Calcul de la puissance annulatrice du radical à partir du carquois ordinaire

par

Marion Henry

mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M. Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, décembre 2015

Le 18 décembre 2015,

le jury a accepté le mémoire de Madame Marion Henry
dans sa version finale.

Membres du jury :

Professeur Ibrahim Assem
Directeur de recherche
Département de mathématiques

Professeure Vasilisa Shramchenko
Membre interne
Département de mathématiques

Professeur Thomas Brüstle
Membre interne
Département de mathématiques

Professeur Shiping Liu
Président-rapporteur
Département de mathématiques

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, on commence par introduire le radical de la catégorie mod A pour une algèbre donnée A de dimension finie sur un corps algébriquement clos, avant d'en définir la puissance annulatrice dans le cas où A est de représentation finie. On calcule ensuite cette puissance annulatrice en fonction du nombre de cordes dans le carquois ordinaire Q_A, dans le cas où A est une algèbre inclinée itérée de type $\mathbb{A}$.

Mots-clés : Catégorie de modules, radical, degré, puissance annulatrice, corde, algèbre inclinée itérée de type $\mathbb{A}$.

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à remercier mon directeur de recherche, Dr. Ibrahim Assem, pour ses encouragements à intégrer le groupe de recherche en algèbre de l'Université de Sherbrooke puis pour sa disponibilité, son grand soutien autant professionnel que personnel et les nombreuses discussions mathématiques tout au long de mes études de maîtrise. Je tiens aussi à souligner la disponibilité de Dr. Shiping Liu que j'ai sollicité à plusieurs reprises durant mes travaux de recherche.

J'aimerais également remercier Dr. Ibrahim Assem ainsi que le département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke pour leur précieux soutien financier.

Enfin, je tiens à remercier mes collègues du département de mathématiques et le groupe de recherche en algèbre pour leur appui et les divers moments de partage durant ces deux années de maîtrise, ainsi que ma famille et mes amis pour leur indispensable soutien durant mes études à Sherbrooke.

Marion Henry

Sherbrooke, novembre 2015

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Étant donné un corps algébriquement clos $\mathbf{k}$ et une $\mathbf{k}-$algèbre A de dimension finie, on sait que A est de représentation finie si et seulement si le radical $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ de la catégorie $\operatorname{mod} A$ des $A-$modules à droite de type fini est nilpotent, ou, de façon équivalente, si et seulement si $\operatorname{rad}^\infty(\operatorname{mod} A) = 0$. Ce résultat aujourd'hui bien connu de la théorie d'Auslander a été prouvé au début des années 1990 par O. Kerner et A. Skowroński [25]. Dans ce cas, on appelle *puissance annulatrice* l'indice de nilpotence de $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$. Un autre fait bien connu est l'existence d'une relation très étroite entre les morphismes irréductibles et le radical d'une catégorie de modules. Ce résultat, publié pour la première fois en 1982 par R. Bautista [9], mentionne qu'un morphisme entre deux $A-$modules indécomposables X et Y est irréductible si et seulement s'il appartient à l'espace $\operatorname{rad}_A(X,Y)\backslash \operatorname{rad}^2_A(X,Y)$. Sachant que, si A est de représentation finie, tout morphisme entre $A-$modules indécomposables s'écrit comme une somme de composées de morphismes irréductibles, si $\operatorname{rad}^n_A(X,Y) = 0$, on en déduit que toute composée de plus de n morphismes entre X et Y est nulle. Ainsi, l'étude du radical de la catégorie $\operatorname{mod} A$, en particulier le calcul de sa puissance annulatrice, nous procure une meilleure connaissance de cette catégorie.

Pour tout $A-$module indécomposable X de type fini, on note $l(X)$ sa longueur, c'est-à-dire la longueur d'une suite de composition de X. Si A est de représentation finie, soit $b = \max\{l(X) \mid X \in (\operatorname{mod} A)_0\}$. Alors, en vertu du lemme de Harada et Sai ([5], lemme IV.5.2), on a que $\operatorname{rad}_A^{2^b-1}(X,Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \operatorname{mod} A$. En d'autres termes, la puissance annulatrice de $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ est bornée supérieurement par l'entier $2^b - 1$. Une borne plus fine a été obtenue en 1998 par D. Eisenbud et J.A. de La Peña [20]. Cette borne dépend cependant encore de la longueur maximale des $A-$modules indécomposables. Ce n'est qu'en 2012 que C. Chaio [13] donne la valeur exacte de la puissance annulatrice de $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ en fonction des degrés de la projection $I \twoheadrightarrow I/\operatorname{soc}(I)$ et de l'inclusion $\operatorname{rad}(P) \hookrightarrow P$ où I et P parcourent l'ensemble des $A-$modules injectifs et projectifs indécomposables non simples.

Le degré d'un morphisme irréductible, notion introduite en 1992 par S. Liu [26], se visualise facilement sur le carquois d'Auslander-Reiten Γ_A de A dans le cas où A est une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie vérifiant la propriété $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$. L'objectif de ce mémoire est de pouvoir obtenir la valeur des degrés de la projection $I \twoheadrightarrow I/\operatorname{soc} I$ et de l'inclusion $\operatorname{rad} P \hookrightarrow P$, et ainsi en déduire la valeur de la puissance annulatrice du radical, directement à partir du carquois ordinaire si A est une $\mathbf{k}-$algèbre inclinée itérée de type $\mathbb{A}$. On démontre le résultat suivant : soit A une $\mathbf{k}-$algèbre inclinée itérée de type $\mathbb{A}$ de carquois ordinaire $Q_A = (Q_0, Q_1, s, b)$ et, pour tout $a \in Q_0$, soit x_a le nombre de cordes de source a, alors la puissance annulatrice de $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ est $N = \max\{x_a + 1 \mid a \in Q_0\}$.

Le premier chapitre est consacré à quelques rappels sur les catégories, plus spécifiquement sur la catégorie $\operatorname{mod} A$, ainsi que sur la théorie d'Auslander-Reiten. Ensuite, le deuxième chapitre est dédié à étudier la notion de degré d'un morphisme irréductible. La définition de cet invariant a été motivée par le problème de savoir quand une composée non nulle de n morphismes irréductibles entre $A-$modules indécomposables appartient à la $(n+$

1)$-$ième puissance de rad(mod A). Ce problème a été résolu par S. Liu si les morphismes en question appartiennent à un chemin pré-sectionnel et ce dernier à également obtenu une description de la forme de certaines composantes connexes du carquois d'Auslander-Reiten d'algèbres de représentation infinie, en particulier la forme des composantes semi-stables ne contenant pas de cycles orientés (voir [27]). Nous donnons ici la définition formelle et quelques résultats importants sur les degrés des morphismes irréductibles en nous appuyant principalement sur les travaux de C. Chaio, S. Liu et al. (voir [13], [14], [15], [16], [17] [18], [19] et [26]). Enfin, le troisième et dernier chapitre contient le résultat principal de ce mémoire. On commence par y étudier en toute généralité les algèbres de cordes de représentation finie en s'appuyant sur le travail de M.C.R. Brener et C.M. Butler [10] dont nous utilisons la description des modules indécomposables sur celles-ci ainsi que celle des suites presque scindées, puis on y présente l'intérêt de considérer en particulier les algèbres inclinées itérées de type $\mathbb{A}$ avant d'énoncer et démontrer le résultat mentionné précédemment.

CHAPITRE 1

Prérequis sur le radical

Soit **k** un corps algébriquement clos. Dans ce chapitre, toutes les algèbres sont des **k**−algèbres de dimension finie et tous les modules sont des modules à droite sur une algèbre.

1.1 Radical d'une algèbre

Soient A une **k**-algèbre et M un $A-$module. Par définition, le radical $\mathrm{rad}(M)$ de M est l'intersection de tous les sous-modules maximaux de M. Le radical de M est ainsi le plus petit sous-module N de M tel que le module quotient M/N soit semisimple. Le lemme suivant donne une autre caractérisation du radical d'un module.

Lemme 1.1. *Soit M un $A-$module. Son radical $\mathrm{rad}(M)$ est égal à l'intersection des noyaux de tous les morphismes $f : M \longrightarrow S$ où S parcourt l'ensemble de tous les $A-$modules simples.*

Démonstration. Voir [1], lemme VII.1.1. $\square$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.2. *Soient M, N deux $A-$modules et $f : M \longrightarrow N$ une application $A-$linéaire. Alors, $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{rad}(N)$.*

Démonstration. En vertu du lemme 1.1, il suffit de montrer que $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$ pour toute application $A-$linéaire $g : N \longrightarrow S$ avec S simple. Soit $g : N \longrightarrow S$ une application $A-$linéaire, avec S simple. Puisque $\mathrm{rad}(M) \subseteq \mathrm{Ker}(gf)$, on a $gf(\mathrm{rad}(M)) = 0$ d'où $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. □

On s'intéresse maintenant à définir le radical d'une algèbre.

Définition 1.3. [Radical de Jacobson] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. On appelle *radical de Jacobson* de A le radical du $A-$module A_A.

Par conséquent, le radical d'une algèbre A est défini comme étant l'intersection de tous les idéaux à droite maximaux de A.

Lemme 1.4. *Soit M un $A-$module de type fini. Tout sous-module strictement contenu dans M est contenu dans un sous-module maximal. En particulier, M a des sous-modules maximaux.*

Démonstration. Voir [1], proposition II.1.6. □

Théorème 1.5. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre non nulle. Alors $\mathrm{rad}(A)$ est un idéal bilatère propre de A.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\mathrm{rad}(A)$ est un idéal bilatère de A. Par définition, $\mathrm{rad}(A_A)$ est l'intersection de tous les sous-modules maximaux de A_A. En particulier, $\mathrm{rad}(A)$ est un idéal à droite de A. Il reste à vérifier que $\mathrm{rad}(A)$ est stable pour la multiplication à gauche par des éléments de A. Soit $a \in A$, considérons l'application $A-$linéaire :

$$\begin{array}{cccc} f_a & : & A_A & \longrightarrow & A_A \\ & & x & \longmapsto & ax \end{array}$$

En vertu de la proposition 1.2, on a :

$$a(\operatorname{rad}(A_A)) = f_a\left(\operatorname{rad}(A_A)\right) \subseteq \operatorname{rad}(A_A)$$

Donc $\operatorname{rad}(A) = \operatorname{rad}(A_A)$ est bien un idéal bilatère de A. L'algèbre A étant un $A-$module de type fini, en vertu du lemme 1.4, il existe un sous-module maximal $M_A \subsetneq A_A$. Or, $\operatorname{rad}(A_A)$ étant égal à l'intersection de tous les sous-modules maximaux de A_A, on a $\operatorname{rad}(A_A) \subseteq M_A \subsetneq A_A$. Donc, $\operatorname{rad}(A_A)$ est un sous-module propre de A_A et ainsi $\operatorname{rad}(A) = \operatorname{rad}(A_A)$ est un idéal bilatère propre de A. □

Pour une $\mathbf{k}-$algèbre donnée, on notera J son radical. De plus, de même que, pour tout $A-$module M, on a que $M/\operatorname{rad} M$ est un $A-$module semisimple, on dispose de la proposition suivante :

Proposition 1.6. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie, alors $\overline{A} = A/J$ est une $\mathbf{k}-$algèbre semisimple.*

Démonstration. Voir [1], proposition VII.4.4. □

Outre sa définition, il existe plusieurs caractérisations du radical d'une algèbre. En particulier :

Théorème 1.7. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie, de radical J. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $x \in J$;

(2) $1 - xa$ *admet un inverse à droite pour tout* $a \in A$;

(3) $1 - ax$ *admet un inverse à gauche pour tout* $a \in A$.

Démonstration. L'équivalence des conditions (1) et (2) est donnée par [1], théorème VII.3.2. Montrons l'équivalence des conditions (2) et (3). Soit $x \in A$. Si $1 - xa$ admet un inverse à droite pour tout $a \in A$, alors il existe $b \in A$ tel que $(1 - xa)b = 1$. Mais alors $b = 1 + xab$ admet un inverse à droite c, d'où $1 = bc = c + xa$ implique que $c = 1 - xa$ et donc b est aussi un inverse à gauche de $1 - xa$. Alors, $(1 + abx)(1 - ax) = 1 - ax + abx - abxax = 1 - a(1 - b + bxa) = 1$, d'où $1 - ax$ est inversible à gauche. De même, si b est un inverse à gauche de $1 - ax$, alors b est aussi l'inverse à droite de $1 - ax$ et $1 + xba$ est un inverse à droite de $1 - xa$. □

Corollaire 1.8. *Soit* A *une* $\mathbf{k}-$*algèbre de dimension finie, alors* J *est le plus grand idéal bilatère* I *de* A *tel que* $1 - x$ *soit inversible pour tout* $x \in I$.

Démonstration. Tout d'abord, montrons que $1 - x$ est inversible pour tout $x \in J$. Soit $x \in J$. En vertu du théorème 1.7 avec $a = 1$, on obtient que $1 - x$ est inversible à gauche et à droite, donc inversible. Il reste à montrer que J est le plus grand idéal bilatère ayant cette propriété. Soit I un idéal bilatère de A tel que $(1-x)$ est inversible pour tout $x \in I$. Soit $x \in I$, alors $xa \in I$ pour tout $a \in A$ donc $1 - xa$ est inversible pour tout $a \in A$. Donc $x \in J$. Donc $I \subseteq J$. □

Remarque 1.9. Les conditions (2) et (3) du théorème étant symétriques, on a $J = \mathrm{rad}(A_A) = \mathrm{rad}({}_AA)$.

Définition 1.10. [Nil, nilpotent] Un élément $x \in A$ est dit *nilpotent* s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^m = 0$. Un idéal I de A est dit *nil* si tout élément de I est nilpotent. De plus, l'idéal I est lui-même dit *nilpotent* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n = 0$.

On remarque que tout idéal nilpotent est nil.

Corollaire 1.11. *Tout idéal nil de A est contenu dans le radical J.*

Démonstration. Soit I un idéal nil de A. Soit $x \in I$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^m = 0$, alors $1 - x$ est inversible car $(1-x)(1+x+...+x^{m-1}) = 1$. Ainsi, I est un idéal bilatère tel que $1 - x$ est inversible pour tout $x \in I$. En vertu du corollaire 1.8, on a $I \subseteq J$. □

Le prochain théorème, pour lequel nous utiliserons le lemme suivant, donne une relation entre le radical d'un module et celui de l'algèbre correspondante.

Lemme 1.12. *Tout $A-$module simple admet une structure naturelle de $\overline{A}$-module simple et réciproquement.*

Démonstration. Voir [1], lemme VII.4.3. □

Théorème 1.13. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et M un $A-$module. Alors* $\mathrm{rad}(M) = MJ$.

