continue et C^1 par morceaux défini par $\gamma(t) = it$. Il est clair que $\gamma([a,b])$ est un segment de droite reliant ia à ib. De plus, $Im(\gamma(t)) = t$, et $|\dot{\gamma}(t)| = 1$.
On a :

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\gamma) &= \int_a^b \frac{1}{Im(\gamma(t))}dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{t}dt \\ &= \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Remarque 3 *Dans le demi-plan supérieur, pour un cercle euclidien C donné, le centre et le rayon euclidiens sont différents du centre et du rayon hyperboliques.*

Exemple 3 Soit C un cercle dans le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$. Supposons que le centre euclidien de C est $c_e = a + bi$ et que son rayon euclidien est r_e. On a que son rayon hyperbolique r_h vérifie la relation $r_e = b\tanh(r_h)$ et que son centre hyperbolique c_h est donné par $c_h = a + i\sqrt{b^2 - r_e^2}$.

En effet, considérons deux points p_1 et p_2 sur C symétriques par rapport au centre $a + bi$ de même coordonnée réelle. On a $p_1 = a + (b + r_e)i$ et $p_2 = a + (b - r_e)i$.
Le rayon hyperbolique r_h est donné par :

$$\begin{aligned} r_h =& \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}}(a + (b + r_e)i, a + (b - r_e)i) \\ =& \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b + r_e}{b - r_e}\right). \end{aligned}$$

En appliquant tanh membre à membre, on a :

$$\begin{aligned} \tanh(r_h) =& \tanh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b + r_e}{b - r_e}\right)\right) \\ =& \frac{e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+r_e}{b-r_e}\right)} - e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+r_e}{b-r_e}\right)}}{e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+r_e}{b-r_e}\right)} + e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+r_e}{b-r_e}\right)}} \\ =& \frac{r_e}{b}. \end{aligned}$$

D'où $r_e = b\tanh(r_h)$.
Soit $a + si \in \mathbb{H}$. Le point $a + si$ est le centre hyperbolique si :
$d_{\mathbb{H}}(a + si, a + (b + r_e)i) = d_{\mathbb{H}}(a + si, a + (b - r_e)i)$.

Et donc,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{b+r_e}{s}\right) = \ln\left(\frac{s}{b-r_e}\right) \\ &\Rightarrow \left(\frac{b+r_e}{s}\right) = \left(\frac{s}{b-r_e}\right) \\ &\Leftrightarrow s^2 = b^2 - r_e^2 \\ &\Rightarrow s = \sqrt{b^2 - r_e^2}. \end{aligned}$$

1.2.2 Transformations de Möbius

Définition 1.16 *Soient $a, b, c, d, z \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On appelle transformation de Möbius, la fonction complexe définie sur $\mathbb{C} \cup \infty$ par :*

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Théorème 4 *Toute transformation de Möbius peut-être décomposée en un produit de transformations suivantes :*
i)Les translations :

$$T_b(z) = z + b$$

ii)Les dilatations (multiplications) :

$$M_a(z) = az, \quad a \in \mathbb{R}$$

sinon on a une rotation pour $a \in \mathbb{C}$.
iii)Les inversions :

$$I_z = \frac{1}{z}.$$

Démonstration. Si $c = 0$, on a :

$$\begin{aligned} m(z) &= T_{\frac{a}{c}}\big(M_{\frac{a}{d}}(z)\big) \\ &= \frac{az+b}{d}. \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} m(z) &= T_{\frac{a}{c}}\big(M_{b-\frac{ad}{c}}(I(T_d(M_c(z))))\big) \\ &= T_{\frac{a}{c}}\big(M_{b-\frac{ad}{c}}(I(T_d(cz)))\big) \\ &= T_{\frac{a}{c}}\big(M_{b-\frac{ad}{c}}(I(cz+d))\big) \\ &= T_{\frac{a}{c}}\big(M_{b-\frac{ad}{c}}(\frac{1}{cz+d})\big) \\ &= T_{\frac{a}{c}}\left(\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}\right) \\ &= \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d} \\ &= \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

■

Définition 1.17 *Soit $(G,*)$ un groupe dont l'élément neutre est e_G et M un ensemble. On dit que G agit sur M s'il existe une application*

$$\begin{aligned} \varphi :& G \times M \to M \\ &(g,x) \mapsto gx \end{aligned}$$

qui vérifie ;

i) $e_G x = x$

ii) $g_1(g_2x) = (g_1 * g_2)x.$

Définition 1.18 *Soit G un groupe agissant sur M et x un élément fixé dans M. On appelle orbite par action(ou orbite) de x tout sous-ensemble de M de la forme*
$\mathcal{O}_x = \{y \in M | g \in G : y = gx\}.$

Définition 1.19 *Une action d'un groupe G sur un ensemble M est donc transitive si et seulement si M n'est pas vide et que deux éléments quelconques de M peuvent être envoyés l'un sur l'autre par l'action d'un élément du groupe. En d'autres termes si pour tout $x_1, x_2 \in M$ il existe $g \in G$ tels que $x_2 = gx_1$*

1.2.3 Action de SL(2,$\mathbb{R}$) sur $\mathbb{H}$

Définition 1.20 *On définit le* groupe special linéaire *d'ordre deux à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *noté* $SL(2, \mathbf{R})$ *par :*
$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$

Les transformations de Möbius à coefficients réels préservent la distance hyperbolique et le plan hyperbolique et $SL(2, \mathbb{R})$ agit de façon transitive sur $\mathbb{H}$ par :

$$\begin{aligned} \varphi : & SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (z) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

Le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{R})$ qui fixe $i \in \mathbb{H}$ est le groupe de rotations du plan euclidien. Il est donné par :
$SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \right\}.$

Ce sous-groupe agit sur le plan tangent $T_i\mathbb{H}$.

CHAPITRE 2

GÉOMÉTRIE DU PLAN HYPERBOLIQUE

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'un des modèles du plan hyperbolique : le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$, muni d'une métrique dite métrique de Poincaré telle que définie dans le premier chapitre.
La notion de géodésiques ainsi que celle d'isométries vont être abordées dans un premier temps. Dans la suite nous nous intéressons à la distance hyperbolique séparant deux points quelconques de $\mathbb{H}$. Les études faites sur cette notion mettent en évidence différentes formes de l'expression de la distance hyperbolique (conduisant, bien sûr, au même résultat) mais dans ce chapitre nous n'allons évoquer que les deux de ces expressions [8].

2.1 GÉODÉSIQUES HYPERBOLIQUES

Considérons une courbe γ de classe C^2 tracée sur une hypersurface $S \subset \mathbb{R}^3$. Son vecteur tangent $\dot{\gamma}(t)$ est par définition tangent à la surface pour tout t. Son vecteur

accélération n'étant pas tangent à la surface, on peut le décomposer en une composante tangentielle et en une composante normale à la surface [18].
On a

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}_n(t) + \ddot{\gamma}_s(t),$$

où

$$\ddot{\gamma}_n(t) = (\ddot{\gamma}(t).N)N$$

est la projection de $\ddot{\gamma}(t)$ sur le vecteur normal à la surface et

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}_s(t) &= \ddot{\gamma}(t) - \ddot{\gamma}_n(t)\\ &= (N \times \ddot{\gamma}(t)) \times N\end{aligned}$$

est la composante tangentielle.

Définition 2.1 *Soit γ, une courbe sur une surface S et $\sigma(u(t), v(t)) = \gamma(t)$, une paramétrisation dans un voisinage de $p \in S$. Alors γ est géodésique si et seulement si*

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2);$$

$$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2);$$

où $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ est la première forme fondamentale telle que $E = \frac{\partial\sigma}{\partial u}.\frac{\partial\sigma}{\partial u}$, $F = \frac{\partial\sigma}{\partial u}.\frac{\partial\sigma}{\partial v}$, $G = \frac{\partial\sigma}{\partial v}.\frac{\partial\sigma}{\partial v}$, $E_u = \frac{\partial E}{\partial u}$, $E_v = \frac{\partial E}{\partial v}$, $F_u = \frac{\partial F}{\partial u}$, $F_v = \frac{\partial F}{\partial v}$, $G_u = \frac{\partial G}{\partial u}$ et $G_v = \frac{\partial G}{\partial v}$.
La quantité $\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}.\frac{\partial\sigma}{\partial x^j}$ étant le produit scalaire entre $\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial\sigma}{\partial x^j}$, avec $x^i, \quad x^j \in \{u, v\}$ pour le cas présent.

Pour une courbe γ sur une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ et deux points p et q de S par lesquels passe γ, on montre que γ est la courbe ayant la plus petite longueur que toute autre courbe joignant p et q en considérant une famille γ_s, $s \in (-\delta, \delta)$, de toutes les courbes passant par p et q telle que :

1) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_s(t)$ est définie pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ et $s \in (-\delta, \delta)$,

2) l'application $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ soit lisse,

3) $\gamma_0 = \gamma$.

Théorème 5 *Si une courbe unitaire γ, c'est-à-dire $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ pour tout t, tracée sur une surface S est géodésique, alors*

$$\frac{dL_{\gamma_s}}{ds} = 0$$

quand $s = 0$, pour toute famille de courbes γ_s telles que $\gamma_0 = \gamma$ [12].

Démonstration. Considérons une courbe $\gamma_0(t) \quad (a \leq t \leq b)$ tracée sur une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\|\dot{\gamma}_0(s)\| = 1$.

Dénotons par γ_s, une famille de chemins reliant a et b tracées sur S et dépendant du paramètre s telles que $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$ et $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$ pour tout s. La longueur de $\gamma_s = \sigma(u(t), v(t))$, dénotée par L_{γ_s}, est donnée par

$$\begin{aligned} L_{\gamma_s} &= \int_a^b \|\dot{\gamma}_s(t)\| dt \\ &= \int_a^b (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

où le point au dessus de chaque lettre désigne $\frac{d}{dt}$.