Démonstration. On procède par double inclusion. Tout d'abord, pour tout $x \in M$, l'application :

$$\begin{array}{cccc} f_x & : & A & \longrightarrow & M \\ & & a & \longmapsto & xa \end{array}$$

est $A-$linéaire. Donc $x(\mathrm{rad}(A)) = f_x(\mathrm{rad}(A)) \subseteq \mathrm{rad}(M)$. Ainsi, $MJ \subseteq \mathrm{rad}(M)$.
Montrons maintenant l'inclusion réciproque, c'est-à-dire montrons que pour tout $x \notin MJ$, on a $x \notin \mathrm{rad}(M)$. Soit $\overline{M} = M/MJ$. Ce module étant annulé par J, il a une structure naturelle de $\overline{A}$-module. De plus, $\overline{A}$ étant une algèbre semisimple (en vertu de la proposition 1.6), $\overline{M}$ est un $\overline{A}$-module semisimple. En vertu de la correspondance entre les $A-$modules simples et les $\overline{A}$-modules simples énoncée au lemme précédent, pour tout $\overline{x} \in \overline{M}$ tel que $\overline{x} \neq \overline{0}$, il existe $f : \overline{M} \longrightarrow S$ avec S simple tel que $f(\overline{x}) \neq 0$. Soit p la projection canonique $M \longrightarrow \overline{M}$, on a $fp(x) = f(\overline{x}) \neq 0$, donc $x \notin \mathrm{rad}(M)$. Cela achève la démonstration. □

D'autre part, le corollaire 1.11 nous permet d'obtenir une autre caractérisation du radical de A dans le cas où A est une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie.

Théorème 1.14. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Alors $J = \mathrm{rad}(A)$ est le plus grand idéal bilatère nilpotent de A.*

Démonstration. En vertu du corollaire 1.11, tout idéal nilpotent de A est contenu dans le radical. Il suffit donc de montrer que J lui-même est nilpotent. Pour cela, voir [1], théorème VII.4.7. □

Corollaire 1.15. *Le radical d'une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie A est l'unique idéal nil I tel que A/I soit semisimple.*

Démonstration. On sait que J possède ces propriétés. Soit I un idéal nil de A tel que A/I soit semisimple, montrons que $I = J$. En vertu du corollaire 1.11, on sait déjà que $I \subseteq J$. Considérons l'idéal quotient J/I. Puisque J est nilpotent, J/I l'est aussi. Alors, d'après le théorème 1.14, $J/I \subseteq \mathrm{rad}(A/I)$. Mais A/I est semisimple donc $\mathrm{rad}(A/I) = 0$, par conséquent $J/I = 0$ et ainsi $I = J$. □

On termine cette section par une caractérisation de l'algèbre d'endomorphismes d'un $A-$module indécomposable.

Définition 1.16. [Algèbre locale] Une $\mathbf{k}-$algèbre A est dite *locale* si elle n'a qu'un seul idéal à droite maximal.

Théorème 1.17. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de radical J. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est locale ;

(2) L'ensemble des éléments non inversibles de A forme un idéal bilatère ;

(3) Pour chaque $x \in A$, au moins un des éléments x ou $1 - x$ est inversible ;

(4) A/J *est un corps.*

Démonstration. Voir [1], théorème VII.6.5. □

On souligne le fait que l'idéal bilatère mentionné dans la condition *(2)* n'est autre que le radical J. Par conséquent, si A est une algèbre locale, alors J est égal à l'ensemble des éléments non inversibles de A.

Théorème 1.18. *Soit* A *une* $\mathbf{k}-$*algèbre de dimension finie. Un* $A-$*module de type fini* M *est indécomposable si et seulement si* $\mathrm{End}_A(M)$ *est une algèbre locale.*

Démonstration. Voir [1], corollaire 6.12. □

1.2 Radical de la catégorie mod A

1.2.1 Rappels sur les catégories

Les définitions suivantes sont issues de [1].

Définition 1.19. [Catégorie] Une catégorie $\mathcal{C}$ est définie par la donnée de :

(1) Une classe d'*objets* de $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}_0$;

(2) Pour chaque paire (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, un ensemble d'éléments appelés *morphismes* de X vers Y, noté $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, tel que si $(X, Y) \neq (X', Y')$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \bigcap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') = \emptyset$;

(3) Pour chaque triplet d'objets (X, Y, Z) de $\mathcal{C}$, une application :

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

où l'image du couple (g, f) est notée $g \circ f$ ou plus simplement gf, appelée la *composition des morphismes* et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(a) Pour tous morphismes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, $h(gf) = (hg)f$.

(b) Pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ appelé l'*identité sur* X et vérifiant $f1_X = f$ et $1_X g = g$ pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et tout morphisme $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$.

On notera $f : X \longrightarrow Y$ le morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. L'objet X est appelé la *source* de f et l'objet Y son *but*. En vertu de la Définition 1.19(2), tout morphisme détermine uniquement sa source et son but.

Exemple 1.20. (1) La catégorie Ens des ensembles admet pour objets les ensembles, pour morphismes les applications et pour composition la composition usuelle des applications.

(2) Soit $\mathbf{k}$ un corps algébriquement clos, la catégorie Alg $\mathbf{k}$ des $\mathbf{k}-$algèbres admet pour objets les $\mathbf{k}-$algèbres, pour morphismes les morphismes d'algèbres et pour composition la composition usuelle des applications.

(3) Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre. La catégorie $\mathrm{mod}\, A$ des $A-$modules à droite de type fini admet pour objets les $A-$modules à droite de type fini, pour morphismes les applications $A-$linéaires et pour composition la composition usuelle des applications.

Définition 1.21. [Produit] Soit $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Un *produit* de cette famille est la donnée d'un objet M et d'une famille de morphismes $(p_\lambda : M \longrightarrow M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ telle que, si $(M', (p'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est la donnée d'un autre objet M' et d'une autre famille de morphismes $(p'_\lambda : M' \longrightarrow M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, alors il existe un unique morphisme $f : M' \longrightarrow M$ tel que $p_\lambda f = p'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. On note $M = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$.

Définition 1.22. [Somme directe] Soit $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Une *somme directe* (ou *coproduit*) de cette famille est la donnée d'un objet M et d'une famille de morphismes $(q_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que, si $(M', (q'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ est la donnée d'un autre objet M' et d'une autre famille de morphismes $(q'_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M')_{\lambda\in\Lambda}$, alors il existe un unique morphisme $f : M \longrightarrow M'$ tel que $fq_\lambda = q'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. On note $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Définition 1.23. [Catégorie $\mathbf{k}-$linéaire] Soit $\mathbf{k}$ un corps. Une catégorie $\mathcal{C}$ est une *catégorie* $\mathbf{k}-$*linéaire* si :

(1) Pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$ est un $\mathbf{k}-$espace vectoriel.

(2) La composition des morphismes est $\mathbf{k}-$bilinéaire, c'est-à-dire que, pour tous morphismes $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$, $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Y, Z)$ et tous scalaires λ_1, λ_2, μ_1, $\mu_2 \in \mathbf{k}$, on a :

$$g \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1(g \circ f_1) + \lambda_2(g \circ f_2)$$
$$(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) \circ f = \mu_1(g_1 \circ f) + \mu_2(g_2 \circ f).$$

(3) Toute famille finie d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit et un coproduit dans $\mathcal{C}$.

Exemple 1.24. Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie, alors la catégorie $\mathrm{mod}\, A$ des $A-$modules à droite de type fini est une catégorie $\mathbf{k}-$linéaire. De façon explicite, soit $\{M_1, \ldots, M_n\}$ une famille finie de $A-$modules, leur produit est donné par :

$$\prod_{i=1}^{n} M_i = \{(x_i)_{1\le i\le n} \mid x_i \in M_i\} \ \in \mathrm{mod}\, A.$$

D'autre part, en vertu de [1] (corollaire III.4.4), on a que $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \cong \prod_{i=1}^{n} M_i$.

Définition 1.25. [Idéal] Un *idéal* $\mathcal{I}$ dans une $\mathbf{k}-$catégorie $\mathcal{C}$ est défini de la façon suivante : pour toute paire (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, il existe un sous-espace $\mathrm{Hom}_\mathcal{I}(X, Y)$ de $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$ tel que :

(1) Pour tous morphismes $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{I}(X, Y)$ et $h \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(W, X)$, $fh \in \mathrm{Hom}_\mathcal{I}(W, Y)$;

(2) Pour tous morphismes $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{I}(X, Y)$ et $h \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Y, Z)$, $hf \in \mathrm{Hom}_\mathcal{I}(X, Z)$.

Ainsi, un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ est une famille $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(X,Y)\}$, $X, Y \in \mathcal{C}_0$, de sous-espaces stables par composition à gauche et à droite avec des morphismes de $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{I} \trianglelefteq \mathcal{C}$

Définition 1.26. [Idéal produit] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soient $\mathcal{I}, \mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{C}$. L'*idéal produit* $\mathcal{I}\mathcal{J}$ est défini pour toute paire d'objets (X,Y) par la donnée de l'ensemble $\mathcal{I}\mathcal{J}(X,Y)$ constitué de toutes les sommes finies $\sum_{i\in I} g_i f_i$ où, pour tout $i \in I$, $f_i \in \mathcal{I}(X, Z_i)$ et $g_i \in \mathcal{J}(Z_i, Y)$ pour un certain objet Z_i de $\mathcal{C}$.

1.2.2 La catégorie mod A

Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie, on considère la catégorie $\mathrm{mod}\, A$ des $A-$modules à droite de type fini. Cette catégorie est une catégorie $\mathbf{k}-$linéaire qui, de plus, est abélienne. L'objectif de cette sous-section est de définir le radical $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ de la catégorie $\mathrm{mod}\, A$.

Définition 1.27. [Radical de $\mathrm{mod}\, A$] Le radical $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ de $\mathrm{mod}\, A$ est défini par la donnée pour tous $A-$modules M, N de l'ensemble $\mathrm{rad}_A(M,N)$ constitué de tous les morphismes $f : M \to N$ tels que, pour toute section $q : M' \to M$ et toute rétraction $p : N \to N'$ avec M', N' indécomposables, la composition pfq n'est pas un isomorphisme.

Remarque 1.28. Si les $A-$modules M et N sont indécomposables, on a que

$$\mathrm{rad}_A(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \mid f \text{ n'est pas un isomorphisme } \}$$

est constitué de tous les éléments non inversibles de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$. En particulier, si $M = N$, en vertu des théorèmes 1.17 et 1.18, on a que $\mathrm{rad}_A(M,N) = \mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(M))$.

Lemme 1.29. *Le radical* $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ *est uniquement défini et est un idéal de* $\mathrm{mod}\, A$.

Démonstration. Pour M, N donnés, les assertions du lemme définissent de manière unique un sous-ensemble $\mathrm{rad}_A(M, N)$ de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. Il reste à montrer que ces données définissent un idéal de $\mathrm{mod}\, A$, c'est-à-dire que pour tous $A-$modules M, N, on a que $\mathrm{rad}_A(M, N)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ stable pour la composition à gauche et à droite par des morphismes quelconques. Soient $M, N \in \mathrm{mod}\, A$. Alors, $\mathrm{rad}_A(M, N)$ est non vide, car $\mathrm{rad}_A(M, N)$ contient le morphisme nul $0 : M \longrightarrow N$. Soient $f, g \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathrm{rad}_A(M, N)$. Soient $q : M' \longrightarrow M$ une section et $p : N \longrightarrow N'$ une rétraction, avec M', N' indécomposables. En vertu de l'hypothèse, si $M' \ncong N'$, alors $p(\lambda f + \mu g)q = \lambda(pfq) + \mu(pgq)$ n'est pas un isomorphisme. Sinon, si $M' \cong N'$, alors $\lambda(pfq) + \mu(pgq) \in \mathrm{Hom}_A(M', N') = \mathrm{End}_A(M')$. Puisque M' est indécomposable, $\mathrm{End}_A(M')$ est locale et donc, en vertu du théorème 1.17, la somme de deux éléments non inversibles est non inversible. Dans les deux cas, $p(\lambda f + \mu g)q$ n'est pas un isomorphisme, c'est-à-dire $\lambda f + \mu g \in \mathrm{rad}_A(M, N)$. Cela montre que $\mathrm{rad}_A(M, N)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

Soit maintenant $f \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ et soit $g \in \mathrm{Hom}_A(L, M)$ pour un certain $A-$module L. Par contradiction, supposons que $fg \notin \mathrm{rad}_A(L, N)$. Alors, il existe une section $q : L' \longrightarrow L$ et une rétraction $p : N \longrightarrow N'$ telles que $p(fg)q$ soit un isomorphisme. Par conséquent, gq est une section et on a donc une section $h = gq : L' \longrightarrow M$ et une rétraction $p : N \longrightarrow N'$ telles que pfh est un isomorphisme, d'où $f \notin \mathrm{rad}_A(M, N)$, une contradiction.

De la même manière, on montre que f est stable pour la composition à droite par un morphisme quelconque, ce qui achève la démonstration. $\square$

A l'image du théorème 1.7, le lemme suivant fournit une autre caractérisation du radical de $\mathrm{mod}\, A$:

Lemme 1.30. *Pour tous $A-$modules à droite M, N, on a :*
$\mathrm{rad}_A(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M, N) \mid 1_M - fg$ admet un inverse à droite pour tout $g\}$.

Démonstration. Soient M, N deux $A-$modules, posons $\mathcal{R}(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \mid 1_M - fg$ admet un inverse à droite pour tout $g\}$. Commençons par prouver que $\mathcal{R}(M,N)$ est stable pour la composition à gauche et à droite. Soient $f \in \mathcal{R}(M,N)$ et $u \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$. Alors, pour tout morphisme $g : N \longrightarrow L$, $1_N - (fu)g = 1_N - f(ug)$ est inversible à droite, d'où $fu \in \mathcal{R}(L,N)$. D'autre part, soient $f \in \mathcal{R}(M,N)$, $v \in \mathrm{Hom}_A(N,Q)$ et $g : Q \longrightarrow M$ arbitraire. En vertu de l'hypothèse, il existe h tel que $(1_N - f(gv))h = 1_N$ d'où $h - 1_N = fgvh$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(1_Q - (vf)g)(1_Q + vhfg) &= 1_Q + vhfg - vfg - vfgvhfg \\
&= 1_Q + vhfg - vfg - v(h - 1_N)fg \\
&= 1_Q.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout morphisme $g : Q \longrightarrow M$, $1_Q - (vf)g$ est inversible à droite, d'où $vf \in \mathcal{R}(M,Q)$, ce qui achève de montrer que $\mathcal{R}(M,N)$ est stable pour la composition à gauche et à droite.

Soient maintenant M et N deux $A-$modules indécomposables, montrons que $\mathrm{rad}_A(M,N)$ $= \mathcal{R}(M,N)$. Soit $f \in \mathcal{R}(M,N)$, alors f n'est pas un isomorphisme car sinon $1_N - ff^{-1}$ serait inversible à droite, une absurdité. Donc $f \in \mathrm{rad}_A(M,N)$ et $\mathcal{R}(M,N) \subseteq \mathrm{rad}_A(M,N)$. Réciproquement, soit un non-isomorphisme $f : M \longrightarrow N$. Soit $g : N \longrightarrow M$, montrons que $1_N - fg$ est inversible à droite. En vertu du théorème 1.17, puisque $\mathrm{End}_A(N)$ est locale, alors un des éléments fg ou $1_N - fg$ est inversible. Or, la composition fg ne peut pas être un isomorphisme, sinon f serait une rétraction, donc un isomorphisme en vertu de l'indécomposabilité de M, une contradiction. Donc $1_N - fg$ est inversible, en particulier inversible à droite, et ce pour tout $g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$. Donc $f \in \mathcal{R}(M,N)$ et ainsi $\mathrm{rad}_A(M,N) \subseteq \mathcal{R}(M,N)$.

Finalement, soient M, N deux $A-$modules arbitraires, montrons que $f \in \mathcal{R}(M,N)$ si et seulement si pour toute section $q : M' \to M$ et toute rétraction $p : N \to N'$ avec M', N' indécomposables, on a $pfq \in \mathcal{R}(M',N')$. Puisque la nécessité découle directement du fait que $\mathcal{R}(M,N)$ est un idéal, il reste à prouver la suffisance. Soient $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$, $N = \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$ les décompositions respectives de M et N en sommes directes de $A-$modules indécomposables et $q_i : M_i \longrightarrow M$, $q'_i : N_i \longrightarrow N$, $p_j : M \longrightarrow M_j$, $p'_j : N \longrightarrow N_j$ les injections et projections associées. En vertu de l'hypothèse, on a $p'_j f q_i \in \mathcal{R}(M_i, N_j)$ pour tous i, j. Alors,

$$f = 1_N f 1_M = \left(\sum_j q'_j p'_j \right) f \left(\sum_i q_i p_i \right) = \sum_{i,j} q'_j \left(p'_j f q_i \right) p_i \ \in \mathcal{R}(M,N),$$

ce qui achève la démonstration. □

Définition 1.31. [Morphisme radical] Un morphisme $f : M \longrightarrow N$ est dit *radical* si $f \in \mathrm{rad}_A(M,N)$.

Proposition 1.32. *Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de $A-$modules.*

(1) Si M est indécomposable, alors f est radical si et seulement si f n'est pas une section.

(2) Si N est indécomposable, alors f est radical si et seulement si f n'est pas une rétraction.

Démonstration. (1) Supposons que M est indécomposable. Si f est une section, alors il existe une rétraction f' telle que $f'f = 1_M$, donc $f \notin \mathrm{rad}_A(M,N)$, ce qui prouve la nécessité. Supposons maintenant que $f \notin \mathrm{rad}_A(M,N)$, alors il existe une section $q : M' \longrightarrow M$ et une rétraction $p : N \longrightarrow N'$ telles que la composée pfq est un isomorphisme. Or, puisque M est indécomposable, on a que q est un isomorphisme et par conséquent pf est aussi un isomorphisme, d'où f est une section, ce qui prouve la suffisance.

(2) Supposons que N est indécomposable. Si f est une rétraction, alors il existe une section f' telle que $ff' = 1_M$, donc $f \notin \mathrm{rad}_A(M,N)$, ce qui prouve la nécessité. Supposons maintenant que $f \notin \mathrm{rad}_A(M,N)$, alors il existe une section $q : M' \longrightarrow M$ et une

rétraction $p : N \longrightarrow N'$ telles que la composée pfq est un isomorphisme. Or, puisque N est indécomposable, on a que p est un isomorphisme et par conséquent fq est aussi un isomorphisme, d'où f est une rétraction, ce qui prouve la suffisance. $\square$

Proposition 1.33. *Soient $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de $A-$modules et $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$, $N = \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$ les décompositions de M et N en sommes directes de $A-$modules indécomposables. Alors, $f = (f_{ij})$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ est radical si et seulement si $f_{ij} : M_i \longrightarrow N_j$ est radical pour tous i, j.*

Démonstration. La nécessité découle du fait que le radical est un idéal. Pour la suffisance, considérons $q_i : M_i \longrightarrow M$, $q_i' : N_i \longrightarrow N$, $p_j : M \longrightarrow M_j$ et $p_j' : N \longrightarrow N_j$ les injections et projections associées aux décompositions en sommes directes de $A-$modules indécomposables de M et N. Supposons que $f_{ij} : M_i \longrightarrow N_j$ est radical pour tous i, j, alors $f = 1_N f 1_M = \left(\sum_{j=1}^{n} q_j' p_j'\right) f \left(\sum_{i=1}^{m} q_i p_i\right) = \sum_{i,j} q_j'(p_j' f q_i) p_i = \sum_{i,j} q_j' f_{ij} p_i \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ car par hypothèse $f_{ij} \in \mathrm{rad}_A(M_i, N_j)$ pour tous i, j et $\mathrm{rad}_A(M_i, N_j)$ est un idéal. $\square$

Pour une algèbre donnée A, on s'intéresse maintenant aux puissances du radical $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ de la catégorie $\mathrm{mod}\, A$. Le radical $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ étant un idéal de $\mathrm{mod}\, A$, nous pouvons en calculer les puissances de la manière usuelle (présentée en 1.2.1). Soient L, N deux $A-$modules. Par définition, l'espace $\mathrm{rad}_A^2(L, N)$ est égal à l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{i=1}^{m} g_i f_i$ tels que pour tout i, il existe un $A-$module M_i et des morphismes $f_i \in \mathrm{rad}_A(L, M_i)$, $g_i \in \mathrm{rad}_A(M_i, N)$. En posant $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{rad}_A^2(L, N) = \{\ gf \mid & \text{ il existe un module } M \text{ et des morphismes} \\ & f \in \mathrm{rad}_A(L, M) \text{ et } g \in \mathrm{rad}_A(M, N)\ \}.\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 2$, on pose $\mathrm{rad}^n(\mathrm{mod}\, A) = \mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A) \cdot \mathrm{rad}^{n-1}(\mathrm{mod}\, A)$.

En d'autres termes, pour deux $A-$modules L et N, l'espace $\operatorname{rad}_A^n(L,N)$ est constitué de toutes les composées gf avec $f \in \operatorname{rad}_A^{n-1}(L,M)$ et $g \in \operatorname{rad}_A(M,N)$ pour un certain $A-$module M.

Remarque 1.34. Soient M, N deux $A-$modules. On a une suite décroissante d'idéaux :

$$\operatorname{Hom}_A(M,N) \supseteq \operatorname{rad}_A(M,N) \supseteq \operatorname{rad}_A^2(M,N) \supseteq \ldots \supseteq \operatorname{rad}_A^n(M,N) \supseteq \ldots.$$

Posons, pour tous $A-$modules M, N, $\operatorname{rad}_A^0(M,N) = \operatorname{Hom}_A(M,N)$. Ainsi, pour tout morphisme $f : M \longrightarrow N$, il existe un unique entier $i \in \mathbb{N}$ tel que $f \in \operatorname{rad}_A^i(M,N) \backslash \operatorname{rad}_A^{i+1}(M,N)$.

Définition 1.35. [Profondeur] Soit M, N deux $A-$modules et soit $f \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$. La *profondeur* de f, notée $\operatorname{prof}(f)$, est infinie si $f \in \operatorname{rad}_A^\infty(M,N)$. Sinon, $\operatorname{prof}(f)$ est l'unique entier i tel que $f \in \operatorname{rad}_A^i(M,N) \backslash \operatorname{rad}_A^{i+1}(M,N)$.

Définition 1.36. [Radical infini] Le *radical infini* de $\operatorname{mod} A$ est défini, pour toute paire (M,N) de $A-$modules, par :

$$\operatorname{rad}_A^\infty(M,N) = \bigcap_{m \geq 0} \operatorname{rad}_A^m(M,N).$$

Lemme 1.37. *Soient M, N deux $A-$modules. Il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{rad}_A^\infty(M,N) = \operatorname{rad}_A^n(M,N)$.*

Démonstration. En effet, M et N étant de type fini, $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ est un espace vectoriel de dimension finie et donc la suite d'inclusions

$$\operatorname{Hom}_A(M,N) \supseteq \operatorname{rad}_A(M,N) \supseteq \operatorname{rad}_A^2(M,N) \supseteq \ldots \supseteq \operatorname{rad}_A^m(M,N) \supseteq \ldots$$

devient nécessairement stationnaire. □

Définition 1.38. [Algèbre de représentation finie] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Alors, A est dite *de représentation finie* si $\operatorname{mod} A$ admet un nombre fini de modules indécomposables, à isomorphisme près.

Théorème 1.39. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Alors A est de représentation finie si et seulement si* $\mathrm{rad}^{\infty}(\mathrm{mod}\, A) = 0$.

Démonstration. Voir [7], théorème 7.7. □

Par conséquent, pour une algèbre A de représentation finie, il existe un plus petit entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{rad}^{N}(\mathrm{mod}\, A) = 0$.

Définition 1.40. [Puissance annulatrice] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Si A est de représentation finie, le plus petit entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{rad}^{N}(\mathrm{mod}\, A) = 0$ est appelé la *puissance annulatrice* du radical de la catégorie $\mathrm{mod}\, A$.

Nous nous intéresserons par la suite à connaître et pouvoir calculer cette puissance annulatrice pour certains types d'algèbres. Pour ce faire, on commence par quelques rappels sur la théorie d'Auslander-Reiten.

1.3 Rappels sur la théorie d'Auslander-Reiten

Les définitions et la majeure partie des résultats de cette section sont issus de [5].

Définition 1.41. [Morphisme irréductible] Un morphisme de $A-$modules $f : X \longrightarrow Y$ est dit *irréductible* si :

(1) f n'est ni une section, ni une rétraction

(2) S'il existe des morphismes f_1, f_2 tels que $f = f_1 f_2$, alors f_1 est une rétraction ou f_2 est une section.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

Exemple 1.42. (1) Soit P un $A-$module projectif indécomposable, l'inclusion $f : \operatorname{rad} P \hookrightarrow P$ est un morphisme irréductible. En effet, supposons qu'il existe des morphismes $f_1 : M \longrightarrow P$ et $f_2 : \operatorname{rad} P \longrightarrow M$ tels que $f = f_1 f_2$. Si f_1 n'est pas une rétraction, puisque f_1 n'est pas surjective, alors $\operatorname{Im} f_1$ est un sous-module propre de P, donc $\operatorname{Im} f_1 \subseteq \operatorname{rad} P$ car $\operatorname{rad} P$ est maximal. Ainsi, f_1 se factorise par $\operatorname{rad} P$, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $h : M \longrightarrow \operatorname{rad} P$ tel que $f_1 = fh$. Mais alors $f = f_1 f_2 = fhf_2$ implique que $f(1_{\operatorname{rad} P} - hf_2) = 0$ et donc $hf_2 = 1_{\operatorname{rad} P}$ car f est un monomorphisme. Donc f_2 est une section, d'où f est irréductible.
(2) Soit I un $A-$module injectif indécomposable, la projection $g : I \twoheadrightarrow I/\operatorname{soc} I$ est un morphisme irréductible. En effet, supposons qu'il existe des morphismes $g_1 : N \longrightarrow I/\operatorname{soc} I$ et $g_2 : I \longrightarrow N$ tels que $g = g_1 g_2$. Si g_2 n'est pas une section, puisque g_2 n'est pas injective, alors $\operatorname{Ker} g_2$ est un sous-module propre de I, donc $\operatorname{soc} I \subseteq \operatorname{Ker} g_2$, d'où $g_2(\operatorname{soc} I) = 0$ et g_2 se factorise par $I/\operatorname{soc} I$. Ainsi, il existe un morphisme $h : I/\operatorname{soc} I \longrightarrow N$ tel que $g_2 = hg$. Mais alors $g = g_1 g_2 = g_1 hg$ implique que $(1 - g_1 h)g = 0$ et donc $g_1 h = 1_{I/\operatorname{soc} I}$ car g est un épimorphisme. Donc g_1 est une rétraction, d'où g est irréductible.

Proposition 1.43. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme irréductible. Alors, f est un monomorphisme ou f est un épimorphisme.*

Démonstration. Soit $f = jp$ la factorisation canonique de f par $\operatorname{Im} f$, avec $p : X \longrightarrow \operatorname{Im} f$ surjective et $j : \operatorname{Im} f \longrightarrow Y$ injective. Alors p est une section ou j est une rétraction. Dans le premier cas, p est un isomorphisme, d'où f est un monomorphisme. Dans le deuxième cas, j est un isomorphisme, d'où f est un épimorphisme. □

Proposition 1.44. *Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de représentation finie et X, Y deux $A-$modules indécomposables. Tout morphisme non nul $f : X \longrightarrow Y$ qui n'est pas un isomorphisme s'écrit comme une somme de composées de morphismes irréductibles.*

Démonstration. Voir [5], corollaire IV.5.6. □

D'autre part, le lemme suivant nous permet de reformuler la définition de morphisme irréductible en fonction du radical rad(mod A) de la catégorie mod A.

Lemme 1.45. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme, avec X et Y indécomposables. Alors, f est irréductible si et seulement si $f \in \operatorname{rad}_A(X, Y) \setminus \operatorname{rad}_A^2(X, Y)$.*

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme, avec X et Y indécomposables. Alors, $f \in \operatorname{rad}_A(X, Y)$ si et seulement si f n'est pas un isomorphisme, c'est-à-dire si et seulement si f n'est ni une section, ni une rétraction. D'autre part, $f \notin \operatorname{rad}_A^2(X, Y)$ si et seulement si pour toute décomposition $f = gh$ avec $h : X \longrightarrow Z$, $g : Z \longrightarrow Y$, on a $h \notin \operatorname{rad}_A(X, Z)$ ou $g \notin \operatorname{rad}_A(Z, Y)$. En vertu de la proposition 1.32, c'est le cas si et seulement si h est une section ou g est une rétraction. □

On note $\operatorname{Irr}(M, N) := \operatorname{rad}_A(M, N)/\operatorname{rad}_A^2(M, N)$ qu'on appelle l'*espace des morphismes irréductibles* de M vers N.