Or si $f(s, t)$ est lisse, alors

$$\frac{d}{ds} \int f(s, t) dt = \int \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} dt.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{dL_{\gamma_s}}{ds} &= \frac{d}{ds}\int_a^b \|\dot{\gamma}_s\| dt \\
&= \frac{d}{ds}\int_a^b (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s}(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2) dt.
\end{aligned}$$

Or, en posant

$$f(s,t) = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2,$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial E}{\partial s}\dot{u}^2 + 2E\dot{u}\frac{\partial \dot{u}}{\partial s} + 2\frac{\partial F}{\partial s}\dot{u}\dot{v} + 2F\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial s}\dot{v} + \dot{u}\frac{\partial \dot{v}}{\partial s}\right) + \frac{\partial G}{\partial s}\dot{v}^2 + 2G\dot{v}\frac{\partial \dot{v}}{\partial s} \\
&= \left(E_u\frac{\partial u}{\partial s} + E_v\frac{\partial v}{\partial s}\right)\dot{u}^2 + 2E\dot{u}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + 2\left(F_u\frac{\partial u}{\partial s} + F_v\frac{\partial v}{\partial s}\right)\dot{u}\dot{v} \\
&\quad + 2F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\dot{v} + \dot{u}\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t}\right) + \left(G_u\frac{\partial u}{\partial s} + G_v\frac{\partial v}{\partial s}\right)\dot{v}^2 + 2G\dot{v}\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t} \\
&= (E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)\frac{\partial u}{\partial s} + (E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)\frac{\partial v}{\partial s} \\
&\quad + 2(E\dot{u} + F\dot{v})\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 2(F\dot{u} + G\dot{v})\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}.
\end{aligned}$$

La substitution de l'expression de $\frac{\partial f}{\partial s}$ dans celle de $\frac{dL_{\gamma_s}}{ds}$ donne

$$\begin{aligned}
\frac{dL_{\gamma_s}}{ds} &= \frac{1}{2}\int_a^b (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}\left((E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)\frac{\partial u}{\partial s} + (E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)\frac{\partial v}{\partial s}\right)dt \\
&\quad + \int_a^b (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}\left((E\dot{u} + F\dot{v})\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + (F\dot{u} + G\dot{v})\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\right)dt.
\end{aligned}$$

En intégrant, par parties, on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}\left((E\dot{u}+F\dot{v})\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+(F\dot{u}+G\dot{v})\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\right)dt\\
&=(E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}\left((E\dot{u}+F\dot{v})\frac{\partial u}{\partial s}+(F\dot{u}+G\dot{v})\frac{\partial v}{\partial s}\right)\Bigg|_{t=a}^{t=b}\\
&\quad-\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial t}\left((E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}(E\dot{u}+F\dot{v})\right)\frac{\partial u}{\partial s}dt\right.\\
&\quad-\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial t}\left((E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}(F\dot{u}+G\dot{v})\right)\frac{\partial v}{\partial s}dt.\right.
\end{aligned}$$

Comme $\gamma_s(a)$ et $\gamma_s(b)$ sont indépendantes de s, on a

$$\frac{\partial\gamma_s}{\partial s}=0,$$

quand $t=a$ ou $t=b$.

En considérant la paramétrisation

$$\gamma_s(t)=\sigma(u(t),v(t)),$$

on a aussi que $\sigma(u(t),v(t))$ est indépendante de s quand $t=a$ ou $t=b$ et donc u et v sont indépendants de s quand $t=a$ ou $t=b$.

On en déduit donc que

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial s}=0$$

quand $t=a$ ou $t=b$.

Donc

$$(E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}\left((E\dot{u}+F\dot{v})\frac{\partial u}{\partial s}+(F\dot{u}+G\dot{v})\frac{\partial v}{\partial s}\right)\Bigg|_{t=a}^{t=b}=0.$$

Finalement,

$$\frac{dL_{\gamma_s}}{ds}=\int_a^b\left(A(s,t)\frac{\partial u}{\partial s}+B(s,t)\frac{\partial v}{\partial s}\right)dt,$$

où

$$A(s,t) = \frac{1}{2}(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}(E_u\dot{u}^2 + F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) \\ -\frac{d}{dt}\Big((E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}(E\dot{u} + F\dot{v})\Big),$$

$$B(s,t) = \frac{1}{2}(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}(E_v\dot{u}^2 + F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2) \\ -\frac{d}{dt}\Big((E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}}(F\dot{u} + G\dot{v})\Big).$$

Par hypothèse, $\gamma_0 = \gamma$ et $\|\dot{\gamma}\| = (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{\frac{1}{2}} = 1$.
Il en résulte que $(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}} = 1$.
Donc

$$A(s,t) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) - \frac{d}{dt}\Big(E\dot{u} + F\dot{v}\Big),$$

$$B(s,t) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2) - \frac{d}{dt}\Big(F\dot{u} + G\dot{v}\Big).$$

Si γ est géodésique, alors $A(s,t) = B(s,t) = 0$ quand $s = 0$ et donc

$$\frac{dL_{\gamma_s}}{ds} = 0$$

quand $s = 0$. ■

Remarque 6 *Les équations des géodésiques sont des équations différentielles non-linéaires. Donc, la résolution de ces équations s'avère difficile voir même impossible [12].*

Sachant que, dans $\mathbb{H}$, les géodésiques sont des demi-droites parallèles à l'axe des imaginaires et les demi-cercles hyperboliques centrés sur l'axe des réels, intéressons nous à la première équation géodésique, la plus facile à résoudre, pour déduire ces géodésiques.

La première équation géodésique est donnée par :

$$\frac{d}{dt}(E\dot{x} + F\dot{y}) = \frac{1}{2}(E_x\dot{x}^2 + 2F_x\dot{x}\dot{y} + G_x\dot{y}^2).$$

Pour la métrique sur $\mathbb{H}$, telle que définie, les coefficients de la première forme fondamentale sont $E = G = \dfrac{1}{y^2}$ et $F = 0$. Il en découle que $E_x = F_x = G_x = 0$.
En subsistant dans l'équation considérée, du fait qu'elle est facile à résoudre, on a

$$\frac{d}{dt}(\frac{\dot{x}}{y^2}) = 0.$$

Ce qui implique que

$$\frac{\dot{x}}{y^2} = c$$

où c est une constante.
La paramétrisation par longueur d'arc est donnée par

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} = 1. \tag{2.1}$$

Cale implique que

$$\dot{y} = \pm y\sqrt{1 - c^2y^2}$$

Si $c = 0$, x est une constante et

$$\dot{y} = \pm y$$
$$\Rightarrow y = \pm e^t.$$

Donc la géodésique est une verticale, parcourue de façon exponentielle. On s'approche indéfiniment de $y = 0$ ou on s'éloigne indéfiniment quand t tend vers l'infini.
Si $c \neq 0$, on a

$$\dot{x} = cy^2$$

et de 2.1, on a

$$\begin{aligned}\dot{y}^2 &= y^2 - \dot{x}^2\\ &= y^2 - (cy^2)^2.\end{aligned}$$

Or en écrivant

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}(y^2 c)$$

on trouve une équation différentielle à variables séparées

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-c^2y^2}{c^2y^2}}$$

dont la séparation des variables conduit à l'équation, facile à résoudre,

$$\frac{cy}{\sqrt{1-c^2y^2}}dy = dx.$$

En appliquant l'intégrale membre à membre, on a :

$$\begin{aligned}\int \frac{cy}{\sqrt{1-c^2y^2}}dy &= \int dx\\ \Leftrightarrow -\frac{1}{c}\sqrt{1-c^2y^2} + a &= x\\ \Leftrightarrow -\frac{1}{c}\sqrt{1-c^2y^2} &= x-a\\ \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 &= \frac{1}{c^2}\end{aligned}$$

qui est une équation du cercle de centre $(a, 0)$ et de rayon

$$\frac{1}{c}.$$

Donc, dans $\mathbb{H}$, les géodésiques sont des demi-droites parallèles à l'axe des imaginaires et les demi-cercles hyperboliques centrés sur l'axe des réels.

2.2 METRIQUE HYPERBOLIQUE

Dans la suite nous donnons une brève description de la construction d'une métrique hyperbolique. Pour ce faire, rappelons que la longueur hyperbolique d'une courbe continue différentiable $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}$, dénotée par $\|\gamma\| = L_{\mathbb{H}}(\gamma(t))$, est donnée par

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma(t)) = \|\gamma\| = \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{Im(\gamma(t))} dt.$$

Définissons pour ($z_1, z_2 \in \mathbb{H}$) la fonction μ par $\mu(z_1, z_2) = inf\|\gamma\|$ où l'infimum est prise sur toutes les γ reliant z_1 à z_2 dans $\mathbb{H}$.

Définition 2.2 *Soient z_1 et z_2 deux points de $\mathbb{H}$. Considérons $\Gamma[z_1, z_2]$, l'ensemble de tous les arcs de courbes continues et C^1 par morceau reliant z_1 à z_2. On définit la distance hyperbolique entre z_1 et z_2, et on note $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$ la quantité*

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \inf\{L_{\mathbb{H}}(\gamma(t)) | \gamma \in \Gamma[z_1, z_2]\}.$$

Remarque 7 *$\gamma \in \Gamma[z_1, z_2]$ est tel que : $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}$ avec $\gamma(a) = z_1$ et $\gamma(b) = z_2$.*

Théorème 8 *$\mu(z_1, z_2) = inf\|\gamma\|$ est une métrique sur $\mathbb{H}$.*

Démonstration. 1) $\mu(z_1, z_2) \geqslant 0$ car $|\dot{\gamma}(t)| \geqslant 0$ et $Im(\gamma(t)) > 0$.
Toutes les valeurs de $\|\gamma\|$ sont non négatives du fait que $b > a$.
Examinons le cas où $\mu(z_1, z_2) = 0$.
Sans perte de généralité, considérons $z_1 = x + iy$, $z_2 = u + iv$ tels que $x \neq u$. Pour toute courbe γ reliant z_1 à z_2, la partie réelle de $\gamma(t)$ n'est pas constante. Alors $\|\gamma\| > 0$.
Supposons $z_1 = z_2$, la courbe γ reliant z_1 à z_2 est constante et donc $\|\gamma\| = 0$ car $|\dot{\gamma}(t)| = 0$ et $Im(\gamma(t)) > 0$.

2) $\mu(z_1, z_2) = \mu(z_2, z_1)$ car les courbes qui relient z_1 à z_2 sont les même que celles qui relient z_2 à z_1.

3) Pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}$,

$$\mu(z_1, z_3) \leqslant \mu(z_1, z_2) + \mu(z_2, z_3).$$

Montrons cela par contradiction.
$\mu(z_1, z_3) \geqslant \mu(z_1, z_2)+\mu(z_2, z_3)$ implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(z_1, z_3) = \varepsilon+\mu(z_1, z_2)+\mu(z_2, z_3)$.
Donc, il existe deux courbes $\gamma_1, \ \ \gamma_2$ reliant respectivement z_1 à z_2 et z_2 à z_3 telles que

$$\|\gamma_1\| \leqslant \mu(z_1, z_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\|\gamma_2\| \leqslant \mu(z_2, z_3) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En joignant l'extrémité de γ_1 et l'origine de γ_2, on construit une courbe γ_3 reliant z_1 à z_3 et on a :

$$\begin{aligned} \|\gamma_3\| = \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\| &< \mu(z_1, z_2) + \mu(z_2, z_3) + \varepsilon \\ &< \mu(z_1, z_3). \end{aligned}$$

Contradiction car $\mu(z_1, z_3) = \inf \|\gamma\|$ pour tous les γ reliant z_1 à z_3.
Donc

$$\mu(z_1, z_3) \leqslant \mu(z_1, z_2) + \mu(z_2, z_3).$$

■

Théorème 9 *Soient* $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, *la distance hyperbolique* $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \mu(z_1, z_2)$ *est donnée par :*

$$(i)\ d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|}\right)$$
$$(ii)\ d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|}{2Im(z_1)Im(z_2)}\right).$$

Démonstration. Soient z_1 et $z_2 \in \mathbb{H}$. Ils sont ou bien alignés sur une droite perpendiculaire à $\partial\mathbb{H}$ ou bien sur le demi-cercle de centre $\partial\mathbb{H}$. Dans le cas où z_1 et z_2 sont sur une droite perpendiculaire à $\partial\mathbb{H}$, on a que