Définition 1.46. [Suite presque scindée] Une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

avec L et N indécomposables est une *suite presque scindée* (ou *suite d'Auslander-Reiten*) si les morphismes f et g sont irréductibles.

Définition 1.47. [Minimal presque scindé] Soient L, M, N des $A-$modules.

(1) Soit $f : L \longrightarrow M$ un morphisme de $A-$modules. Alors, f est dit *minimal à gauche* si tout $h \in \operatorname{End}_A(M)$ tel que $hf = f$ est un automorphisme. De plus, f est dit *presque scindé à gauche* si f n'est pas une section et si pour tout morphisme $u : L \longrightarrow U$ qui n'est pas une section, il existe un morphisme $u' : M \longrightarrow U$ tel

que $u = u'f$. Enfin, on dit que f est *minimal presque scindé à gauche* si f est à la fois minimal à gauche et presque scindé à gauche.

(2) Soit $g : M \longrightarrow N$ un morphisme de $A-$modules. Alors, g est dit *minimal à droite* si tout $h \in \mathrm{End}_A(M)$ tel que $gh = g$ est un automorphisme. De plus, g est dit *presque scindé à droite* si g n'est pas une rétraction et si pour tout morphisme $v : V \longrightarrow N$ qui n'est pas une rétraction, il existe un morphisme $v' : V \longrightarrow N$ tel que $v = gv'$. Enfin, on dit que g est *minimal presque scindé à droite* si g est à la fois minimal à droite et presque scindé à droite.

Théorème 1.48. *Soit* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de* $A-$*modules. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La suite est presque scindée ;

(2) L est indécomposable et g est presque scindé à droite ;

(3) N est indécomposable et f est presque scindé à gauche ;

(4) f est minimal presque scindé à gauche ;

(5) g est minimal presque scindé à droite.

Démonstration. Voir [5], théorème IV.1.13. □

Proposition 1.49. *(1) Soit P un $A-$module projectif indécomposable. Un morphisme de $A-$modules $g : M \longrightarrow P$ est minimal presque scindé à droite si et seulement si g est un monomorphisme et* $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{rad}(P)$.

(2) Soit I un $A-$module injectif indécomposable. Un morphisme de $A-$modules $f : I \longrightarrow M$ est minimal presque scindé à gauche si et seulement si f est un épimorphisme et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{soc}(I)$.

Démonstration. Voir [5], proposition IV.3.5(a). □

Soient $\tau = DTr$ et $\tau^{-1} = TrD$ les translations d'Auslander-Reiten (voir [5]). On a le théorème suivant :

Théorème 1.50. *(1) Pour tout $A-$module indécomposable non projectif N, il existe une suite presque scindée*

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

dans $\operatorname{mod} A$*, uniquement déterminée par N à isomorphisme près.*
(2) Pour tout $A-$module indécomposable non injectif L, il existe une suite presque scindée

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow \tau^{-1}L \longrightarrow 0$$

dans $\operatorname{mod} A$*, uniquement déterminée par L à isomorphisme près.*

Démonstration. Voir [5], théorème IV.3.1. □

Pour tout $A-$module indécomposable non projectif N, on notera $\varepsilon(N)$ la suite presque scindée finissant en N et $\alpha(N)$ le nombre de facteurs indécomposables du terme médian de $\varepsilon(N)$. Dualement, pour tout $A-$module indécomposable non injectif L, on notera $\varepsilon'(L)$ la suite presque scindée commençant en L et $\alpha'(L)$ le nombre de facteurs indécomposables du terme médian de $\varepsilon'(L)$.

Définition 1.51. [Algèbre héréditaire] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. On dit que A est une algèbre *héréditaire* si tout sous-module d'un $A-$module projectif est projectif.

On termine cette section par la mise en place des notions de carquois ordinaire et de carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre.

Définition 1.52. [Carquois] Un *carquois* Q est un quadruplet (Q_0, Q_1, s, b) constitué de deux ensembles Q_0, dont les éléments sont appelés des *points*, et Q_1, dont les éléments sont appelés des *flèches*, et de deux applications $s, b : Q_1 \longrightarrow Q_0$ qui à chaque flèche $\beta : i \longrightarrow j$ associent respectivement sa *source* $s(\beta) = i$ et son *but* $b(\beta) = j$. On dit qu'un carquois Q est *fini* si les ensembles Q_0 et Q_1 sont finis. Sinon, Q est dit *infini*.

Étant donné une flèche $\beta \in Q_1$, on note β^{-1} son inverse formel, de source $b(\beta)$ et de but $s(\beta)$. On convient que $(\beta^{-1})^{-1} = \beta$.

Définition 1.53. [Marche, chemin] Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ un carquois. On appelle *marche* de Q une suite $c_1 \dots c_n$ de longueur $n \geq 1$ telle que pour tout i on a que $c_i = \beta$ ou $c_i = \beta^{-1}$ pour une certaine flèche $\beta \in Q_1$ et telle que $b(c_i) = s(c_{i+1})$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$. Étant donné une marche $c_1 \dots c_n$, on définit sa source $s(c_1 \dots c_n) = s(c_1)$, son but $b(c_1 \dots c_n) = b(c_n)$ et son inverse $(c_1 \dots c_n)^{-1} = c_n^{-1} \dots c_1^{-1}$. Une marche $c_1 \dots c_n$ est appelée un *chemin* si tous les c_i sont des flèches. Pour tout $i \in Q_0$, il existe un chemin de longueur zéro, noté ϵ_i, de source et de but i.

Définition 1.54. [Algèbre sobre] Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et $\{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents orthogonaux primitifs de A. On dit que A est *sobre* si $e_iA \neq e_jA$ pour tout $i \neq j$.

Définition 1.55. [Algèbre connexe] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. On dit que A est *connexe* si 0 et 1 sont les seuls idempotents centraux de A.

Définition 1.56. [Algèbre de chemins] Soit Q un carquois. L'algèbre de chemins $\mathbf{k}Q$ est la $\mathbf{k}-$algèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent admet pour base l'ensemble des chemins de Q de longueur $l \geq 0$ et telle que le produit de deux vecteurs de base $c_1 \dots c_n$ et $d_1 \dots d_m$ est donné par :

$$(c_1 \dots c_n)(d_1 \dots d_m) = \delta_{b(c_n)s(d_1)}(c_1 \dots c_n d_1 \dots d_m).$$

On étend ensuite ce produit par distributivité.

Définition 1.57. [Relation, relation zéro, idéal monomial, idéal quadratique] Une *relation* dans Q à coefficients dans $\mathbf{k}$ est une combinaison $\mathbf{k}-$linéaire de chemins de longueur supérieure ou égale à deux ayant la même source et le même but. Une relation dans Q est appelée une *relation zéro* si elle est donnée par un seul chemin de longueur supérieure ou égale à deux. Un idéal I de l'algèbre de chemins $\mathbf{k}Q$ est dit *monomial* s'il n'est engendré que par des relations zéro. Un idéal I est dit *quadratique* s'il n'est engendré que par des relations de longueur 2.

Définition 1.58. [Carquois ordinaire] Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie sobre et connexe et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents orthogonaux primitifs de A. Le *carquois ordinaire* de A, noté Q_A, est défini par :

(1) $(Q_A)_0 = \{1, \ldots, n\}$;

(2) Pour tous points $i, j \in (Q_A)_0$, les flèches $\beta : i \longrightarrow j$ de Q_A sont en correspondance bijective avec les vecteurs d'une base du $\mathbf{k}-$espace vectoriel $e_i(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A))e_j$.

Lemme 1.59. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre héréditaire de dimension finie sobre et connexe. Alors, le carquois ordinaire Q_A de A est acyclique et $A \cong \mathbf{k}Q_A$.*

Démonstration. Voir [5], théorème VII.1.7. □

Définition 1.60. [Idéal admissible] Soient Q un carquois fini, $A = \mathbf{k}Q$ l'algèbre de chemins de Q, $\mathcal{R}$ l'idéal de A engendré par l'ensemble Q_1 et I un idéal de A. On dit que I est un idéal *admissible* s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}^m \subseteq I \subseteq \mathcal{R}^2$.

Théorème 1.61. *Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie sobre et connexe. Alors il existe un idéal admissible I de l'algèbre de chemins $\mathbf{k}Q_A$ tel que $A \cong \mathbf{k}Q_A/I$.*

Démonstration. Voir [5], théorème II.3.7. □

Ainsi, toute $\mathbf{k}-$algèbre A de dimension finie sobre et connexe est donnée par une paire (Q, I) où $Q = Q_A$ et I est un idéal admissible de l'algèbre de chemins $\mathbf{k}Q$. On dit que le carquois Q est *lié* par I et on appelle A une *algèbre de carquois lié*. Pour tout $a \in Q_0$, on notera respectivement I_a, P_a et S_a le $A-$module injectif indécomposable, projectif indécomposable et simple au point a. Enfin, on notera $\operatorname{top}(P_a)$ la coiffe du $A-$module projectif P_a et $\operatorname{soc}(I_a)$ le socle du $A-$module injectif I_a.

Définition 1.62. [Carquois d'Auslander-Reiten] Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie sobre et connexe et $\operatorname{ind} A$ une sous-catégorie pleine de $\operatorname{mod} A$ composée d'exactement un représentant de chaque classe d'isomorphisme de $A-$modules indécomposables. Le carquois d'Auslander-Reiten Γ_A de A est défini comme suit :

(1) Les points de Γ_A sont les éléments de $\operatorname{ind} A$.

(2) Pour tous points M, N de Γ_A, les flèches $M \longrightarrow N$ sont en correspondance bijective avec une base du $\mathbf{k}-$espace vectoriel $\operatorname{Irr}(M, N)$.

Si Γ est une composante de Γ_A telle que $\alpha(Z) \leq 2$ pour tout $A-$module indécomposable non projectif $Z \in \Gamma$ (ou, de façon équivalente, telle que $\alpha'(X) \leq 2$ pour tout $A-$module indécomposable non injectif $X \in \Gamma$), on écrira $\alpha(\Gamma) \leq 2$.

Proposition 1.63. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Si A est de représentation finie, alors pour toute paire (M, N) de $A-$modules indécomposables on a $\dim_{\mathbf{k}} \operatorname{Irr}(M, N) \leq 1$. En d'autres termes, Γ_A ne contient pas de flèches multiples.*

Démonstration. Voir [5], proposition IV.4.9. □

Définition 1.64. [Chemin sectionnel] Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et $\chi : M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} M_n$ un chemin dans Γ_A. Si pour tout entier i tel que $1 < i \leq n$ on a $\tau M_i \neq M_{i-2}$, on dit que χ est *sectionnel*. L'entier n est appelé la *longueur* de χ.

Proposition 1.65. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Si* $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} M_n$ *est un chemin sectionnel dans* Γ_A*, alors* $f_n \dots f_1 \neq 0$.

Démonstration. Voir [5], corollaire IX.2.2. □

Proposition 1.66. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Il n'existe pas de chemin sectionnel de la forme* $M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1$ *dans* Γ_A.

Démonstration. Voir [7], corollaire VII.2.6. □

En d'autres termes, Γ_A ne contient pas de cycle sectionnel.

Pour clore ce premier chapitre et avant de poursuivre notre travail, on s'intéresse par exemple au calcul de la puissance annulatrice de $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ dans un cas simple : celui où A est une algèbre de Nakayama dont le carquois ordinaire est de type $\mathbb{A}$.

1.4 Cas particulier des algèbres de Nakayama

Le but de cette section est de calculer la puissance annulatrice du radical $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ en fonction de la longueur des $A-$modules projectifs et injectifs indécomposables dans un cas simple d'algèbres de représentation finie : celui des algèbres de Nakayama dont le carquois ordinaire est de type $\mathbb{A}$, c'est-à-dire dans le cas des $\mathbf{k}-$algèbres de dimension finie dont le carquois ordinaire est de type $\mathbb{A}$, linéairement orienté.

Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de Nakayama de type $\mathbb{A}$, c'est-à-dire $A = \mathbf{k}Q/I$ où Q est un carquois de la forme :

$$n \longrightarrow (n-1) \longrightarrow \dots \longrightarrow 1$$

et I est un idéal admissible de l'algèbre de chemins $\mathbf{k}Q$. En particulier, A est une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et de représentation finie telle que Γ_A vérifie la propriété $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$.

Pour tout $a \in Q_0$, notons $\pi_a : P_a \longrightarrow S_a$ et $\iota_a : S_a \longrightarrow I_a$ respectivement une couverture projective et une enveloppe injective du $A-$module simple S_a et posons $\theta_a = \iota_a \pi_a$. On note $\mathrm{prof}(\iota_a)$ (respectivement $\mathrm{prof}(\pi_a)$) la profondeur du morphisme ι_a (respectivement π_a), c'est-à-dire l'unique entier i tel que $\iota_a \in \mathrm{rad}_A^i(S_a, I_a) \setminus \mathrm{rad}_A^{i+1}(S_a, I_a)$ (respectivement $\pi_a \in \mathrm{rad}_A^i(P_a, S_a) \setminus \mathrm{rad}_A^{i+1}(P_a, S_a)$).

Théorème 1.67. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de Nakayama de type $\mathbb{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est de représentation finie ;

(2) Pour tout $A-$module simple S_a, on a $\mathrm{prof}(\iota_a) < \infty$;

(3) Pour tout $A-$module simple S_a, on a $\mathrm{prof}(\pi_a) < \infty$;

(4) Pour tout $A-$module simple S_a, le morphisme θ_a n'appartient pas à $(\mathrm{rad}^\infty(\mathrm{mod}\, A))^2$.

De plus, dans ce cas la puissance annulatrice de $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ est $N = m + 1$ où m est la profondeur maximale des morphismes θ_a où S_a parcourt l'ensemble des $A-$modules simples.

Démonstration. Voir [18], théorème 2.7. □

Soit P un $A-$module projectif indécomposable de longueur p. En vertu de [5] (théorème V.4.1), pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$, il existe un épimorphisme irréductible $f_i : \frac{P}{\mathrm{rad}^{i+1}(P)} \longrightarrow \frac{P}{\mathrm{rad}^i(P)}$. On obtient ainsi un chemin de morphismes irréductibles entre $A-$modules indécomposables :

$$P \xrightarrow{f_{p-1}} \frac{P}{\mathrm{rad}^{p-1}(P)} \xrightarrow{f_{p-2}} \cdots \xrightarrow{f_2} \frac{P}{\mathrm{rad}^2(P)} \xrightarrow{f_1} \frac{P}{\mathrm{rad}(P)}$$

dans Γ_A, non nul car c'est une composée d'épimorphismes.

Dualement, soit I un $A-$module injectif indécomposable de longueur q. On définit par récurrence $\operatorname{soc}^n(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de la façon suivante : $\operatorname{soc}^0(I) = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $\operatorname{soc}^{n+1}(I) = p^{-1}(\operatorname{soc}(I/\operatorname{soc}^n(I)))$ où $p : I \longrightarrow I/\operatorname{soc}^n(I)$ désigne l'épimorphisme canonique. Alors, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq q$, il existe un monomorphisme irréductible $g_i : \operatorname{soc}^i(I) \longrightarrow \operatorname{soc}^{i+1}(I)$. Ainsi, on obtient un chemin de morphismes irréductibles entre $A-$modules indécomposables :

$$\operatorname{soc}(I) \xrightarrow{g_1} \operatorname{soc}^2(I) \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_{q-2}} \operatorname{soc}^{q-1}(I) \xrightarrow{g_{q-1}} I$$

dans Γ_A, non nul car c'est une composée de monomorphismes.

Théorème 1.68. *Soient Q un carquois de type $\mathbb{A}$ linéairement orienté, I un idéal admissible de l'algèbre de chemin $\mathbf{k}Q$ et $A = \mathbf{k}Q/I$. Soit $N = \min\{n \in \mathbb{N} \mid rad_A^n = 0\}$. Alors, $N = \max\{l(P_a) + l(I_a) - 1 \mid a \in Q_0\}$.*

Démonstration. En vertu du théorème 1.67, on a que $N = \max\{\operatorname{prof}(\theta_a) + 1 \mid a \in Q_0\}$. Or, en vertu de [17] (proposition 3.1), pour tout $a \in Q_0$, la profondeur $\operatorname{prof}(\theta_a)$ de θ_a est égale à $(p_a - 1) + (q_a - 1)$, où $p_a = l(P_a)$ et $q_a = l(I_a)$, d'où la conclusion. □

Exemple 1.69. Considérons l'algèbre de chemins $A = \mathbf{k}Q_A$ du carquois :

$$Q_A : \; 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1.$$

Ici, $l(P_1) = 1, l(P_2) = 2, l(P_3) = 3, l(P_4) = 4$ et $l(I_1) = 4, l(I_2) = 3, l(I_3) = 2, l(I_4) = 1$. Alors, on a $N = \max\{1+4-1, 2+3-1, 3+2-1, 4+1-1\} = 4$, c'est-à-dire $\operatorname{rad}^3(\operatorname{mod} A) \neq 0$ et $\operatorname{rad}^n(\operatorname{mod} A) = 0$ pour tout $n \geq 4$.

On constate dans ce cas que, puisqu'il suffit de connaitre les longueurs des $A-$modules projectifs et injectifs indécomposables, la valeur de la puissance annulatrice de $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$

est calculable directement à partir du carquois ordinaire de l'algèbre A. On a en effet que pour tout point $a \in Q_0$, la longueur du $A-$module projectif P_a est donnée par le nombre de chemins de source a et la longueur du module injectif I_a est donnée par le nombre de chemins de but a. Nous nous intéressons maintenant à effectuer un travail semblable pour un autre type d'algèbres : les algèbres inclinées itérées de type $\mathbb{A}$.

CHAPITRE 2

Degrés des morphismes irréductibles

Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. En vertu de la proposition 1.44, tous les morphismes entre modules indécomposables de la catégorie $\operatorname{mod} A$ s'expriment en fonction des morphismes irréductibles de $\operatorname{mod} A$. D'autre part, le lemme 1.45 établit un lien très étroit entre les morphismes irréductibles et le radical de la catégorie $\operatorname{mod} A$. Afin de mieux connaître cette catégorie, il est donc judicieux d'en étudier le radical $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ de façon plus approfondie. En particulier, nous nous intéresserons au cas où $\operatorname{rad}^{\infty}(\operatorname{mod} A) = 0$ et nous utiliserons un invariant appelé le *degré* d'un morphisme irréductible.

Dans tout ce chapitre, nous travaillerons avec des $\mathbf{k}-$algèbres de dimension finie sobres et connexes. Ainsi, toute algèbre sera donnée par un carquois lié (Q, I) avec Q connexe et fini.

On commence par présenter la notion centrale de ce chapitre : celle de degré d'un morphisme irréductible.

2.1 Définition et premières propriétés

La notion de degré d'un morphisme irréductible a été introduite en 1992 par Liu [26] de la façon suivante :

Définition 2.1. [Degré à gauche et degré à droite] Soit $f : X \to Y$ un morphisme irréductible, avec X ou Y indécomposable. Le *degré à gauche* de f, noté $d_l(f)$, est infini si pour tout $n \geq 0$, pour tout $A-$module Z et pour tout morphisme $g \in \mathrm{rad}_A^n(Z,X) \setminus \mathrm{rad}_A^{n+1}(Z,X)$, on a $fg \notin \mathrm{rad}_A^{n+2}(Z,Y)$. Sinon, $d_l(f)$ est le plus petit entier n tel qu'il existe un $A-$module Z et un morphisme $g \in \mathrm{rad}_A^n(Z,X) \setminus \mathrm{rad}_A^{n+1}(Z,X)$ tel que $fg \in \mathrm{rad}_A^{n+2}(Z,Y)$.
Dualement, le *degré à droite* de f, noté $d_r(f)$, est infini si pour tout $n \geq 0$, pour tout $A-$module Z et pour tout morphisme $g \in \mathrm{rad}_A^n(Y,Z) \setminus \mathrm{rad}_A^{n+1}(Y,Z)$, on a $gf \notin \mathrm{rad}_A^{n+2}(X,Z)$. Sinon, $d_l(f)$ est le plus petit entier n tel qu'il existe un $A-$module Z et un morphisme $g \in \mathrm{rad}_A^n(Y,Z) \setminus \mathrm{rad}_A^{n+1}(Y,Z)$ tel que $gf \in \mathrm{rad}_A^{n+2}(X,Z)$.

Proposition 2.2. *Soient X, Y deux $A-$modules indécomposables et $f : X \to Y$ un morphisme irréductible. Alors, on a $d_l(f)$ et $d_r(f)$ tous deux plus grands ou égaux à* 1.

Démonstration. Supposons qu'il existe un morphisme $g \in \mathrm{Hom}_A(Z,X) \setminus \mathrm{rad}_A(Z,X)$ tel que $fg \in \mathrm{rad}_A^2(Z,Y)$. Alors, g est une section ou g est une rétraction ou il existe une rétraction $p : X \longrightarrow X'$ et une section $q : Z' \longrightarrow Z$ telles que la composée pgq est un isomorphisme. Or, si g est une section on a que g est un isomorphisme car X est indécomposable et par conséquent f est dans $\mathrm{rad}_A^2(X,Y)$, une contradiction, car f est irréductible. D'autre part, si g est une rétraction, alors il existe une section g' telle que $gg' = 1_X$ et donc $fgg' = f \in \mathrm{rad}_A^2(X,Y)$, car $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ est un idéal, une contradiction. Enfin, supposons qu'il existe une rétraction $p : X \longrightarrow X'$ et une section $q : Z' \longrightarrow Z$ telles que la composée pgq est un isomorphisme. Puisque X est indécomposable, p est un isomorphisme, d'où gq est un isomorphisme et alors g est une rétraction et donc

$f \in \operatorname{rad}_A^2(X, Y)$, une contradiction. Donc $d_l(f) \geq 1$.

Dualement, supposons qu'il existe un morphisme $g \in \operatorname{Hom}_A(Y, Z) \setminus \operatorname{rad}_A(Y, Z)$ tel que $gf \in \operatorname{rad}_A^2(X, Z)$. Alors, g est une section ou g est une rétraction ou il existe une rétraction $p : Z \longrightarrow Z'$ et une section $q : Y' \longrightarrow Y$ telles que la composée pgq est un isomorphisme. Or, si g est une section, alors il existe une rétraction g' telle que $g'g = 1_Y$ et donc $g'gf = f \in \operatorname{rad}_A^2(X, Y)$, car $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ est un idéal, une contradiction. D'autre part, si g est une rétraction on a que g est un isomorphisme car X est indécomposable et par conséquent f est dans $\operatorname{rad}_A^2(X, Y)$, une contradiction, car f est irréductible. Enfin, supposons qu'il existe une rétraction $p : Z \longrightarrow Z'$ et une section $q : Y' \longrightarrow Y$ telles que la composée pgq est un isomorphisme. Puisque Y est indécomposable, q est un isomorphisme, d'où pg est un isomorphisme et alors g est une section et donc $f \in \operatorname{rad}_A^2(X, Y)$, une contradiction. Donc $d_r(f) \geq 1$. □

Dans [26], à la suite de la définition du degré d'un morphisme irréductible, Liu a prouvé les théorèmes suivants à propos des morphismes irréductibles dont le degré à gauche (respectivement à droite) est fini :

Théorème 2.3. *Soit $g : Y \longrightarrow Z$ un morphisme irréductible de degré à gauche fini dans* $\operatorname{mod} A$. *Alors :*

(1) Z n'a pas de facteurs projectifs ;

(2) Supposons que Z est indécomposable. Si $Y \oplus Y'$ est un facteur du terme médian de $\varepsilon(Z)$ avec $Y' \neq 0$, alors il existe un morphisme irréductible $g' : \tau Z \longrightarrow Y'$ avec $d_l(g') < d_l(g)$. Par conséquent, si $d_l(g) = 1$, alors g est minimal presque scindé à droite.

Démonstration. Voir [26], corollaire du lemme 1.2. □

Théorème 2.4. *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme irréductible de degré à droite fini dans* $\operatorname{mod} A$. *Alors :*

(1) X *n'a pas de facteurs injectifs ;*

(2) Supposons que X *est indécomposable. Si* $Y \oplus Y'$ *est un facteur du terme médian de* $\varepsilon'(X)$ *avec* $Y' \neq 0$*, alors il existe un morphisme irréductible* $f' : Y' \longrightarrow \tau^{-1}X$ *avec* $d_r(f') < d_r(f)$*. Par conséquent, si* $d_r(f) = 1$*, alors* f *est minimal presque scindé à gauche.*

Démonstration. Voir [26], corollaire du lemme 1.3. □

Par la suite, nous énoncerons la presque totalité des énoncés en nous concentrant sur le degré à droite. Cependant, sauf indication contraire, le lecteur peut considérer que les énoncés duals sont valables pour le degré à gauche.

On termine cette section par un dernier énoncé dû à Liu [26] :

Proposition 2.5. *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme irréductible de degré à droite fini dans* $\operatorname{mod} A$ *avec* X *indécomposable. Supposons que*

$$X = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n$$

est un chemin sectionnel dans Γ_A *avec* $n \geq 1$*. Si* $X_1 \oplus Y$ *est un facteur du terme médian de* $\varepsilon'(X)$*, alors pour tout* $i = 1, \ldots, n$*, il existe un morphisme irréductible* $f_i : X_i \longrightarrow \tau^{-1}X_{i-1}$ *tel que* $d_r(f_n) < d_r(f_{n-1}) < \ldots < d_r(f_1) < d_r(f)$*.*

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr] & & & & \\
X = X_0 \arrow[ur, "f"] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & \tau^{-1}X_0 \arrow[dr] & & & \\
 & X_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ddrr, dotted, no head] & & \tau^{-1}X_1 \arrow[dr, dotted, no head] & & \\
 & & & & \tau^{-1}X_{n-2} \arrow[dr] & \\
 & & & X_{n-1} \arrow[ur, "f_{n-1}"] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & \tau^{-1}X_{n-1} \\
 & & & & X_n \arrow[ur, "f_n"] &
\end{tikzcd}
$$

Par conséquent, $d_r(f) \geq n+1$.

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur i. Supposons que $X_1 \oplus Y$ est un facteur du terme médian de $\varepsilon'(X)$. Alors, en vertu du théorème 2.4, il existe un morphisme irréductible $f_1 : X_1 \longrightarrow \tau^{-1}X_0$ tel que $d_r(f_1) < d_r(f)$. Soit maintenant i tel que $1 \leq i \leq n$ et supposons la propriété vraie pour tout j tel que $1 \leq j \leq i$. Si $i = n$, on n'a rien à prouver. Sinon, en vertu du théorème 2.4, on a que X_i n'est pas projectif et alors puisque $\tau^{-1}X_{i-1} \oplus X_{i+1}$ est un facteur du terme médian de $\varepsilon'(X_i)$, avec $X_{i+1} \neq 0$, il existe un morphisme irréductible $f_{i+1} : X_{i+1} \longrightarrow \tau^{-1}X_i$ tel que $d_r(f_{i+1}) < d_r(f_i)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, f_{i+1} est tel que $d_r(f_{i+1}) < d_r(f_i) < \ldots < d_r(f_1) < d_r(f)$. En vertu du principe de récurrence, on obtient le résultat. $\square$

2.2 Résultats importants

Dans cette section, nous présentons plusieurs résultats importants déjà prouvés sur les degrés des morphismes irréductibles dans les $\mathbf{k}-$algèbres de dimension finie et de représentation finie dont le carquois d'Auslander-Reiten Γ_A satisfait à certaines propriétés.

2.2.1 Cas où Γ_A est une composante avec distance

Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et Γ une composante de Γ_A.

Définition 2.6. [Composante avec distance] On dit que Γ est une *composante avec distance* si, pour tous $X, Y \in \Gamma_0$, tous les chemins de X vers Y dans Γ ont la même longueur. Dans ce cas, on dit que la *distance* $l(X, Y)$ entre X et Y est n s'il existe un chemin de X vers Y de longueur n. Sinon, Γ est appelée une *composante sans distance.*

On remarque que si Γ est une composante avec distance de Γ_A, alors Γ n'a pas de cycles orientés.

En s'appuyant sur le travail de Chaio, Platzeck et Trepode [17], cette première partie est consacrée à énoncer quelques propriétés des puissances de $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ lorsque Γ_A est une composante avec distance. De plus, nous verrons que si Γ_A satisfait également à la propriété $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$, alors il suffit de considérer les chemins de Γ_A pour connaître la finitude du degré d'un morphisme irréductible entre $A-$modules indécomposables.

Proposition 2.7. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et de représentation finie telle que Γ_A est une composante avec distance. Soient $X, Y \in (\Gamma_A)_0$ tels que $l(X, Y) = n$. Alors :*

(1) $\mathrm{rad}_A^{n+1}(X, Y) = 0$ *;*

(2) Si $g : X \longrightarrow Y$ *est un morphisme non nul, alors* $g \in \operatorname{rad}_A^n(X,Y) \backslash \operatorname{rad}_A^{n+1}(X,Y)$ *;*

(3) $\operatorname{rad}_A^j(X,Y) = \operatorname{rad}_A^n(X,Y)$ *pour tout* $j = 1, \ldots, n$.