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \ln\left(\frac{Im(z_2)}{Im(z_1)}\right) \quad , Im(z_2) > Im(z_1).$$

Or

$$\begin{aligned}\tanh\frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2} &= \frac{e^{d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2)} - 1}{e^{d_{\mathbb{H}}(z_1,z_2)} + 1}\\ &= \frac{\frac{Im(z_2)}{Im(z_1)} - 1}{\frac{Im(z_2)}{Im(z_1)} + 1}\\ &= \frac{Im(z_2) - Im(z_1)}{Im(z_2) - Im(z_1)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|z_2 - z_1| &= |iIm(z_2) - iIm(z_1)|\\ &= Im(z_2) - Im(z_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z_2 - \bar{z_1}| &= |iIm(z_2) + iIm(z_1)|\\ &= Im(z_2) + Im(z_1);\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z_1}|} = \frac{Im(z_2) - Im(z_1)}{Im(z_2) + Im(z_1)}.$$

Donc

$$\tanh \frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2} = \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|}.$$

D'où la relation

$$\begin{aligned} \tanh \frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2} &= \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|} \\ \Rightarrow d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) &= 2 \tanh^{-1} \left(\frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|} \right). \end{aligned}$$

Dans le cas où z_1 et z_2 sont sur le demi-cercle de centre c, on peut paramétrer ce cercle par

$$x = c + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

et

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2}{y^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\sin \theta} \\ &= \ln \left(\frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right). \end{aligned}$$

D'une part

$$\begin{aligned} \tanh \frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2} &= \frac{e^{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)} - 1}{e^{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)} + 1} \\ &= \frac{\tan \frac{\beta}{2} - \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
|z_2 - z_1|^2 &= r^2\big[(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2\big] \\
&= 2r^2[1 - \cos(\beta - \alpha)] \\
&= 4r^2 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2}. \\
|z_2 - \bar{z}_1|^2 &= r^2\big[(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta + \sin\alpha)^2\big] \\
&= 2r^2[1 - \cos(\beta + \alpha)] \\
&= 4r^2 \sin^2 \frac{\beta + \alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{|z_2 - z_1|^2}{|z_2 - \bar{z}_1|^2} &= \frac{\sin^2 \frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\beta+\alpha}{2}} \\
\Rightarrow \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|} &= \frac{\sin \frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta+\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\tanh \frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2} &= \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|} \\
\Rightarrow d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) &= 2\tanh^{-1}\left(\frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|}\right).
\end{aligned}$$

Pour (ii) on se sert des identités

$$\frac{1}{\cosh\theta} = 1 - \tanh^2\theta$$

et

$$\cosh\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cosh\theta}{2}.$$

D'après (i), la métrique de Poincaré est de la forme

$$\tanh \frac{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}{2} = \frac{A}{B}$$

et donc

$$\cosh(d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)) = \frac{B^2 + A^2}{B^2 - A^2}.$$

En prenant

$$z_1 = iv, \quad z_2 = iy, \quad A = |z_2 - z_1|, \quad B = |z_2 - \bar{z}_1|,$$

on a :

$$\begin{aligned} \cosh(d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)) &= \frac{B^2 + A^2}{B^2 - A^2} \\ &= \frac{y^2 + v^2}{2yv} \\ &= \left(1 + \frac{|z_1 - z_2|}{2Im(z_1)Im(z_2)}\right). \end{aligned}$$

Et si $z_1 = u + iv, \quad z_2 = x + iy, \quad A = |z_2 - z_1|, \quad B = |z_2 - \bar{z}_1|$, les calculs nous donnent

$$\begin{aligned} B^2 + A^2 &= 4yv + 2|z_2 - z_1| \\ B^2 - A^2 &= 4yv \\ \Rightarrow \frac{B^2 + A^2}{B^2 - A^2} &= 1 + \frac{|z_2 - z_1|^2}{2yv}. \end{aligned}$$

D'où la relation

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|}{2Im(z_1)Im(z_2)}\right).$$

■

Théorème 10 *Soit $\gamma \in Möb(\mathbb{H})$ et $z, z' \in \mathbb{H}$. Alors $d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), \gamma(z')) = d_{\mathbb{H}}(z, z')$.*

Démonstration. Si σ est un arc reliant z à z' alors $\gamma \circ \sigma$ est un arc reliant $\gamma(z)$ à $\gamma(z')$. Il faut alors montrer que $L_{\mathbb{H}}(\gamma \circ \sigma) = L_{\mathbb{H}}(\sigma)$.

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\gamma \circ \sigma) &= \int \frac{|(\gamma \circ \sigma)'(t)|}{Im(\gamma \circ \sigma)(t)} dt \\ &= \int \frac{|\gamma'(\sigma(t))||\sigma'(t)|}{Im(\gamma \circ \sigma)(t)} dt. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{d(\sigma(t))}{dt} =& \frac{d}{dt}\left(\frac{a\sigma(t)+b}{c\sigma(t)+d}\right)\\ =& \frac{(ad-bc)\frac{d(\sigma(t))}{dt}}{|c\sigma(t)+d|^2}.\end{aligned}$$

De plus,

$$Im(\gamma(\sigma(t)) = \frac{(ad-bc)Im(\sigma(t))}{|c\sigma(t)+d|^2}$$

Donc

$$\begin{aligned}L_{\mathbb{H}}(\gamma\circ\sigma) =& \int \frac{(ad-bc)|\sigma'(t)|}{|c\sigma(t)+d|^2}\frac{|c\sigma(t)+d|^2}{(ad-bc)Im(\sigma(t))}dt\\ =& \int \frac{|\sigma'(t)|}{Im(\sigma(t))}dt\\ =& L_{\mathbb{H}}(\sigma).\end{aligned}$$

■

La métrique riemannienne sur une surface étant donnée par

$$ds^2 = g_1dx^2 + g_2dy^2$$

la *courbure gaussienne* K est donnée par

$$K = \frac{-1}{\sqrt{g_1g_2}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{g_1}}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{g_2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{g_2}}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{g_1}\right)\right]$$

Théorème 11 *$\mathbb{H}$ muni de sa métrique riemannienne est de courbure gaussienne constante négative -1.*

Démonstration. Rappelons que la métrique riemannienne sur $\mathbb{H}$ est

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}.$$

Il est clair donc que

$$g_1 = g_2 = \frac{1}{y^2}.$$

Il en découle que

$$\frac{\partial}{\partial x}(g_1) = 0.$$

Ce qui implique que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{g_1}}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{g_2}\right) = 0,$$

$$\frac{-1}{\sqrt{g_1 g_2}} = -y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(g_2) = \frac{-1}{y^2}.$$

De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{g_2}}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{g_1} = \frac{-1}{y},$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{g_2}}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{g_1}\right) = \frac{1}{y^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} K &= -y^2\left(\frac{1}{y^2}\right) \\ &= -1. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Cependant, $\mathbb{H}$ n'est pas la seule surface à courbure gaussienne -1. Un autre exemple qu'on rencontre souvent est la pseudo-sphère (de pseudo-rayon 1) qui est une surface de révolution engendrée par la rotation de la tractrice autour de son asymptote. Cette surface est appelée ainsi car sa courbure gaussienne

$$K = -\frac{1}{r^2}$$

est constante comme pour la sphère, mais négative.

La pseudo-sphère est paramétrée par

$$\sigma(u,v) = \left(r\frac{1}{\cosh u}\cos v, r\frac{1}{\cosh u}\sin v, r(u - \tanh u)\right)$$

où $u \in (-\infty, +\infty)$ et $v \in (0, 2\pi)$.

Les calculs montrent que la métrique est donnée par

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_1 du^2 + g_2 dv^2 \\ &= \frac{r^2}{\cosh^2 u}(dv^2 + \sinh^2 u du^2). \end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{r^2 \sinh^2 u}{\cosh^2 u} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g_1}} &= \frac{\cosh u}{r \sinh u}; \\ g_2 = \frac{r^2}{\cosh^2 u} \Rightarrow \sqrt{g_2} &= \frac{r}{\cosh u}; \\ \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}} &= \frac{\cosh^2 u}{r^2 \sinh u}; \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{g_1}}\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{g_1}\right) &= \frac{\sinh u}{\cosh^2 u}. \end{aligned}$$

D'où

$$K = -\frac{1}{r^2}.$$

On peut aussi établir une isométrie locale entre $\mathbb{H}$ et la pseudo-sphère PS.

En utilisant la paramétrisation suivante de PS,

$$\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, g(r))$$

où

$$g(r) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}\right) - \sqrt{1-r^2}$$

avec $0 < r < 1, \quad -\pi < \theta < \pi,$

la métrique se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= (\cos\theta, \sin\theta, \frac{d(g(r))}{dr});\\
\sigma_\theta &= (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0);\\
ds^2_{|_{PS}} &= \frac{1}{r^2}dr^2 + r^2 d\theta^2.
\end{aligned}$$

En effectuant un changement de variable comme suit

$$z = x + iy = \theta + i\frac{1}{r}$$

et en calculant la métrique sur $\mathbb{H}$, on a :

$$\begin{aligned}
ds^2_{|_{\mathbb{H}}} &= \frac{dx^2+dy^2}{y^2}\\
&= \frac{d\theta^2 + \left(\frac{1}{r^4}\right)dr^2}{\left(\frac{1}{r}\right)^2}\\
&= r^2 d\theta^2 + \frac{1}{r^2}dr^2.
\end{aligned}$$

2.3 ISOMÉTRIES HYPERBOLIQUES

Les isométries de $\mathbb{H}$, dont l'ensemble est noté Isom($\mathbb{H}$) sont toutes les transformations de Möbius qui préservent $\mathbb{H}$.

Il s'agit des applications $\mathbb{C}\cup\infty \to \mathbb{C}\cup\infty$ de l'une des formes suivantes [16]

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$$

telle que $ad - bc > 0$;

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$$

telle que $ad - bc < 0$.

Remarque 12 *L'application $z \mapsto \bar{z}$ inverse l'orientation. Il en découle que les isométries de $\mathbb{H}$ de la première forme des précédentes formes préservent l'orientation tandis que celles de la seconde forme inversent l'orientation. On a donc le théorème suivant dont la démonstration est dans [8].*

Théorème 13 *Le groupe* Isom($\mathbb{H}$) *est généré par les transformations de Möbius*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

(où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$) ainsi que les transformations $z \mapsto -\bar{z}$.

La classification des isométries qui préservent l'orientation du plan hyperbolique est basée sur la valeur absolue de la trace de la matrice associée à toute isométrie ou sur base de l'emplacement et du nombre de points qu'elles fixent [5] [13].
Soit A $\in$SL(2,$\mathbb{R}$) de trace $tr(A)$. L'isométrie dont A représente est dite *hyperbolique, elliptique, parabolique*, respectivement, si $|tr(A)| > 2$, $|tr(A)| < 2$, $|tr(A)| = 2$.
Cette classification garde un sens même pour les éléments de PSL(2,$\mathbb{R}$). Si on considère la transformation

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$$

et qu'on pose

$$\frac{az + b}{cz + d} = z,$$

on a :

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Le calcul des racines de cette équation donne

$$z_{1,2} = \frac{(d-a) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$

Pour tout élément A de GL(n,$\mathbb{C}$), on peut lui associer un élément g $\in$Möb($\mathbb{H}$) comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on définit $g_A(z)$ par

$$g_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Dénotons par Φ, l'application $A \mapsto g_A$.

$A \in Ker\Phi$ si et seulement si

$$\frac{az+b}{cz+d} = z,$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \cup \infty$.

Si $A \in Ker\Phi$, avec $z = 0, \quad \infty$ et 1, respectivement, on a que

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Donc

$$Ker\Phi = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : \quad a \neq 0 \right\}.$$

En particulier, Möb($\mathbb{H}$) est isomorphe à GL(2,$\mathbb{C}$)/$Ker\Phi$.

En effet,

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

On dit que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est la *matrice associée* à la transformation de Möbius $\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.
Pour tout

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{C});$$

on a :

d'une part

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)(z)\right) &= \Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) \\
&= \frac{a\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right)+b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right)+d} \\
&= \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)(z) &= \left(\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+gd & cf+dh \end{bmatrix}\right)(z) \\
&= \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)(z)\right)^{-1} &= \frac{-dz+b}{cz-a} \\
&= \Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\right)(z).
\end{aligned}$$

Donc Φ est un homomorphisme.

De façon générale, on peut établir une restriction de $\Phi_{|_{SL(2,\mathbb{C})}}$ de Φ à SL(2,$\mathbb{C}$) et dans ce cas

$$\begin{aligned}
Ker\Phi_{|_{SL(2,\mathbb{C})}} &= Ker\Phi \cap SL(2,\mathbb{C}) \\
&= \{-I, I\}.
\end{aligned}$$

Remarque 14 *Deux matrices* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ *de SL(2,$\mathbb{R}$) sont associées à la même transformation de Möbius.*

Définition 2.3 *Le* groupe linéaire spécial projectif *(en dimension 2), noté $PSL(2,\mathbb{R})$, est tel que*

$$PSL(2,\mathbb{R}) = \{[A] : A \in SL(2,\mathbb{R})\}$$

où $[A] = \{\pm A\}$ est la classe d'équivalence de $A \in SL(2,\mathbb{R})$, muni du produit $[A].[B] = [AB]$.

Par cette définition, il est clair que les éléments de $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{-I, I\}$ sont de la forme

$$\pm \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$.

PSL(2,$\mathbb{R}$) contient toutes les matrices auxquelles on associe les transformations de Möbius du type

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc > 0.$$

En divisant les numérateurs et les dénominateurs de ces transformations par $\sqrt{ad-bc}$ on a que les matrices associées sont de déterminant égal à 1 et en particulier PSL(2,$\mathbb{R}$) contient aussi les transformations du type

$$z \mapsto az + b, \quad (a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R})$$

et

$$z \mapsto \frac{-1}{z}.$$

Lemme 1 *Soient* $z_0 \in \mathbb{H}$ *et* K *un sous-ensemble compact de* $\mathbb{H}$. *Alors*

$$E = \{T \in PSL(2,\mathbb{R}) | T(z_0)) \in K\}$$

est compact.

Démonstration. Par définition de $PSL(2,\mathbb{R})$, on suppose qu'on a une application continue $\varphi : SL(2,\mathbb{R}) \to PSL(2,\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)(z) = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

soit alors

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) | \ \ \frac{az_0+b}{cz_0+d} \in K \right\}.$$

On démontre que E_1 est compact en identifiant

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

à $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

En prenant l'application $\beta : SL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{H}$ définie par $\beta(A) = \varphi(A)(z_0)$ et $E_1 = \beta^-1(K)$, alors E_1 est fermé car K l'est.

En plus, K est borné.

Donc il existe $M_1 > 0$ tel que

$$\left| \frac{az_0+b}{cz_0+d} \right| < M_1$$

pour tout

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in E_1.$$

K étant compact dans $\mathbb{R}$, il existe $M_2 > 0$ tel que

$$Im\left(\frac{az_0+b}{cz_0+d} \right) \geqslant M_2.$$

Or, les calculs montrent que

$$Im\left(\frac{az_0+b}{cz_0+d}\right)=\frac{Im(z_0)}{|cz_0+d|^2}.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}|cz_0+d| &\leqslant \sqrt{\left(\frac{Im(z_0)}{M_2}\right)}\\ \Rightarrow |az_0+b| &\leqslant M_1\sqrt{\left(\frac{Im(z_0)}{M_2}\right)}\end{aligned}$$

et on en tire que a, b, c, d sont bornés. ■

Théorème 15 *Le groupe $PSL(2,\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}$ de façon homéomorphe.*

Démonstration. Soit $[A] \in PSL(2,\mathbb{R})$. Pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a :

$$\begin{aligned}[A](z) &= \frac{(az+c)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}\\ &= \frac{acz\bar{z}+bd}{|cz+d|^2}+\frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}.\end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme étant réel, l'examen du second terme nous montre que sa partie imaginaire est donnée par

$$\begin{aligned}Im\left(\frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\right) &= \frac{(ad-bc)Im(z)}{|cz+d|^2}\\ &= Im([A](z))>0.\end{aligned}$$

Donc $[A] \in PSL(2,\mathbb{R})$ envoie $\mathbb{H}$ sur lui-même et de plus $[A]$ et $[A]^{-1}$ sont continues. ■

Théorème 16 *Le groupe $PSL(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$.*

Démonstration. Par le théorème précédent, $PSL(2,\mathbb{R})$ envoie $\mathbb{H}$ sur lui-même.

Si $\gamma : I \to \mathbb{H}$ est un arc de courbe différentiable par morceaux dans $\mathbb{H}$, alors pour tout $[A] \in PSL(2,\mathbb{R})$, on a $L_{\mathbb{H}}([A](\gamma)) = L_{\mathbb{H}}(\gamma)$.

Supposons γ et $\gamma' : I \to \mathbb{H}$ données par $z(t) = x(t) + iy(t)$ et $w(t) = [A](z(t)) = u(t) + iv(t)$.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Puisque

$$Im(w) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2},$$

on a :

$$\begin{aligned} v &= \frac{y}{|cz+d|^2} \\ \Rightarrow \left|\frac{dw}{dz}\right| &= \frac{v}{y}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}([A](\gamma)) &= \int_a^b \frac{|\frac{dw}{dt}|dt}{v(t)} \\ &= \int_a^b \frac{|\frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt}|dt}{v(t)} \\ &= \int_a^b \frac{|\frac{dz}{dt}|}{y(t)} \\ &= L_{\mathbb{H}}(\gamma). \end{aligned}$$

■

Théorème 17 *Une isométrie φ de $\mathbb{H}$ qui préserve l'orientation est dite :*

1) Elliptique, si elle fixe un point dans $\mathbb{H}$;

2) Parabolique, si elle ne fixe aucun point dans $\mathbb{H}$ mais fixe exactement un seul point de

$\partial\mathbb{H}$;

3) Hyperbolique, si elle ne fixe aucun point dans $\mathbb{H}$ *mais fixe exactement deux points de* $\partial\mathbb{H}$.

Ces trois types d'isométries du plan hyperbolique présentent des propriétés géométriques différentes [3].

2.3.1 Type elliptique

Dans le cas où l'isométrie φ est elliptique, son action sur $\mathbb{H}$ est une rotation dont le centre est le point fixé par φ dans $\mathbb{H}$.

Si φ fixe le point $z = i$, elle fixe aussi le point $z = -i$.

Donc φ est une transformation de type :

$$\rho_\alpha : z \mapsto \frac{\cos\frac{\alpha}{2}z + \sin\frac{\alpha}{2}}{-\sin\frac{\alpha}{2}z + \cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Dénotons par A_α la matrice associée à la transformation ρ_α.

Explicitement :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}.$$

Soit $[A] \in SL(2,\mathbb{R})$ la matrice associée à la transformation de Möbius qui fixe $z = i$.

Alors il existe $\alpha \in (-\pi, \pi)$ telle que $A = \pm A_\alpha$.

En effet, pour

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(i) &= \frac{ai+b}{ci+d} \\ &= \frac{bd - ac + i(ad - bd)}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Si A fixe i, on en déduit que

$$\begin{cases} bd - ac = 0 \\ ad - bc = 1 \\ d^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Si $d = \cos\frac{\alpha}{2}$ et $-\sin\frac{\alpha}{2}$ pour un certain $\alpha \in (-\pi, \pi)$, alors $b = \sin\frac{\alpha}{2}$ et $a = \cos\frac{\alpha}{2}$.

D'où le résultat.

Étant donné que Möb($\mathbb{H}$) agit sur $\mathbb{H}$ de façon transitive, toute isométrie elliptique est conjuguée à toute transformation de Möbius de type ρ_α. En d'autres termes, si φ est une isométrie elliptique fixant le point $z_0 \in \mathbb{H}$, et si $\psi \in$Möb($\mathbb{H}$) envoie z_0 à i, alors $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-}1$ est elliptique et fixe i.

Remarque 18 *Les seules transformations elliptiques qui fixent $z = i$ sont nécessairement celles de la forme ρ_α.*

Exemple 4 Considérons la transformation elliptique quelconque $z \mapsto \phi(A)(z)$, avec $A \in SL(2, \mathbb{R})$, fixant $z = r + is$.

L'application $\mu(M)(z)$ ayant pour matrice associée :

$$M = \frac{1}{\sqrt{s}} \begin{bmatrix} 1 & -r \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

est une isométrie qui envoie $z = r + is$ à i.

Il existe donc un $\alpha \in (-\pi, \pi)$ tel que $\mu \circ \phi \circ \mu^{-1} = \rho_\alpha$ et donc $\phi = \mu^{-1} \circ \rho_\alpha \circ \mu$.

Cela implique que $A = \pm M^{-1} A_\alpha M$.

On dit que ϕ est une rotation de centre $z = r + is$ et d'angle α.

Puisque $tr(M^{-1}A_\alpha M) = tr(A_\alpha)$; nous déduisons que toute transformation elliptique $z \mapsto \phi(A)(z)$, $A \in SL(2, \mathbb{R})$, est une rotation, et que son angle de rotation satisfait la relation

$$2cos\frac{\alpha}{2} = |trA|.$$

2.3.2 Type hyperbolique

Soit $A \in SL(2, \mathbb{R})$, la matrice associée à la transformation de Möbius fixant 0 et ∞. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = \pm \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{bmatrix} = B_t.$$

En effet, soit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

La transformation de Möbius $\tau(A)$ associée à A est telle que

$$\tau(A)(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Alors,

$$\lim_{z \to 0} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{b}{d}$$
$$\lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

Dire que $\tau(A)(z)$ fixe $z = 0$ (respectivement $z = \infty$) implique que $\frac{b}{d} = 0$ (respectivement $\frac{a}{c} = \infty$).