Démonstration. Voir [17], proposition 3.1. □

Corollaire 2.8. *Soient* A *une* $\mathbf{k}-$*algèbre de dimension finie et de représentation finie telle que* Γ_A *est une composante avec distance et* $X, Y \in (\Gamma_A)_0$. *Si* $\operatorname{Hom}_A(X,Y) \neq 0$, *alors il existe un unique entier* k *tel que* $\operatorname{rad}_A^k(X,Y) \backslash \operatorname{rad}_A^{k+1}(X,Y)$ *soit non vide et cet entier coïncide avec* $l(X,Y)$.

Démonstration. Soit $g \in \operatorname{Hom}_A(X,Y)$ un morphisme non nul. En vertu de la proposition 2.7, $g \in \operatorname{rad}_A^k(X,Y) \backslash \operatorname{rad}_A^{k+1}(X,Y)$ où $k = l(X,Y)$, donc $\operatorname{rad}_A^k(X,Y) \backslash \operatorname{rad}_A^{k+1}(X,Y)$ est non vide. De plus, $\operatorname{rad}_A^{k+1}(X,Y) = 0$ donc $\operatorname{rad}_A^i(X,Y) = 0$ pour tout $i > k$ et $\operatorname{rad}_A^j(X,Y) = \operatorname{rad}_A^k(X,Y)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, donc $\operatorname{rad}_A^i(X,Y) \backslash \operatorname{rad}_A^{i+1}(X,Y) = 0$ pour tout $i < k$. □

Corollaire 2.9. *Soient* A *une* $\mathbf{k}-$*algèbre de dimension finie et de représentation finie telle que* Γ_A *est une composante avec distance et* f *la composée de* n *morphismes irréductibles* $f_i : X_{i-1} \longrightarrow X_i$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, *avec* X_j *dans* $(\Gamma_A)_0$ *pour tout* $j \in \{0, \ldots, n\}$. *Alors,* $f \in \operatorname{rad}_A^{n+1}(X_0, X_n)$ *si et seulement si* $f = 0$.

Démonstration. La nécessité suit de la proposition 2.7(a), la suffisance est triviale puisque $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ est un idéal. □

Corollaire 2.10. *Soient* A *une* $\mathbf{k}-$*algèbre de dimension finie et de représentation finie telle que* Γ_A *est une composante avec distance,* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme irréductible et* $\varphi \in \operatorname{rad}_A^n(Y,Z) \backslash \operatorname{rad}_A^{n+1}(Y,Z)$, *avec* $X, Y, Z \in (\Gamma_A)_0$. *Alors* $\varphi f \in \operatorname{rad}_A^{n+2}(X,Z)$ *si et seulement si* $\varphi f = 0$.

Démonstration. Soient $f : X \longrightarrow Y$ irréductible et $\varphi \in \operatorname{rad}_A^n(Y,Z) \backslash \operatorname{rad}_A^{n+1}(Y,Z)$ tels que $\varphi f \in \operatorname{rad}_A^{n+2}(X,Z)$. Puisque $\operatorname{rad}_A^n(Y,Z) \backslash \operatorname{rad}_A^{n+1}(Y,Z)$ est non vide, en vertu du corollaire 2.8 on a que $l(Y,Z) = n$. De plus, puisque f est irréductible on a $l(X,Z) = n+1$ d'où, en vertu de la proposition 2.7(a), on a que $\operatorname{rad}_A^{n+2}(X,Z) = 0$, donc $\varphi f = 0$. Réciproquement, la suffisance suit du fait que $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ est un idéal. $\square$

Théorème 2.11. *Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et de représentation finie telle que Γ_A est une composante avec distance et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme irréductible avec $X, Y \in (\Gamma_A)_0$. Alors :*

(1) $d_l(f) = \infty$ si et seulement si $fg \neq 0$ pour tout morphisme non nul $g : M \longrightarrow X$ avec $M \in (\Gamma_A)_0$.

(2) $d_r(f) = \infty$ si et seulement si $gf \neq 0$ pour tout morphisme non nul $g : Y \longrightarrow M$ avec $M \in (\Gamma_A)_0$.

Démonstration. Voir [17], théorème 3.7. $\square$

En particulier, si f est un épimorphisme, alors $d_l(f) = \infty$ et si f est un monomorphisme, alors $d_r(f) = \infty$.

Ainsi, pour déterminer si le degré d'un morphisme irréductible f entre modules indécomposables est infini, il est équivalent de montrer que sa composée avec n'importe quel morphisme non nul est non nulle. Dans le cas où $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$, la prochaine proposition nous permet de nous restreindre aux chemins de Γ_A.

Proposition 2.12. *Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et de représentation finie telle que Γ_A est une composante avec distance vérifiant la propriété $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme irréductible avec $X, Y \in (\Gamma_A)_0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $d_r(f) = \infty$.

(2) $\gamma f \neq 0$ *pour tout chemin non nul* $\gamma : Y \longrightarrow M$ *dans* Γ_A.

Démonstration. Voir [17], proposition 3.9. $\square$

Exemple 2.13. Considérons l'algèbre $A = \mathbf{k}Q_A/I$ du carquois Q_A :

$$\begin{tikzcd}
 & & 2 \\
 & 3 \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[dr, "\beta_1"] & \\
4 \arrow[ur, "\alpha_3"] & & 1
\end{tikzcd}$$

lié par $I = \langle \alpha_3\beta_1 \rangle$. Le carquois d'Auslander-Reiten de A est :

$$\begin{tikzcd}
 & & & I_2 = P_4 \arrow[dr, "g_2"] & & \\
P_1 = S_1 \arrow[dr, "\iota_1"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & \bullet \arrow[ur, "f_4"] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & I_3 \arrow[dr, "g_3"] & \\
 & P_3 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & S_3 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & I_4 = S_4 \\
P_2 = S_2 \arrow[ur, "\iota_2"] \arrow[rr, dashed, no head] & & I_1 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Alors, Γ_A est une composante avec distance satisfaisant à $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$ et on a $d_r(\iota_1)$, $d_r(\iota_2)$, $d_r(f_4) < \infty$ et $d_r(g_2)$, $d_r(g_3) = \infty$. D'autre part, $d_l(g_2)$, $d_l(g_3) < \infty$ et $d_l(\iota_1)$, $d_l(\iota_2)$, $d_l(f_4)$ $= \infty$.

2.2.2 Cas où Γ_A satisfait à $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$

On constate en fait que, pour une $\mathbf{k}-$algèbre A de dimension finie, la condition $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$ suffit pour connaitre la configuration exacte permettant de déterminer si le degré d'un morphisme irréductible est fini et d'en connaître la valeur exacte s'il y a lieu. On a en effet le théorème suivant, dû à Chaio, Coelho et Trepode [15] :

Théorème 2.14. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie telle que $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme irréductible avec $X, Y \in (\Gamma_A)_0$. Alors, $d_r(f) = n$ si et seulement si il existe des chemins de la configuration suivante :*

$$\begin{tikzcd}
 & Y \cong Y_0 \arrow[dr, "f_1"] & & & & & \\
X \cong X_1 \arrow[ur, "f = g_1"] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & Y_1 \arrow[dr, "f_2"] & & & & \\
 & X_2 \arrow[ur, "g_2"] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[drr, dash, dotted] & & Y_2 \arrow[drr, dash, dotted] & & & \\
 & & & X_{n-1} \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & Y_{n-1} \arrow[dr, "f_n"] & \\
 & & & & X_n \arrow[ur, "g_n"] \arrow[rr, dash, dashed] & & Y_n
\end{tikzcd}$$

où $h : Y = Y_0 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} Y_n$ est un chemin sectionnel de longueur n tel que $hf = 0$, où $Y_i = \tau^{-1}X_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha'(X_n) = 1$. De plus, $d_r(g_i) = i$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Démonstration. Commençons par démontrer la nécessité, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. En vertu du théorème 2.4, si $d_r(f) = 1$, alors X n'est pas injectif et il existe une suite presque scindée

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \tau^{-1}X = Y_1 \longrightarrow 0.$$

Si $d_r(f) = n > 1$, alors X n'est pas injectif et $\alpha(X) = 2$. Soit

$$0 \longrightarrow X = X_1 \xrightarrow{[f\ h_1]^t} Y \oplus X_2 \xrightarrow{[f_1\ g_2]} \tau^{-1}X_1 = Y_1 \longrightarrow 0$$

la suite presque scindée commençant en $X = X_1$, telle que $Y = Y_0 \not\cong X_2$ et $d_r(g_2) < d_r(f)$. En itérant ce procédé, on obtient un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd}
 & Y \cong Y_0 \arrow[dr, "f_1"] & & & & \\
X \cong X_1 \arrow[ur, "f = g_1"] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & Y_1 \arrow[dr, "f_2"] & & & \\
 & X_2 \arrow[ur, "g_2"] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dotted] & & Y_2 \arrow[dr, dash, dotted] & & \\
 & & X_{k-1} \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & Y_{k-1} \arrow[dr, "f_k"] & \\
 & & & X_k \arrow[ur, "g_k"] \arrow[rr, dash, dashed] & & Y_k
\end{tikzcd}$$

où $k < \infty$ puisque $d_r(g_k) < \ldots < d_r(g_2) < d_r(f) < \infty$ et où pour tout i tel que $0 \leq i \leq n-2$, $Y_i \not\cong X_{n+2}$. Ainsi, on a que $h = f_k \ldots f_1 f_0 : Y = Y_0 \longrightarrow Y_k$ est sur un chemin sectionnel et vérifie $hf = 0$. Il reste à montrer que $k = n$. Puisque $d_r(g_k) < \ldots < d_r(g_2) < d_r(f) = n$, on a $k \leq n$. D'autre part, si $k < n$, on a un morphisme $h \in \mathrm{rad}_A^k(Y, Y_k) \backslash \mathrm{rad}_A^{k+1}(Y, Y_k)$ tel que $hf = 0 \in \mathrm{rad}_A^{k+2}(Y, Y_k)$, une contradiction. Donc $k = n$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une telle configuration. Puisque $h = f_n \ldots f_1$ est tel que $h \in \mathrm{rad}_A^n(Y, Y_k) \backslash \mathrm{rad}_A^{n+1}(Y, Y_k)$ et $hf = 0 \in \mathrm{rad}_A^{n+2}(Y, Y_k)$, alors $d_r(f) \leq n$.

D'autre part, en vertu de la proposition 2.5 appliquée au chemin sectionnel $X \cong X_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_n$, on a $d_r(f) \geq n$, d'où $d_r(f) = n$. $\square$

Ce théorème nous permet donc de visualiser très facilement le degré d'un morphisme irréductible entre deux $A-$modules indécomposables à partir du carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre A dans le cas où A est telle que $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$.

Proposition 2.15. *Avec les notations du théorème 2.14, $Y_n \cong Coker f$.*

Démonstration. En vertu de la version duale de [16] (proposition 3.4), on sait que $d_r(f) = n$ si et seulement si la projection $c : Y \twoheadrightarrow \text{Coker}\, f$ appartient à $\text{rad}_A^n(Y, \text{Coker}\, f) \setminus \text{rad}_A^{n+1}(Y, \text{Coker}\, f)$. Or, $h : Y = Y_0 \longrightarrow Y_n$ est tel que $hf = 0$ donc, en vertu de la propriété universelle du conoyau, il existe un morphisme $h' : \text{Coker}\, f \longrightarrow Y_n$ tel que $h = h'c$. Or, $h, c \in \text{rad}_A^n(Y, \text{Coker}\, f) \setminus \text{rad}_A^{n+1}(Y, \text{Coker}\, f)$, avec Y et $\text{Coker}\, f$ indécomposables, donc h est un isomorphisme. $\square$

On s'intéresse maintenant au cas où X est un $A-$module tel que $X = X_1 \oplus X_2$ avec X_1, X_2 indécomposables. Ce cas a été récemment traité par Chaio [14] pour les algèbres de dimension finie sur un corps algébriquement clos satisfaisant à $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$. On énonce ci-dessous le théorème qui nous intéresse.

Théorème 2.16. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie telle que $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$. Soit $f = [\iota_1\ \iota_2]^t : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow Y$ un monomorphisme irréductible tel que $d_r(f) < \infty$, avec X_1, X_2, Y indécomposables. Alors, $d_r(f) = d_r(\iota_1) + d_r(\iota_2)$.*

Démonstration. Voir [14], théorème 2.26. $\square$

Remarque 2.17. En particulier, puisque $d_r(\iota_1), d_r(\iota_2) \geq 1$, on a $d_r(f) \geq 2$.

À partir du carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre donnée A satisfaisant à $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$, nous pouvons donc entre autres calculer la valeur précise des degrés de l'inclusion $\operatorname{rad}(P) \hookrightarrow P$ où P est un $A-$module projectif indécomposable et de la projection $I \twoheadrightarrow I/\operatorname{soc}(I)$ où I est un $A-$module injectif indécomposable, lorsqu'ils sont définis.

Exemple 2.18. Considérons l'algèbre A donnée par le carquois Q_A :

$$\begin{tikzcd}
6 \arrow[dr, "\alpha_4"] & & 3 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
& 4 \arrow[ur, "\beta_3"] \arrow[dr, "\alpha_2"] & & 1 \\
5 \arrow[ur, "\beta_4"] & & 2 &
\end{tikzcd}$$

lié par $I = \langle \alpha_4\beta_3, \beta_3\alpha_1, \beta_4\alpha_2 \rangle$, Le carquois d'Auslander-Reiten de A est :

$$\begin{tikzcd}
& I_1 = P_3 \arrow[dr, "g_1"] & & & & I_2 = P_6 \arrow[dr, "g_2"] & & & \\
P_1 = S_1 \arrow[ur, "f_3"] \arrow[rr, dash, dashed] & & S_3 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[ur, "f_6"] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & I_5 = S_5 \\
& & & P_4 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & S_4 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & I_4 \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
& & P_2 = S_2 \arrow[ur, "\iota_2"] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr, "f_5"] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & I_6 = S_6 \\
& & & & & I_3 = P_5 \arrow[ur, "g_3"] & & &
\end{tikzcd}$$

Alors, $d_r(f_3) = 1, d_r(f_5) = 3, d_r(f_6) = 3$. De plus, soit $f_4 = [\iota_1\ \iota_2]^t$, on a que $d_r(f_4) = d_r(\iota_1)+d_r(\iota_2) = 1+1 = 2$. D'autre part, $d_l(g_1) = 1, d_l(g_2) = 3, d_l(g_3) = 3$ et si $g_4 = [\pi_1\ \pi_2]$, alors $d_l(g_4) = d_l(\pi_1) + d_l(\pi_2) = 1 + 1 = 2$.