Donc, $b = c = 0$.

Or, $ad - bc = 1 \Rightarrow ad = 1$.

Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} ad &= \cosh^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \left(\cosh\left(\frac{t}{2}\right) + \sinh\left(\frac{t}{2}\right)\right)\left(\cosh\left(\frac{t}{2}\right) - \sinh\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= e^{\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

La matrice A est engendrée par le générateur $\upsilon_t : z \mapsto e^t z$.

Cela montre que les seules transformations hyperboliques qui fixent 0 et ∞ sont de type υ_t.

Pour tout point $p = r + is \in \mathbb{H}$, on a :

$$\begin{aligned}\cosh d(p, \upsilon_t(p)) &= 1 + \frac{(e^t - 1)^2 |r + is|^2}{2e^t s^2} \\ &\geq 1 + \frac{(e^t - 1)^2}{2e^t} \\ &= \cosh(t).\end{aligned}$$

L'égalité a eu lieu si $r = 0$.

Soit maintenant $z \mapsto \Phi(A)(z)$, où $A \in SL(2, \mathbb{R})$, la transformation hyperbolique fixant $u, \ \ w \in \partial\mathbb{H}$. Son axe est donné par $\gamma_A = C \cap \mathbb{H}$, où C est le cercle généralisé intersectant, de façon orthogonale, $\partial\mathbb{H}$ au points u, w.

L'application $z \mapsto \mu(M)(z)$ avec matrice associée

$$\begin{bmatrix} \frac{w}{w-u} & \frac{-uw}{w-u} \\ \frac{-1}{w} & 1 \end{bmatrix},$$

envoie u à 0 et w à ∞.

Il en découle que l'application composée $\mu \circ \Phi \circ \mu^{-1}$ fixe 0 et ∞.

Donc, il existe l'unique $t_A \in \mathbb{R}$ tel que $\upsilon_{t_A} = \mu \circ \Phi \circ \mu^{-1}$; ce qui implique que $\Phi = \mu^{-1} \circ \upsilon_{t_A} \circ \mu$.

De façon similaire que précédemment, $A = \pm M^{-1} B_t M$ et $|tr(A)| = |tr(B_{t_A})| = 2\cosh\left(\frac{t_A}{2}\right)$.

On remarque que $p \in \mathbb{H}$ est sur γ_A si est seulement si $\mu(p)$ est sur l'axe de υ_{t_A} ; et dans ces conditions, on a :

$$\begin{aligned}d(p, \Phi(p)) &= d(\mu(p), \mu(\Phi(p))) \\ &= d(\mu(p), \mu \circ \Phi \circ \mu^{-1}(\mu(p))) \\ &= d(\mu(p), \upsilon_{t_A}(\mu(p)))),\end{aligned}$$

ce qui nous conduit au résultat suivant :

Théorème 19 *Soit $z \mapsto A(z)$, $A \in \mathbb{R}$, une transformation hyperbolique et $l_A > 0$ un nombre tel que*

$$2\cosh\left(\frac{l_A}{2}\right) = |tr(A)|.$$

Alors, $d(p, A(p)) \geqslant l_A$ pour tout $p \in \mathbb{H}$, avec l'égalité si et seulement si p est sur l'axe de A.

2.3.3 Type parabolique

Si $A \in$SL(2,$\mathbb{R}$) représente une transformation de Möbius et fixe ∞, alors A est de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 20 *Sous l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$, la métrique riemannienne ds^2 est invariante.*

Démonstration. En effet, considérons l'action

$$SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Posons

$$\frac{az+b}{cz+d} = z' = x' + iy'$$
$$Im(z') = \frac{y}{|cz+d|^2}$$
$$\Rightarrow (Im(z'))^2 = \frac{y^2}{|cz+d|^4}.$$

Or

$$
\begin{aligned}
dz' =& \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} dz \\
=& \frac{dz}{(cz+d)^2} \\
\Rightarrow dz' d\overline{z'} =& \left(\frac{dz}{(cz+d)^2} \right) \left(\overline{\frac{dz}{(cz+d)^2}} \right) \\
=& \frac{dz d\overline{z}}{|(cz+d)^2|^2} \\
=& \frac{dz d\overline{z}}{|cz+d|^4}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
ds' =& \frac{dz d\overline{z}}{|cz+d|^4} \times \frac{|cz+d|^4}{y^2} \\
=& \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.
\end{aligned}
$$

■

Théorème 21 *Deux éléments de $SL(2,\mathbb{R})$ induisent la même isométrie si et seulement si les matrices de cette isométrie sont soit égales soit opposées.*

Démonstration. Considérons deux matrices $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$.
Si $M{=}N$, alors $a = e, b = f, c = g$ et $d = h$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$
\frac{az+b}{cz+d} = \frac{ez+f}{gz+h}.
$$

Si $M{=}-N$, alors $a = -e, b = -f, c = -g$ et $d = -h$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{az+b}{cz+d} =& \frac{-ez-f}{-cg-h} \\
=& \frac{-(ez+f)}{-(gz+h)} \\
=& \frac{ez+f}{gz+h}.
\end{aligned}
$$

Supposons maintenant que les deux isométries sont les mêmes.

On a

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{ez+f}{gz+h}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Cela implique que

$$\begin{aligned} agz^2 + ahz + bgz + bh = cez^2 + edz + cfz + fd \\ &\Leftrightarrow ag = ce, \quad ah + bg = ed + cf, \quad bh = fd, \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{e} = \frac{c}{g} = \lambda_1; \\ &\Leftrightarrow \frac{b}{f} = \frac{d}{h} = \lambda_2. \end{aligned}$$

Pour $ah + bg = ed + cf$, on peut l'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda_1 eh + \lambda_2 fg = \lambda_2 eh + \lambda_1 fg \\ &\Rightarrow \lambda_1(eh - fg) = \lambda_2(eh - fg) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2. \end{aligned}$$

Il existe alors λ tel que

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{g} = \frac{d}{h} = \lambda.$$

Ce qu'on peut représenter sous forme matricielle par $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

Le calcul du déterminant pour les deux membres nous donne

$$\lambda^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

■

CHAPITRE 3

FIBRÉ UNITAIRE TANGENT ET SA MÉTRIQUE : FLOT GÉODÉSIQUE

La variété hyperbolique $\mathbb{H}$ étant une variété riemannienne, on peut lui associer son fibré tangent, noté $T\mathbb{H}$, ainsi que son fibré unitaire tangent, dénoté par $T^1\mathbb{H}$, et défini par :

$$T^1\mathbb{H} = \{(z, \overrightarrow{v}) | z \in \mathbb{H}, \overrightarrow{v} \in T_z\mathbb{H}; \|\overrightarrow{v}\|_z = 1\},$$

avec

$$\|\overrightarrow{v}\|_z = \frac{\|\overrightarrow{v}\|}{Im(z)}$$

où $\|\overrightarrow{v}\|$ est la norme euclidien.

3.1 ACTION DE PSL(2,$\mathbb{R}$) SUR $T^1\mathbb{H}$

Soit $z \in \mathbb{H}$ et γ une courbe dans $\mathbb{H}$.

Considérons la transformation

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$
$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2,\mathbb{R}).$$

La courbe γ est telle que $\gamma(t) = x(t) + iy(t) = z(t)$ et

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)(z(t)) = \frac{az(t)+b}{cz(t)+d}.$$

Donc l'application

$$d\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) : T_z\mathbb{H} \to T_z\mathbb{H}$$
$$\frac{d(\gamma(t))}{dt} \mapsto \frac{d\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)(\gamma(t))\right)}{dt}$$

est bien définie.

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d(\gamma(t))}{dt} \mapsto \frac{d\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)(\gamma(t))\right)}{dt} &= \frac{(a(cz(t)+d) - c(az(t)+b))\frac{d(z(t))}{dt}}{(cz(t)+d)^2} \\ &= \frac{\frac{d(z(t))}{dt}}{(cz(t)+d)^2} \\ &= \frac{\overrightarrow{v}}{(cz(t)+d)^2}. \end{aligned}$$

On a donc une application telle que

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, (z, \overrightarrow{v})\right) \mapsto \left(\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)(z), \frac{\overrightarrow{v}}{(cz(t)+d)^2}\right)$$

et

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (z, \overrightarrow{v}) \right) \mapsto (z, \overrightarrow{v}).$$

Donc une action de PSL(2,$\mathbb{R}$) sur $T_z\mathbb{H}$.

Remarque 22 *La double action de PSL(2,$\mathbb{R}$) sur $T_z\mathbb{H}$, dans l'ordre, correspond exactement à l'action du produit matriciel de deux éléments de PSL(2,$\mathbb{R}$) sur $T_z\mathbb{H}$, dans le même ordre.*

Théorème 23 *PSL(2,$\mathbb{R}$) agit, transitivement et librement, sur $T^1\mathbb{H}$ selon la formule*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (z, \overrightarrow{v}) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\overrightarrow{v}}{(cz+d)^2} \right).$$

Démonstration. Pour tout $(z, \overrightarrow{v}) \in T^1\mathbb{H}$, et

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

on a

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (z, \overrightarrow{v}) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\overrightarrow{v}}{(cz+d)^2} \right).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\overrightarrow{v}}{(cz+d)^2} \right\|_{[A](z)} &= \frac{\left\| \frac{\overrightarrow{v}}{(cz+d)^2} \right\|}{Im([A](z))} \\ &= \frac{\| \overrightarrow{v} \|}{Im(z)} \\ &= \| \overrightarrow{v} \|_z \\ &= 1 \end{aligned}$$

car,

$$Im([A](z)) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$$

et

$$|cz+d|^2 = |(cz+d)^2|.$$

Cette action envoie $T^1\mathbb{H}$ sur lui même. En particulier, elle est transitive [4] .

Pour vérifier que cette action est libre, on vérifie que l'unique élément de PSL(2,$\mathbb{R}$) qui laisse invariant tout élément $(z, \overrightarrow{v}) \in T^1\mathbb{H}$ est l'identité.

Soit alors $(z, \overrightarrow{v})$, un élément quelconque de $T^1\mathbb{H}$ et $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in$ PSL(2,$\mathbb{R}$).

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (z, \overrightarrow{v}) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\overrightarrow{v}}{(cz+d)^2} \right).$$

Dire que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (z, \overrightarrow{v}) = (z, \overrightarrow{v})$$

signifie que

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

et

$$\frac{1}{(cz+d)^2} = 1.$$

Donc $cz+d = 1$ et $az+b = z$.

Par ces relations, on en déduit que $a = 1, b = 0, c = 0$ et $d = 1$. ■

Le groupe SL(2,$\mathbb{R}$) agit transitivement, à gauche, sur $\mathbb{H}$.

Le sous-groupe de SL(2,$\mathbb{R}$)

$$SO(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : \quad a^2+b^2 = 1, \right\}$$

qui est le groupe de rotation du plan euclidien fixe $i \in \mathbb{H}$ [7].

L'action de SO(2,$\mathbb{R}$) sur le cercle unité du plan tangent à i est aussi transitive, donc

SL(2,$\mathbb{R}$) agit transitivement sur le fibré unitaire tangent [19].
Le stabilisateur de $(i,(0,1))$ est $\{-I,I\}$. Comme $\{-I,I\}$ est un groupe distingué dans SL(2,$\mathbb{R}$), il stabilise tout élément $(z,v) \in T^1\mathbb{H}$.
Le fibré unitaire tangent s'identifie à PSL(2,$\mathbb{R}$)=SL(2,$\mathbb{R}$)$/\{-I,I\}$.

Pour tout $(z,\overrightarrow{v}) \in T^1\mathbb{H}$, il existe une unique géodésique passant par le point z et tangent en z à $\overrightarrow{v}$ et pour toute géodésique passant par un point $z \in \mathbb{H}$, il existe une unique paire de vecteurs opposés $\overrightarrow{v_-}, \overrightarrow{v_+} \in T^1\mathbb{H}$ qui engendre la géodésique.
La géodésique γ dans $\mathbb{H}$ est entièrement déterminée par son vecteur tangent $\overrightarrow{v} \in T^1\mathbb{H}$, avec $\overrightarrow{v} = \dot{\gamma}(0)$.
Si γ est géodésique et pour s réel, l'application

$$\begin{aligned} \gamma^s : \mathbb{R} &\to \mathbb{H} \\ t &\mapsto \gamma(t+s) \end{aligned}$$

est aussi une géodésique.

Définition 3.1 *Pour un réel t donné, on définit un difféomorphisme du fibré tangent TM*

$$\phi_t : TM \to TM$$

comme suit

$$\phi_t(z,\overrightarrow{v}) = (\gamma(z,\overrightarrow{v})(t), \dot{\gamma}(z,\overrightarrow{v})(t))$$

où $\gamma(z,\overrightarrow{v})$ est la courbe de M passant par z et tangente à $\overrightarrow{v}$ telle que $\gamma(z,\overrightarrow{v})(0) = z$ et $\dot{\gamma}(z,\overrightarrow{v})(0) = \overrightarrow{v}$.
La famille de difféomorphisme $\phi(t)$ est un flot c'est-à-dire, elle vérifie

$$i) \quad \phi_0 = I \in M$$

$$ii) \quad \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s, \quad \forall \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

Définition 3.2 *Soit* $(z, \overrightarrow{v}) \in T\mathbb{H}$ *et* $\gamma : \mathbb{R} \to T^1\mathbb{H}$ *l'unique géodésique de* $\mathbb{H}$ *telle que* $\gamma(0) = z \in \mathbb{H}$ *et* $\dot{\gamma}(0) = \overrightarrow{v}$ *parcourue à vitesse constante égale 1, le flot géodésique est défini par*

$$\phi_t(z, \overrightarrow{v}) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)).$$

La courbe

$$t \mapsto e^t i = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{bmatrix} (i)$$

est une géodésique γ dans $\mathbb{H}$.

Pour $g \in$PSL(2,$\mathbb{R}$),

$$g \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{bmatrix} (i)$$

est aussi une géodésique dans $\mathbb{H}$.

L'action du flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}$ correspond à l'action à droite du sous-groupe à un paramètre [2]

$$G = \left\{ g_t = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\} sur PSL(2, \mathbb{R}).$$

Pour montrer cela, considérons la géodésique $\gamma(t) = e^t i \in \mathbb{H}$. Pour tout élément $g_t \in G$, il est clair que $g_t(z) = e^t z$ pour $z \in \mathbb{H}$.

En prenant $z = i$, $g_t(i) = \gamma(t)$.

Soit alors ϕ_t, le flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}$ au temps t, et $\dot{\gamma}(0) = I \in$PSL(2,$\mathbb{R}$) ;

$\phi_t(I) = g_t = I g_t$.

Vue que les isométries préservent le flot géodésique et que les éléments de PSL(2,$\mathbb{R}$) agissent multiplicativement à gauche par isométrie à PSL(2,$\mathbb{R}$), il en résulte que, pour tout élément $[B] \in$ PSL(2,$\mathbb{R}$), $\phi_t([B]) = [B]\phi_t(I) = [B]g_t$.

Le fibré unitaire tangent peut être parametré par la coordonnée $z = x + iy$ et l'angle θ qui décrit la direction lors du déplacement du point z par rapport à $\mathbb{R}$ sur une géodésique. Si on considère

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}),$$

une transformation de z, la transformation de θ est obtenue en considérant le déplacement infinitésimal $z + dz$ et est donnée par $\theta \mapsto \theta - 2arg(cz + d)$.

Une transformation particulière nous permet d'établir une relation bijective entre les éléments de PSL(2,$\mathbb{R}$) et les points vecteurs de $T^1\mathbb{H}$.

Pour ce faire considérons une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\in$SL(2,$\mathbb{R}$).

La décomposition de IWASAWA [17] : pour tout élément de SL(2,$\mathbb{R}$), il existe une unique décomposition telle que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} : \quad z = x + iy \in \mathbb{H}, \theta \in [0, 2\pi).$$

Exprimons x, y et θ en fonction de a, b, c, d.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y^{\frac{1}{2}} & xy^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{\theta}{2}) - xy^{-\frac{1}{2}}\sin(\frac{\theta}{2}) & y^{\frac{1}{2}}\sin(\frac{\theta}{2}) + xy^{-\frac{1}{2}}\cos(\frac{\theta}{2}) \\ -y^{-\frac{1}{2}}\sin(\frac{\theta}{2}) & y^{-\frac{1}{2}}\cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De cette égalité matricielle, on en tire que,

d'une part,

$$c = -y^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.1}$$

$$d = y^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.2}$$

$$\Rightarrow c^2 = y^{-1} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.3}$$

$$d^2 = y^{-1}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{3.4}$$

de 3.3 et 3.4 on a que

$$y = \frac{1}{c^2+d^2};$$

d'autre part,

$$a = y^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - xy^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$b = y^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + xy^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Or,

$$\begin{aligned}
y^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= y\left(y^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= yd \\
&= \frac{d}{c^2+d^2} \\
y^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= -y\left(-y^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= -yc \\
&= \frac{-c}{c^2+d^2}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$x = \frac{(a+b)(c^2+d^2)-(d-c)}{(c^2+d^2)(c+d)}. \tag{3.5}$$

Par hypothèse, $ad - bc = 1$ cela implique que

$$ad = bc + 1 \tag{3.6}$$

et

$$bc = ad - 1 \tag{3.7}$$

La substitution de 3.6 et 3.7 dans le développement de 3.5 nous amène à

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}. \tag{3.8}$$

Exprimons θ maintenant. En multipliant par i membre à membre la relation 3.1 et en additionnant avec 3.2, on a

$$\begin{aligned}
d + ci &= y^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= y^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) \\
&= |d + ci|e^{-i\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
-\frac{\theta}{2} &= arg(d + ci) \\
\Rightarrow \theta &= -2arg(d + ci).
\end{aligned}$$

Les relations ainsi trouvées montrent que chaque élément de PSL(2,$\mathbb{R}$) peut être exprimé comme élément de $T^1\mathbb{H}$. Il est à noter que l'élément de PSL(2,$\mathbb{R}$) correspondant à l'élément $(z, \theta) = (i, 0)$ de $T^1\mathbb{H}$ est la matrice identité.

En effet, les relations ci-haut établies nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
z &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{i}{c^2 + d^2}, \\
\theta &= -2arg(d + ci).
\end{aligned}$$

Dans ses conditions ; pour $(z, \theta) = (i, 0) \in T^1\mathbb{H}$, on a les relations suivantes :

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = 0 \tag{3.9}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2 + d^2} &= 1 \\
\Leftrightarrow c^2 + d^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Or, $\theta = 0$ implique que $arg(d + ci) = 0$.

Puisque

$$d + ci = |d + ci|e^{i(arg(d+ci))},$$

on a que

$$d + ci = |d + ci|$$
$$\Rightarrow c = 0.$$

Et donc $d = 1$.

De plus $a = 1$ car $ad - bc = 1$. De 3.9 on a $b = 0$

D'où

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Représentons le demi-axe positive des imaginaire par $ie^t, \quad t \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de points $(ie^t, 0) \in T^1\mathbb{H}$ est représenté par

$$\begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{bmatrix}$$

dans PSL(2,$\mathbb{R}$).

En effet, par raisonnement analogue que précédemment, on a $c = b = 0$, $a = e^{\frac{t}{2}}$ et $d = e^{-\frac{t}{2}}$.

L'élément $(z, \theta) \in T^1\mathbb{H}$, décrit de façon générale, correspond à l'isométrie qui envoie $(i, 0)$ à (z, θ).

Soit $\overrightarrow{v} \in T^1\mathbb{H}$, $z \in \mathbb{H}$ et γ_z l'unique géodésique passant par z telle que $\gamma_z(0) = z$ et $\dot{\gamma_z}(0) = \overrightarrow{v}$. Posons θ, l'angle que fait la géodésique unitaire verticale d'équation $a + ibe^t$ avec γ_z.

Pour tout élément $\overrightarrow{v}$, il existe l'unique paire $(z, \theta) \in \mathbb{H} \times S^1$ caractérisant $\overrightarrow{v}$, et donc $T^1\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathbb{H} \times S^1$. Sur le cercle unité dans $\mathbb{H}$ centré en z, on peut définir une métrique et cette métrique est transférable à $T^1\mathbb{H}$.

3.2 MÉTRIQUE SUR LE FIBRÉ UNITAIRE TANGENT

La notion de métrique sur une variété riemannienne étant connue et bien définie, on peut définir sur son fibré tangent, en général, et sur son fibré unitaire tangent, en particulier, une métrique.
La donnée d'une courbe γ sur la variété M nous permet de comprendre comment se fait le déplacement sur M le long de γ ; c'est-à-dire que sur la courbe $\gamma : [0, 1] \to M$, on peut analyser la façon dont l'espace tangent $T_{\gamma(t)}M$ change avec le déplacement de $\gamma(t)$.
De façon générale, le transport parallèle le long de la courbe γ par une connexion permet de construire des isomorphismes locaux entre les espaces tangents aux différents points de la courbe. En utilisant la connexion de Levi-Civita [11] , ces isométries préservent le produit intérieur sur les espaces tangents.

3.2.1 Transport parallèle

Considérons une courbe γ sur une hypersurface S de $\mathbb{R}^n$ et deux points distincts p, q sur γ correspondant à des valeurs de γ en t_0, t_1, respectivement. La dérivée covariante [12] nous permet d'associer chaque vecteur du plan tangent à la surface S au point p, T_pS, à un autre vecteur du plan tangent à la même surface S au point q, T_qS.
Soit alors $v_0 \in T_pS$ et $v(t)$ l'unique champ de vecteurs, c'est-à-dire l'unique application qui, à tout point t de l'intervalle ouvert $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^3$, associe $\overrightarrow{v}(t) \in T_{\gamma(t)}S$, parallèles le long de γ tel que $v(t_0) = v_0$ et $v(t_1) = v_1$.
L'application

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma^{pq} :& T_pS \to T_qS \\ & v_0 \mapsto v_1 \end{aligned}$$

porte le nom de *transport parallèle* à partir du point p jusqu'au point q le long de γ. Signalons que si on translate un vecteur le long de γ, l'angle entre ce vecteur et le vecteur tangent à la courbe γ change si cette dernière n'est pas une droite.