2.3 Puissance annulatrice du radical

Maintenant que nous sommes en mesure de calculer les degrés des morphismes de façon explicite à partir de Γ_A dans le cas où $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$, nous verrons qu'il suffit de calculer les degrés de l'inclusion $\mathrm{rad}(P) \hookrightarrow P$ où P est un $A-$module projectif indécomposable et de la projection $I \twoheadrightarrow I/\mathrm{soc}(I)$ où I est un $A-$module injectif indécomposable pour obtenir la puissance annulatrice du radical $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ dans le cas où A est une $\mathbf{k}-$algèbre de représentation finie. On commence par énoncer un théorème, dû à Chaio, Le Meur et Trepode [16] :

Théorème 2.19. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est de représentation finie ;

(2) Pour tout $A-$module projectif indécomposable P, l'inclusion $\mathrm{rad}(P) \hookrightarrow P$ est de degré à droite fini ;

(3) Pour tout $A-$module injectif indécomposable I, la projection $I \twoheadrightarrow I/\mathrm{soc}(I)$ est de degré à gauche fini ;

(4) Pour tout monomorphisme irréductible $f : X \longrightarrow Y$ avec X ou Y indécomposable, le degré à droite de f est fini ;

(5) Pour tout épimorphisme irréductible $g : X \longrightarrow Y$ avec X ou Y indécomposable, le degré à gauche de g est fini.

Démonstration. Voir [16], théorème A. □

Soit $A = \mathbf{k}Q/I$ une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Pour tout $a \in Q_0$, soient f_a : $\mathrm{rad}(P_a) \hookrightarrow P_a$ et $g_a : I_a \twoheadrightarrow I_a/\mathrm{soc}(I_a)$ l'inclusion et la projection canoniques. En vertu du théorème précédent, si A est de représentation finie et si $P_a, I_a \ncong S_a$, on a toujours

$d_r(f_a), d_l(g_a) < \infty$ et leurs valeurs suffisent à calculer l'entier n tel que $\operatorname{rad}^n(\operatorname{mod} A) \neq 0$ mais $\operatorname{rad}^{n+1}(\operatorname{mod} A) = 0$ dans le cas où A est de représentation finie. Avant de démontrer cette affirmation due à Chaio [13], on présente quelques résultats préliminaires.

Lemme 2.20. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Si on a que $f \in \operatorname{rad}_A^n(P_a, S_a) \setminus \operatorname{rad}_A^{n+1}(P_a, S_a)$ et $g \in \operatorname{rad}_A^m(S_a, I_a) \setminus \operatorname{rad}_A^{m+1}(S_a, I_a)$ pour un certain point $a \in Q_0$, alors la composée gf est telle que $gf \in \operatorname{rad}_A^{n+m}(P_a, I_a) \setminus \operatorname{rad}_A^{n+m+1}(P_a, I_a)$.*

Démonstration. Voir [13], lemme 2.1. □

Lemme 2.21. *Soit $A \cong \mathbf{k}Q/I$ une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Soit $h : M \longrightarrow N$ un morphisme non nul avec M, N indécomposables. Alors, il existe un point $a \in Q_0$ et des morphismes $u : P_a \longrightarrow M$ et $v : N \longrightarrow I_a$ tels que la composée vhu est non nulle.*

Démonstration. Voir [13], lemme 2.3. □

Corollaire 2.22. *Si $\operatorname{rad}_A^m(P_a, I_a) = 0$ pour tout $a \in Q_0$, alors $\operatorname{rad}_A^m(M, N) = 0$ pour tous $A-$modules M, N de type fini.*

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{rad}_A^m(P_a, I_a) = 0$ pour tout $a \in Q_0$. Supposons qu'il existe deux $A-$modules M, N et un morphisme non nul $h : M \longrightarrow N$. En particulier, il existe un morphisme non nul $h' : M' \longrightarrow N'$ où M' et N' sont des facteurs indécomposables de M et N respectivement. En vertu du lemme 2.21, il existe un point $a \in Q_0$ et des morphismes $u : P_a \longrightarrow M'$ et $v : N' \longrightarrow I_a$ tels que la composée $vh'u$ est non nulle. Mais $vh'u \in \operatorname{rad}_A^m(P_a, I_a)$, une contradiction. D'où la conclusion. □

Ce corollaire montre en particulier que la profondeur maximale des morphismes ayant pour source un $A-$module projectif indécomposable et pour but le $A-$module injectif indécomposable correspondant donne une borne supérieure pour la puissance annulatrice de rad(mod A).

Étant donné un point $a \in Q_0$, notons $n_a = 0$ si $P_a = S_a$, $n_a = d_r(f_a)$ sinon et $m_a = 0$ si $I_a = S_a$, $m_a = d_l(g_a)$ sinon.

Lemme 2.23. *Soit $A = \mathbf{k}Q_A/I$ une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et de représentation finie. Alors :*

(1) Tout morphisme non nul $f : P_a \longrightarrow I_a$ qui se factorise par le $A-$module simple S_a est tel que $f \in \operatorname{rad}_A^{n_a+m_a}(P_a, I_a) \setminus \operatorname{rad}_A^{n_a+m_a+1}(P_a, I_a)$;

(2) Tout morphisme non nul $f : P_a \longrightarrow I_a$ qui ne se factorise pas par le $A-$module simple S_a est tel que $f \in \operatorname{rad}_A^{k}(P_a, I_a) \setminus \operatorname{rad}_A^{k+1}(P_a, I_a)$ avec $0 \leq k < n_a + m_a$.

Démonstration. Voir [13], lemme 2.5. □

On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette section :

Théorème 2.24. *Soit $A = \mathbf{k}Q/I$ une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Supposons que A est de représentation finie et soit $n = \max\{n_a + m_a \mid a \in Q_0\}$. Alors,* $\operatorname{rad}^n(\operatorname{mod} A) \neq 0$ *et* $\operatorname{rad}^{n+1}(\operatorname{mod} A) = 0$.

Démonstration. Soit $n = n_a + m_a = \max_{b \in Q_0}\{n_b + m_b\}$. Si $n_a = 0$ alors $P_a \cong S_a$ et $\operatorname{rad}_A^{n_a}(P_a, I_a) = \operatorname{Hom}_A(S_a, I_a) \neq 0$. De même, si $m_a = 0$, alors $I_a \cong S_a$ et $\operatorname{rad}_A^{m_a}(P_a, I_a) = \operatorname{Hom}_A(P_a, S_a) \neq 0$. Sinon, si $n_a, m_a \neq 0$, alors en vertu de [16] (proposition 3.4), il existe un épimorphisme $\varphi_a \in \operatorname{rad}_A^{n_a}(P_a, S_a) \setminus \operatorname{rad}_A^{n_a+1}(P_a, S_a)$ et un monomorphisme $\psi_a \in \operatorname{rad}_A^{m_a}(S_a, I_a) \setminus \operatorname{rad}_A^{m_a+1}(S_a, I_a)$. En vertu du lemme 2.20, la composée $\psi_a\varphi_a$ appartient à $\operatorname{rad}_A^{n_a+m_a}(P_a, I_a) \setminus \operatorname{rad}_A^{n_a+m_a+1}(P_a, I_a)$. Ainsi, on a $\operatorname{rad}_A^{n}(P_a, I_a) \neq 0$ pour tout $a \in Q_0$. D'autre part, il suit du lemme 2.23 que $\operatorname{rad}_A^{n+1}(P_a, I_a) = 0$ pour tout $a \in Q_0$. Le résultat suit alors du corollaire 2.22. □

Ainsi, pour une $\mathbf{k}-$algèbre A de dimension finie et de représentation finie, la puissance annulatrice de $\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\, A)$ est $N = n + 1 = \max\{n_a + m_a + 1 \mid a \in Q_0\}$.

CHAPITRE 3

Applications aux algèbres inclinées itérées de type $\mathbb{A}$

L'objectif final de ce dernier chapitre est de calculer la puissance annulatrice du radical $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ d'une $\mathbf{k}-$algèbre A inclinée itérée de type $\mathbb{A}$ directement à partir de son carquois ordinaire, sans passer par le calcul du carquois d'Auslander-Reiten. On commence par une étude générale des algèbres de cordes de représentation finie.

3.1 Algèbres de cordes de représentation finie

Une étude détaillée des algèbres de cordes a été effectuée en 1987 par M.C.R Butler et C.M. Ringel [12]. Le travail qui suit provient de l'exploitation de leur article.

Définition 3.1. [Algèbre de cordes, algèbre aimable] Soit $A = \mathbf{k}Q/I$ où $Q = (Q_0, Q_1)$ est un carquois connexe et fini. On dit que A est une *algèbre de cordes* si :

(1) I est un idéal monomial;

(2) Tout point de Q est la source et le but d'au plus deux flèches ;

(3) Pour toute flèche α, il existe au plus une flèche β telle que $\beta\alpha \notin I$ et au plus une flèche γ telle que $\alpha\gamma \notin I$.

Si de plus l'idéal I est quadratique et si pour toute flèche α il existe au plus une flèche β telle que $\beta\alpha \in I$ et au plus une flèche γ telle que $\alpha\gamma \in I$, alors on dit que l'algèbre A est *aimable*.

La définition d'algèbre aimable a été introduite par Assem, Skowroński [6].

Définition 3.2. [Corde] Soit (Q, I) un carquois lié, avec I monomial. Une marche $C = c_1 \dots c_n$ de longueur $n \geq 1$ est appelé une *corde* si :

(1) Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $c_{i+1} \neq c_i^{-1}$;

(2) Aucun sous-chemin $c_i \dots c_{i+t}$ de C ni son inverse n'appartiennent à l'idéal I.

On définit également en chaque point $a \in Q_0$ une corde de longueur zéro, notée ε_a telle que $s(\varepsilon_a) = b(\varepsilon_a) = a$ et $(\varepsilon_a)^{-1} = \varepsilon_a$.

Une corde C est dite *directe* si elle n'est composée que de flèches et elle est dite *inverse* si elle n'est composée que d'inverses de flèches.

Définition 3.3. [Extension par la gauche, extension par la droite] Étant donnée une corde $C = c_1 \dots c_n$, on dira qu'une corde D est une *extension par la gauche* (respectivement une *extension par la droite*) de C s'il existe un entier $r \geq 1$ et une corde $d_r \dots d_1$ telle que $D = d_r \dots d_1 c_1 \dots c_t$ (respectivement $D = c_t \dots c_n d_1 \dots d_r$) pour un certain entier $t \leq n$.

Définition 3.4. [Bande] Une corde C est appelée une *bande* si :

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, C^n est une corde ;

(2) Il n'existe pas de corde D de longueur inférieure ou égale à C telle que $C = D^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Soit maintenant W l'ensemble de toutes les cordes, muni de la plus petite relation d'équivalence ρ telle que $C \sim C^{-1}$ pour toute corde C et soit W' l'ensemble de toutes les bandes C' muni de la plus petite relation d'équivalence ρ' telle que $C' \sim C'^{-1}$ et $C' = c'_1 \dots c'_n \sim C'_{(i)} = c'_i c'_{i+1} \dots c'_{i-1}$. Notons $\overline{W}$ un ensemble complet de représentants de W/ρ et $\overline{W}'$ un ensemble complet de représentants de W'/ρ'.

Exemple 3.5. Considérons le carquois Q :

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
4 \arrow[ur, "\beta_3"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & 1 \\
 & 2 \arrow[ur, "\beta_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit $C_1 = \beta_3\alpha_1\beta_1^{-1}$, alors C_1 appartient à $W \backslash W'$ et $C_1 \sim C_1^{-1} = \beta_1\alpha_1^{-1}\beta_3^{-1}$. D'autre part, soit $C_2 = \beta_3\alpha_1\beta_1^{-1}\alpha_2^{-1}$. Alors, C_2 appartient à W' et on a par exemple $C_2 \sim C_2^{-1}$ et $C_2 \sim \alpha_1\beta_1^{-1}\alpha_2^{-1}\beta_3$.

Pour une $\mathbf{k}-$algèbre de cordes A de représentation finie, notre objectif est maintenant d'établir un lien entre les cordes de Q_A et les points de Γ_A.

Soit $C = c_1 \dots c_n$ ou $C = \varepsilon_a$ une corde. On définit une fonction $u : \{0, \dots, l(C)\} \longrightarrow Q_0$ telle que $u(0) = s(C)$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u(i) = b(c_i)$. Pour tout $a \in Q_0$, posons $U_a = \{i \mid a = u(i)\}$. Notre objectif est de définir une représentation $M(C)$ de Q associée à C. On procède comme suit : pour tout $a \in Q_0$, on pose $M(C)_a$ le $\mathbf{k}-$espace vectoriel de dimension $|U_a|$ et de base $\{z_k \mid k \in U_a\}$. D'autre part, pour chaque entier $i \in \{1, \dots, n\}$, on considère $c_i : u(i-1) \longrightarrow u(i)$. Si c_i est une flèche, alors on pose $c_i(z_{i-1}) = z_i$. Sinon, on pose $c_i^{-1}(z_i) = z_{i-1}$. Enfin, si $\beta : a \longrightarrow b$ est une flèche et si z_k est un vecteur de base de $M(C)_a$ tel que $\beta(z_k)$ n'a pas encore été défini, alors on pose $\beta(z_k) = 0$. Ainsi, $M(C)$ est une représentation de Q qui vérifie les relations de I. On appelle $M(C)$ un *module de corde*.

Remarque 3.6. Pour toute corde C, on a $M(C) \cong M(C^{-1})$.

Exemple 3.7. Considérons le carquois Q :

$$\begin{tikzcd}
6 \arrow[dr, "\alpha_4"] & & 3 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
& 4 \arrow[ur, "\beta_3"] \arrow[dr, "\alpha_2"] & & 1 \\
5 \arrow[ur, "\beta_4"] & & 2 &
\end{tikzcd}$$

lié par $I = \langle \alpha_4\beta_3, \beta_3\alpha_1, \beta_4\alpha_2 \rangle$.

Alors, $C = \alpha_2^{-1}\beta_3$ est une corde et la représentation associée $M(C)$ est :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, "0"] & & \langle z_2 \rangle \arrow[dr, "0"] & \\
& \langle z_1 \rangle \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"] & & 0 \\
0 \arrow[ur, "0"] & & \langle z_0 \rangle &
\end{tikzcd}$$

On remarque que $M(C) \cong P_4$.