Théorème 24 *Le transport parallèle* $\Pi_\gamma^{pq} : T_pS \to T_qS$ *est une application linéaire et une isométrie.*

Démonstration. La preuve est fondée sur le fait qu'un champ de vecteurs v est parallèle le long de la courbe γ de l'hypersurface S de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\frac{dv}{dt}$ est perpendiculaire au plan tangent en tout point de γ [12].
Soient, $v_0, w_0 \in T_pS$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $v(t), w(t)$ deux champs de vecteurs parallèles le long de γ tels que $v(t_0) = v_0$ et $w(t_0) = w_0$. Si $V = \lambda v + \mu w$, alors $\dot{V} = \lambda\dot{v} + \mu\dot{w}$ est parallèle à la normale unitaire N à S du fait que $\dot{v}$ et $\dot{w}$ sont parallèles à N ; et donc V est parallèle le long de γ.
Il en découle que

$$\begin{aligned}\Pi_\gamma^{pq}(\lambda v_0 + \mu w_0) &= \Pi_\gamma^{pq}(V(t_0)) = V(t_1)\\ &= \lambda v_1 + \mu w_1\\ &= \lambda\Pi_\gamma^{pq}(v_0) + \mu\Pi_\gamma^{pq}(w_0).\end{aligned}$$

Pour montrer l'isométrie, notons que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(v.w) &= \dot{v}.w + v\dot{w}\\ &= ((\dot{v}.N)N).w + v.((\dot{w}.N)N) = 0.\end{aligned}$$

Comme v et w sont dans le plan tangent à la surface, on a que $v.N = w.N = 0$.
Donc $v_0.w_0 = v_1.w_1$.
Finalement, Π_γ^{pq} préserve le produit scalaire et donc les longueurs et les angles. ∎

3.2.2 Symboles de Christoffel et métrique riemannienne

Soit M, une variété riemannienne munie de sa métrique $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$.
Il existe une connexion unique sans torsion compatible avec la métrique ds^2 ; la connexion de Levi-Civita, ayant pour expression

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} \sum_m g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

avec g^{ij}, l'inverse de g_{ij}.
Les Γ_{kl}^i sont connus sous le nom de *symboles de Christoffel* et $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$.
En considérant

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

la métrique définie sur M ;

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

et donc

$$|g_{ij}| = EG - F^2.$$

L'inverse de g_{ij}, notée ici g^{ij} est :

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{G}{EG-F^2} & \frac{-F}{EG-F^2} \\ \frac{-F}{EG-F^2} & \frac{E}{EG-F^2} \end{bmatrix}.$$

Pour calculer les symboles de Christoffel, il nous faut :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u},$$

et

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{11}}{\partial u} &= \frac{\partial E}{\partial u} = E_u;\\
\frac{\partial g_{12}}{\partial u} &= \frac{\partial g_{21}}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} = F_u;\\
\frac{\partial g_{22}}{\partial u} &= \frac{\partial G}{\partial u} = G_u
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{11}}{\partial v} &= \frac{\partial E}{\partial v} = E_v;\\
\frac{\partial g_{12}}{\partial v} &= \frac{\partial g_{21}}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial v} = F_v;\\
\frac{\partial g_{22}}{\partial v} &= \frac{\partial G}{\partial v} = G_v.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\sum_m g^{1m}\left(\frac{\partial g_{1m}}{\partial u} + \frac{\partial g_{1m}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^m}\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{G}{EG-F^2}\right)\left(E_u\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-F}{EG-F^2}\right)\left(2F_u - E_v\right)\\
&= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2}\sum_m g^{m1}\left(\frac{\partial g_{m2}}{\partial v} + \frac{\partial g_{1m}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^m}\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{G}{EG-F^2}\right)\left(E_v\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-F}{EG-F^2}\right)\left(G_u\right)\\
&= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\sum_m g^{1m}\left(\frac{\partial g_{m2}}{\partial v} + \frac{\partial g_{m2}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{G}{EG-F^2}\right)\left(2F_v - G_u\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-F}{EG-F^2}\right)\left(G_v\right) \\
&= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}\sum_m g^{2m}\left(\frac{\partial g_{m1}}{\partial u} + \frac{\partial g_{m1}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-F}{EG-F^2}\right)\left(E_u\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{E}{EG-F^2}\right)\left(2F_u - E_v\right) \\
&= \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2}\sum_m g^{2m}\left(\frac{\partial g_{m1}}{\partial v} + \frac{\partial g_{m2}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-F}{EG-F^2}\right)\left(E_v\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{E}{EG-F^2}\right)\left(G_u\right) \\
&= \frac{-FE_v + EG_u}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}\sum_m g^{2m}\left(\frac{\partial g_{m2}}{\partial v} + \frac{\partial g_{m2}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-F}{EG-F^2}\right)\left(2F_v - G_u\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{E}{EG-F^2}\right)\left(G_v\right) \\
&= \frac{-2FF_v + FG_u + EG_v}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}$$

Considérons le cas $M = \mathbb{H}$, on a

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2},$$

pour $z = u + iv \in \mathbb{H}$.
Il s'en suit que

$$E = G = \frac{1}{v^2}, \quad F = 0.$$

Ce qui implique que

$$E_u = G_u = F_u = 0$$
$$E_v = G_v = -\frac{2}{v^3}.$$

Donc

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0;$$
$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\frac{1}{v^2}\left(\frac{-2}{v^3}\right)}{2\left(\frac{1}{v^4}\right)} = -\frac{1}{v};$$
$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{\frac{1}{v^2}\left(\frac{-2}{v^3}\right)}{2\left(\frac{1}{v^4}\right)} = \frac{1}{v};$$
$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{1}{v^2}\left(\frac{-2}{v^3}\right)}{2\left(\frac{1}{v^4}\right)} = -\frac{1}{v}.$$

3.2.3 Métrique riemannienne sur le fibré tangent au fibré tangent : TTM

Soit M, une variété riemannienne de dimension n muni de sa métrique et ∇ la connexion de Levi-Civita compatible avec la métrique riemannienne g de M. L'espace tangent de TM au point $(x, \overrightarrow{v}) \in TM$ se décompose en somme directe de deux sous-espaces : *sous-espace horizontal* et *sous-espace vertical* [6] comme suit :

$$T_{(x,\overrightarrow{v})}TM = \mathcal{H}_{(x,\overrightarrow{v})} \bigoplus \mathcal{V}_{(x,\overrightarrow{v})}.$$

Soit $U \subset M$ un voisinage du point $x \in M$ et $\pi : TM \to M$ la projection naturelle sur M, c'est-à-dire pour tout $(x, \overrightarrow{v}) \in TM, \quad \pi(x, \overrightarrow{v}) = x$.

Un système de coordonnées locales $(U, x_i, i = 1, \cdots, n)$ dans M induit sur TM un nouveau système de coordonnées locales $(\pi^{-1}(U), x_i, v^i, i = 1, \cdots, n)$.

L'expression locale de tout champ de vecteurs X sur M dans U étant $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, *le transport horizontal* et *le transport vertical* de X, notés, respectivement, X^h et X^v ; sont donnés par

$$X^h = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i,j,k} \Gamma^i_{jk} v^j X^k \frac{\partial}{\partial v^i};$$
$$X^v = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Supposons que la métrique riemannienne de M est donnée, dans U, par

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i dx^j.$$

Alors, la métrique riemannienne de TM qu'on appelle *métrique de SASAKI* est donnée , dans $\pi^{-1}(U)$ par [14]

$$d\sigma^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i dx^j + \sum_{i,j} g_{ij}(x) Dv^i Dv^j$$

avec

$$Dv^i = dv^i + \sum_{l,k} \Gamma^i_{kl} v^k dx^l.$$

3.3 Calcul de la métrique sur $T^1\mathbb{H}$

Considérons

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2,\mathbb{R})$$

et

$$(z, \overrightarrow{v}) \in T^1\mathbb{H}.$$

tels que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (z, \overrightarrow{v}) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\overrightarrow{v}}{(cz+d)^2} \right).$$

Un chemin γ de $T^1\mathbb{H}$ s'écrit, dans ces conditions, comme suit

$$\gamma(t) = \left(\frac{a(t)z+b(t)}{c(t)z+d(t)}, \frac{\overrightarrow{v}}{(c(t)z+d(t))^2} \right)$$

avec $z \in \mathbb{H}$. D'une part,

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= \frac{a(t)z+b(t)}{c(t)z+d(t)} \\
&= \frac{(a(t)z+b(t))(c(t)\bar{z}+d(t))}{(c(t)z+d(t))(c(t)\bar{z}+d(t))} \\
&= \frac{(a(t)z+b(t))(c(t)\bar{z}+d(t))}{|c(t)z+d(t)|^2} \\
&= \frac{a(t)c(t)z\bar{z}+a(t)d(t)z+b(t)c(t)\bar{z}+b(t)d(t)}{|c(t)z+d(t)|^2} \\
&= \frac{a(t)c(t)z\bar{z}+b(t)d(t)+(a(t)d(t)+b(t)c(t))Re(z)}{|c(t)z+d(t)|^2} + i\frac{(a(t)d(t)-b(t)c(t))Im(z)}{|c(t)z+d(t)|^2} \\
&= \frac{a(t)c(t)z\bar{z}+b(t)d(t)+(a(t)d(t)+b(t)c(t))Re(z)}{|c(t)z+d(t)|^2} + i\frac{Im(z)}{|c(t)z+d(t)|^2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= (\tilde{x}, \tilde{y}) \\
&= \left(\frac{a(t)c(t)z\bar{z}+b(t)d(t)+(a(t)d(t)+b(t)c(t))Re(z)}{|c(t)z+d(t)|^2}, \frac{Im(z)}{|c(t)z+d(t)|^2} \right).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\tilde{v}} &= \frac{\overrightarrow{v}}{(c(t)z+d(t))^2}\\
&= \frac{\overrightarrow{v}(c(t)\bar{z}+d(t))^2}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}\\
&= \frac{\overrightarrow{v}(c^2(t)(Re(z)-iIm(z))^2+2c(t)d(t)(Re(z)-iIm(z))+d^2(t)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}\\
&= \frac{\overrightarrow{v}[c^2(t)((Re(z))^2-((Im(z))^2)+2c(t)d(t)Re(z)+d^2(t)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}\\
&- 2i\frac{\overrightarrow{v}[c^2(t)Re(z)Im(z)+c(t)d(t)Im(z)]}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}.
\end{aligned}$$

Puisque $\overrightarrow{v} = (v^1\frac{\partial}{\partial x} + iv^2\frac{\partial}{\partial y})$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left(v^1\frac{\partial}{\partial x}+iv^2\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{c^2(t)((Re(z))^2-(Im(z))^2)+2c(t)d(t)Re(z)+d^2(t)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}\\
&-2i\left(v^1\frac{\partial}{\partial x}+iv^2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{c^2(t)Re(z)Im(z)+c(t)d(t)Im(z)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}\right).\\
&=\frac{c^2(t)((Re(z))^2-(Im(z))^2)+2c(t)d(t)Re(z)+d^2(t)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}v^1\frac{\partial}{\partial x}\\
&-2i\frac{c^2(t)Re(z)Im(z)+c(t)d(t)Im(z)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}v^1\frac{\partial}{\partial x}\\
&+i\frac{c^2(t)((Re(z))^2-(Im(z))^2)+2c(t)d(t)Re(z)+d^2(t)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}v^2\frac{\partial}{\partial y}\\
&+2\frac{c^2(t)Re(z)Im(z)+c(t)d(t)Im(z)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}v^2\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^1 &= \frac{c^2(t)((Re(z))^2-(Im(z))^2)+2c(t)d(t)Re(z)+d^2(t)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}v^1\\
&+2\frac{c^2(t)Re(z)Im(z)+c(t)d(t)Im(z)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}v^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^2 &= \frac{c^2(t)((Re(z))^2-(Im(z))^2)+2c(t)d(t)Re(z)+d^2(t)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}v^2\\
&-2\frac{c^2(t)Re(z)Im(z)+c(t)d(t)Im(z)}{|(c(t)z+d(t))^2|^2}v^1.
\end{aligned}$$

Exemple 5 Considérons le cas où $z = i$; $\overrightarrow{v} = (1,0)$ et $\begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$.

En considérant $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ tel que

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} (i, (1,0)) = (\tilde{z}, \overrightarrow{\tilde{v}}).$$

On a : $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = 1$

$$\tilde{v}^1 = \cos^2(t) - \sin^2(t),$$

et

$$\tilde{v}^2 = 2\sin(t)\cos(t).$$

Donc

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} (i, (1,0)) = (i, (\cos^2(t) - \sin^2(t), 2\sin(t)\cos(t)).$$

Il est à noter que

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \left(i, \frac{(1,0)}{(-i\sin(t) + \cos(t))^2} \right) \\ &= \left(i, \frac{(1,0)}{e^{-2it}} \right) \\ &= (i, e^{2it}). \end{aligned}$$

Pour $\overrightarrow{v} = e^{ia}$, $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \left(i, \frac{e^{ia}}{e^{-2it}} \right) \\ &= (i, e^{(a+2t)i}). \end{aligned}$$

La restriction de $d\tilde{s}^2$ sur $\gamma(t)$, $d\tilde{s}^2|_{\gamma(t)}$ est nulle.

Or $d\tilde{x}^k = 0$ pour tout k et

$$D\tilde{v}^1 = d\tilde{v}^1 + \sum_{l,k} \Gamma^1_{lk} \tilde{v}^l d\tilde{x}^k.$$

Ce qui implique que

$$\sum_{l,k} \Gamma^1_{lk} \tilde{v}^l d\tilde{x}^k = 0.$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} d\tilde{v}^1 &= d(\cos^2(t) - \sin^2(t)) \\ &= -4\sin(t)\cos(t)dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D\tilde{v}^1 &= d\tilde{v}^1 \\ D\tilde{v}^2 &= d\tilde{v}^2. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma}^2 &= g_{11} D\tilde{v}^1 D\tilde{v}^1 + g_{22} D\tilde{v}^2 D\tilde{v}^2 \\ &= g_{11}(d\tilde{v}^1)^2 + g_{22}(d\tilde{v}^2)^2. \end{aligned}$$

Puis que

$$\begin{aligned} d\tilde{v}^1 &= d(\cos^2(t) - \sin^2(t)) \\ &= -4\sin(t)\cos(t)dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\tilde{v}^2 &= d(2\sin(t)\cos(t)) \\ &= 2(\cos^2(t) - \sin^2(t))dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{1}{\tilde{y}^2}(-4\sin(t)\cos(t)dt)^2 + \frac{1}{\tilde{y}^2}(2(\cos^2(t) - \sin^2(t))dt)^2 \\ &\frac{1}{\tilde{y}^2}(-2\sin(2t)dt)^2 + (2\cos(2t)dt)^2) \\ &= \frac{4}{\tilde{y}^2}dt^2. \end{aligned}$$

Considérons le cas de $M = \mathbb{H}$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{H}$, on a :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Alors

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$$
$$g_{12} = g_{21} = 0$$

Cela implique que

$$d\sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \frac{1}{y^2}(Dv^1Dv^1 + Dv^2Dv^2).$$

Comme

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$$
$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y},$$

on a :

$$Dv^1 = dv^1 - \frac{1}{y}(v^1dy + v^2dx),$$
$$Dv^2 = dv^2 + \frac{1}{y}(v^1dx + v^2dy).$$

Soit γ une courbe de $\mathbb{H}$. On peux écrire $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.
Donc $\dot{\gamma}(t) = \frac{d(\gamma)}{dt}$ est le vecteur $\overrightarrow{v}$ tangent au point $\gamma(t)$.
On a :

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}, \dot{y}) = (v^1, v^2).$$

Il en résulte que

$$Dv^1 = d\dot{x} - \frac{1}{y}(\dot{x}dy + \dot{y}dx),$$
$$Dv^2 = d\dot{y} + \frac{1}{y}(\dot{x}dx - \dot{y}dy).$$

Cela implique que

$$
\begin{aligned}
Dv^1Dv^1 &= (d\dot{x} - \frac{1}{y}(\dot{x}dy + \dot{y}dx))^2 \\
&= d\dot{x}^2 - \frac{2}{y}(\dot{x}dy + \dot{y}dx)d\dot{x} + \frac{1}{y^2}(\dot{x}dy + \dot{y}dx)^2, \\
Dv^2Dv^2 &= (d\dot{y} + \frac{1}{y}(\dot{x}dx - \dot{y}dy))^2 \\
&= d\dot{y}^2 + \frac{2}{y}(\dot{x}dx - \dot{y}dy)d\dot{y} + \frac{1}{y^2}(\dot{x}dx - \dot{y}dy)^2.
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
d\sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \frac{d\dot{x}^2 + d\dot{y}^2}{y^2} + \frac{2}{y^3}((\dot{x}dx - \dot{y}dy)d\dot{y} - (\dot{x}dy + \dot{y}dx)d\dot{x}) \\
+ \frac{1}{y^4}((\dot{x}dy + \dot{y}dx)^2 + (\dot{x}dx - \dot{y}dy)^2).
\end{aligned}
$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, comme point de départ, nous avons présenté des concepts conduisant à la définition de variété différentiable M dans le cas général et un exemple d'une variété a été donné. Sur M on a discuté de la notion de vecteur tangent à une courbe donnée de M et cette notion nous a permis de dégager la définition du fibré tangent à la variété M. En introduisant la notion de métrique riemannienne, la métrique adoptée tout le long de ce travail, la variété riemannienne a été définie. Le sujet de ce mémoire nous a poussé à évoquer les concepts de la géométrie hyperbolique et un accent particulier a été mis sur le calcul de la longueur hyperbolique de la courbe ainsi que la détermination de la distance hyperbolique entre deux points donnés. Les transformations de Möbius, qui nous sont utiles lors de la détermination des isométries hyperboliques n'ont pas manqué bien que ces dernières n'ont pas été profondément discutées. Ceux qui voudront mieux comprendre peuvent consulter [1].

Tous les outils étant mis en place, le deuxième chapitre axé sur le géométrie du plan hyperbolique a été abordé et développé en utilisant le modèle de demi-plan de Poincaré. Pour se rendre du point A au point B dans l'espace, il faut déterminer le chemin à suivre, de préférence le chemin le plus court : géodésique. Dans ce mémoire, on a utilisé les équations de géodésiques pour montrer que les géodésiques hyperboliques sont des demi-droites orthogonales à $\mathbb{R}$ et les demi-cercles centrés sur $\mathbb{R}$. Dans des ouvrages consultés on y a trouvé diverses expressions, bien évidemment équivalentes, de la distance hyperbolique entre deux points donnés. Dans ce chapitre deux de ces expressions ont été évoquées et démontrées. Dans ce même chapitre on a dégagé et discuté en long et en large le groupe d'isométries de de $\mathbb{H}$.

Dans le dernier chapitre de ce travail, nous avons étudié l'action libre et transitive de PSL(2,$\mathbb{H}$) sur $T^1\mathbb{H}$ et en se servant de la décomposition d'Iwasawa on a élaboré, de façon détaillée, les formules permettant d'exprimer, de façon unique, tout élément de PSL(2,$\mathbb{H}$) en fonction d'éléments de $T^1\mathbb{H}$. Nous avons établi les relations entre les symboles de Christoffel et les coefficients de la première forme fondamentale et ces derniers nous ont permis d'étudier la métrique de Sasaki. Ce travail peut être poursuivi en étudiant d'autres métriques que celle de Sasaki.

En terminant, nous espérons que ce mémoire pourra susciter, auprès du lecteur, l'intérêt d'approfondir cette notion ou d'aborder d'autres sujets de recherche liés à ce sujet.

Bibliographie

[1] James Anderson. *Hyperbolic geometry.* Springer Science & Business Media, 2006.

[2] Nicolas Bergeron. *Le spectre des surfaces hyperboliques.* Harlequin, 2011.

[3] Jens Bolte and Frank Steiner. *Hyperbolic geometry and applications in quantum chaos and cosmology.* Number 397. Cambridge University Press, 2012.

[4] Jerome Buzzi. Systemes dynamiques applications en geometrie et theorie des nombres. 2011.

[5] Bennett Chow, Sun-Chin Chu, David Glickenstein, Christine Guenther, Jim Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, and Lei Ni. *The Ricci flow : techniques and applications.* Number 135. American Mathematical Society, 2010.

[6] HM Dida and A Ikemakhen. A class of metrics on tangent bundles of pseudo-riemannian manifolds. *Arch. Math.(Brno)*, 47 :293–308, 2011.

[7] Manfred Einsiedler and Thomas Ward. *Ergodic Theory.* Springer, 2013.

[8] Svetlana Katok. *Fuchsian groups.* University of Chicago press, 1992.

[9] Wolfgang Kühnel. *Differential geometry*, volume 77. American Mathematical Soc., 2015.

[10] John M Lee. *Riemannian manifolds : an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006.

[11] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171. Springer, 2006.

[12] Andrew N Pressley. *Elementary differential geometry.* Springer Science & Business Media, 2010.

[13] John Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149. Springer Science & Business Media, 2006.

[14] Shigeo Sasaki. On the differential geometry of tangent bundles of riemannian manifolds ii. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 14(2) :146–155, 1962.

[15] Patrice Sawyer. Géométrie hyperbolique pour les non-initié. 2004.

[16] John Stillwell. *Geometry of surfaces.* Springer Science & Business Media, 2012.

[17] Mitsuo Sugiura. *Unitary representations and harmonic analysis : an introduction*, volume 44. Elsevier, 1990.

[18] Marc Troyanov. *Cours de géométrie.* Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009.

[19] Christian Weiß. *Twisted Teichmüller Curves.* Springer, 2014.