Théorème 3.8. *Soit $A = \mathbf{k}Q/I$ une algèbre de cordes de représentation finie. Les modules $M(C)$ avec $C \in \overline{W}$ forment une liste complète de $A-$modules indécomposables non-isomorphes deux-à-deux.*

Démonstration. En vertu de [12] (théorème page 161), l'union de l'ensemble des modules associés aux éléments de W et de l'ensemble des modules associés aux éléments de W' forme une liste complète de $A-$modules indécomposables non isomorphes deux-à-deux. Or, puisque l'on considère A de représentation finie, l'ensemble W' est vide, d'où la conclusion. □

Ainsi, si A est une algèbre de cordes de représentation finie, tout $A-$module indécomposable est donné par une corde et réciproquement. On s'intéresse maintenant à la construction des suites presque scindées. Pour cela, on commence par un peu de terminologie.

Soit C une corde. On dit que C *commence sur un pic* s'il n'existe pas de flèche β telle que βC est une corde et *commence dans un creux* s'il n'existe pas de flèche γ telle que $\gamma^{-1}C$ est une corde. Dualement, on dit que C *finit sur un pic* s'il n'existe pas de flèche β telle que $C\beta^{-1}$ est une corde et *finit dans un creux* s'il n'existe pas de flèche γ telle que $C\gamma$ est une corde.

Si C ne commence pas sur un pic, on note ${}_tC = \beta_r^{-1} \dots \beta_1^{-1}\beta_0 C$ l'extension par la gauche de C telle que ${}_tC$ commence dans un creux et si C ne finit pas sur un pic, on note $C_t = C\beta_0^{-1}\beta_1 \dots \beta_r$ l'extension par la droite de C telle que C_t finit dans un creux. De même, si C ne commence pas dans un creux, on note ${}_sC = \gamma_r \dots \gamma_1\gamma_0^{-1}C$ l'extension par la gauche de C telle que ${}_sC$ commence sur un pic et si C ne finit pas dans un creux, on note $C_s = C\gamma_0\gamma_1^{-1} \dots \gamma_r^{-1}$ l'extension par la droite de C telle que C_s finit sur un pic.

Enfin, à toute flèche $\beta \in Q_1$ on associe la corde $B_\beta = \delta_s^{-1} \dots \delta_1^{-1}\beta\gamma_1^{-1} \dots \gamma_r^{-1}$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et tout $j \in \{1, \dots, s\}$, les γ_i et les δ_j sont des flèches telles que B commence dans un creux et finit sur un pic. On remarque que, étant donné une corde

C de longueur supérieure ou égale à 1 et une flèche β, les cordes ${}_tC, C_t, {}_sC, C_s$ et B_β lorsqu'elles existent sont uniquement déterminées.

Théorème 3.9. *Les suites presque scindées de* $\operatorname{mod} A$ *à un seul terme indécomposable médian sont les suites :*

$$0 \to U(\beta) \to N(\beta) \to V(\beta) \to 0$$

où on a que β *est une flèche de* Q_A, $N(\beta) = M(B_\beta)$, $U(\beta) = M(\gamma_1^{-1} \dots \gamma_r^{-1})$, $V(\beta) = M(\delta_s^{-1} \dots \delta_1^{-1})$ *et les morphismes sont l'inclusion et la projection canoniques.*

Démonstration. Voir [12], section 3. □

Théorème 3.10. *Soit* C *une corde telle que* $M(C)$ *n'est ni projectif, ni isomorphe à un* $V(\beta)$. *Alors, la suite presque scindée finissant en* $M(C)$ *vérifie* $\alpha(M(C)) = 2$ *et est construite de la manière suivante :*

(00) Si C *ne commence pas dans un creux et ne finit pas dans un creux, la suite est :*

$$0 \longrightarrow M({}_sC_s) \longrightarrow M({}_sC) \oplus M(C_s) \longrightarrow M(C) \longrightarrow 0.$$

(01) Si C *ne commence pas dans un creux mais finit dans un creux, la suite est :*

$$0 \longrightarrow M({}_sD) \longrightarrow M({}_sC) \oplus M(D) \longrightarrow M(C) \longrightarrow 0,$$

où D *est telle que* $C = D_t$.

(10) Si C *commence dans un creux mais ne finit pas dans un creux, la suite est :*

$$0 \longrightarrow M(D_s) \longrightarrow M(D) \oplus M(C_s) \longrightarrow M(C) \longrightarrow 0,$$

où D *est telle que* $C = {}_tD$.

(11) Si C ne commence pas dans un creux et ne finit pas dans un creux, la suite est :

$$0 \longrightarrow M(D) \longrightarrow M({}_tD) \oplus M(D_t) \longrightarrow M(C) \longrightarrow 0,$$

où D est telle que $C = {}_tD_t$.

Dans chaque cas, les morphismes sont les injections et projections canoniques.

Démonstration. Voir [12], section 3. □

On obtient ainsi une description de toutes les suites presque scindées dans $\operatorname{mod} A$. En particulier, on remarque que si A est une algèbre de cordes de représentation finie, alors $\alpha(\Gamma_A) \leq 2$. On termine cette section par une description en termes de cordes des $A-$modules projectifs indécomposables.

Définition 3.11. [Module unisériel] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. On dit qu'un $A-$module M est *unisériel* s'il admet une unique suite de composition.

Soit $a \in Q_0$ et P_a le $A-$module projectif indécomposable au point a. On a $P_a = M(ID)$ où D est une corde directe, I est une corde inverse, $s(D) = a$ et ID commence et finit dans un creux. Si $l(D) = l(I) = 0$, alors $P_a = S_a$. Supposons que $D = \beta_1\beta_2 \dots \beta_r$ avec $r \geq 1$. Alors, $M(\beta_2 \dots \beta_r)$ est un facteur direct de $\operatorname{rad}(P_a)$ et l'inclusion $M(\beta_2 \dots \beta_r) \hookrightarrow P_a$ est tout simplement l'inclusion canonique $M(\beta_2 \dots \beta_r) \hookrightarrow M({}_t(\beta_2 \dots \beta_r))$. De même, supposons que $I = \gamma_s^{-1} \dots \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}$ avec $s \geq 1$. Alors, $M(\gamma_s^{-1} \dots \gamma_2^{-1})$ est un facteur direct de $\operatorname{rad}(P_a)$ et l'inclusion $M(\gamma_s^{-1} \dots \gamma_2^{-1}) \hookrightarrow P_a$ est tout simplement l'inclusion canonique $M(\gamma_s^{-1} \dots \gamma_2^{-1}) \hookrightarrow M((\gamma_s^{-1} \dots \gamma_2^{-1})_t)$. Ainsi, $\operatorname{rad}(P_a)$ s'écrit comme la somme directe d'au plus deux modules unisériels et les inclusions correspondantes sont les inclusions canoniques.

3.2 Algèbres inclinées itérées

Dans la dernière section de ce chapitre, nous nous restreindrons au cas des $\mathbf{k}-$algèbres inclinées itérées. Ces algèbres sont les $\mathbf{k}-$algèbres de dimension finie provenant d'une algèbre héréditaire par un nombre fini d'applications d'un procédé appelé *procédé d'inclinaison*. Nous nous intéresserons particulièrement aux algèbres inclinées itérées de type $\mathbb{A}$.

Les algèbres inclinées itérées ont été introduites en 1981 par Assem et Happel [3] sous le nom d'algèbres inclinées généralisées. L'étude de ces algèbres a d'abord mené en 1984 à une caractérisation des extensions triviales de représentation finie. Pour une $\mathbf{k}-$algèbre A de dimension finie sobre et connexe, il a été prouvé que l'extension triviale $T(A)$ de A est de représentation finie de classe de Cartan Δ si et seulement si A est inclinée itérée de type Δ (voir [4] et [24]). On a ensuite découvert l'équivalence dérivée, c'est-à-dire qu'une algèbre A est inclinée itérée de type Δ si et seulement si les catégories triangulées $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} A)$ et $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} \mathbf{k}\Delta)$ sont équivalentes (voir [24]).

En particulier, dans [3], les auteurs démontrent un intérêt plus poussé envers les algèbres inclinées itérées de type $\mathbb{A}$ et en donnent une caractérisation en termes de carquois liés (voir proposition 3.19). Ces algèbres sont en particulier des algèbres aimables et sont par conséquent stables pour l'équivalence dérivée, c'est-à-dire que si une algèbre aimable A est dérivée équivalente à une algèbre B, alors l'algèbre B est elle aussi aimable (voir [29]). Par conséquent, toute algèbre dérivée équivalente à une algèbre inclinée itérée de type $\mathbb{A}$ est est elle-même inclinée itérée de type $\mathbb{A}$. On possède également pour toute algèbre aimable A, grâce à Avella-Alaminos et Geiss [8], un invariant dérivé $\phi_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que si A et B sont deux algèbres aimables dérivées équivalentes, alors $\phi_A = \phi_B$. Si de plus les algèbres A et B sont inclinées itérées de type $\mathbb{A}$, on a $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} A) \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{mod} B)$

si et seulement si $\phi_A = \phi_B$ (voir [8]).

Les algèbres aimables apparaissent également dans plusieurs autres études, en particulier celle des algèbres inclinées itérées de type $\widetilde{\mathbb{A}}$ pour laquelle la notion d'algèbre aimable a été introduite. Dans [2], les auteurs démontrent que les algèbres inclinées amassées provenant de triangulations du disque ou de la couronne avec des points marqués sur la frontière sont aimables, et sont en fait les seules algèbres inclinées amassées aimables. On retrouve également ces algèbres dans la classification des algèbres dérivées équivalentes à des algèbres m-inclinées amassées de types $\mathbb{A}$ et $\widetilde{\mathbb{A}}$ (voir [11], [22] et [23]).

Nous donnons ici la définition et quelques propriétés formelles des algèbres inclinées itérées de type $\mathbb{A}$.

Définition 3.12. [Module inclinant] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. On dit qu'un $A-$module T est *inclinant* si :

(1) Il existe une suite exacte courte de $A-$modules

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

avec P et P' projectifs.

(2) Toute suite exacte courte de $A-$modules de la forme

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow E \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

est scindée.

(3) Il existe une suite exacte courte de $A-$modules

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow 0$$

où T_1 et T_2 sont des facteurs directs de sommes directes de copies de T.

Définition 3.13. [Algèbre inclinée de type Q] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et Q un carquois. On dit que A est *inclinée de type* Q s'il existe une algèbre héréditaire $H \cong \mathbf{k}Q$ et un H-module inclinant T tels que $A = \mathrm{End}_H(T)$.

Définition 3.14. [Paire de torsion, paire de torsion scindée] Une paire $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de sous-catégories additives pleines de $\mathrm{mod}\, A$ est une *paire de torsion* si :

(1) Pour tous $T \in \mathcal{T}_0, F \in \mathcal{F}_0$, on a $\mathrm{Hom}_A(T, F) = 0$.

(2) Si $\mathrm{Hom}_A(T, Y) = 0$ pour tout $T \in \mathcal{T}_0$, alors $Y \in \mathcal{F}_0$.

(3) Si $\mathrm{Hom}_A(X, F) = 0$ pour tout $F \in \mathcal{F}_0$, alors $X \in \mathcal{T}_0$.

Dans ce cas, les modules appartenant à $\mathcal{T}$ sont appelés des *modules de torsion* et les modules appartenant à $\mathcal{F}$ sont appelés des *modules sans torsion*. On dit qu'une paire de torsion est *scindée* si tout $A-$module indécomposable est de torsion ou sans torsion.

Exemple 3.15. (1) Étant donné un $A-$module inclinant T, posons $\mathcal{T}(T)$ l'ensemble des $A-$modules X engendrés par T et $\mathcal{F}(T) = \{Y \in (\mathrm{mod}\, A)_0 \mid \mathrm{Hom}_A(T, Y) = 0\}$. Alors, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une paire de torsion dans $\mathrm{mod}\, A$.
(2) Soit T un $A-$module inclinant et $B = \mathrm{End}_A(T)$. Posons $\mathcal{X}(T) = \{Y \in (\mathrm{mod}\, B)_0 \mid Y \underset{B}{\otimes} T = 0\}$ et $\mathcal{Y}(T) = \{X \in (\mathrm{mod}\, B)_0 \mid \mathrm{Tor}_1^B(X, T) = 0\}$. Alors, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est une paire de torsion dans $\mathrm{mod}\, B$.

Démonstration. Voir [24], section III.4. □

Définition 3.16. [Algèbre inclinée itérée de type Q] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. On dit que A est une algèbre inclinée itérée de type Q s'il existe une algèbre héréditaire $H \cong \mathbf{k}Q$ et des triplets $(A_i, T_i, A_{i+1} = \mathrm{End}_{A_i}(T_i))$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tels que $A_0 = H$, $A_n = A$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, T_i est un A_i-module inclinant tel que la paire de torsion $(\mathcal{X}(T_i), \mathcal{Y}(T_i))$ soit scindée dans $\mathrm{mod}\, A_{i+1}$.

En vertu de [3], on dispose du théorème suivant :

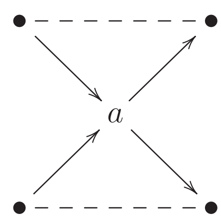
Théorème 3.17. *Soit $A = \mathbf{k}Q/I$ une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie. Alors, A est inclinée itérée de type $\mathbb{A}$ si et seulement si le carquois lié (Q, I) satisfait aux conditions suivantes :*

(1) Le carquois Q est un arbre ;

(2) Tout point de Q a au plus quatre voisins ;

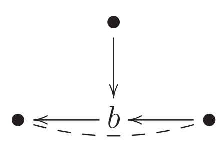
(3) L'idéal I est quadratique ;

(4) Si un point $a \in Q_0$ a quatre voisins, alors le carquois :

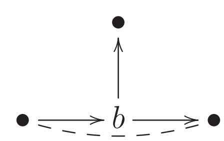


est un sous-carquois plein de (Q, I) ;

(5) Si un point $b \in Q_0$ a trois voisins, alors un des deux carquois :



ou

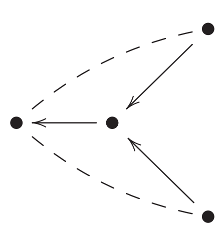


est un sous-carquois plein de (Q, I).

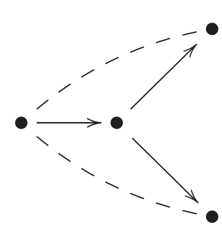
Dans chaque cas, les lignes pointillées indiquent les relations zéro.

Démonstration. Voir [3]. □

Remarque 3.18. En particulier, il n'existe pas de sous-carquois plein de (Q, I) d'une des formes :

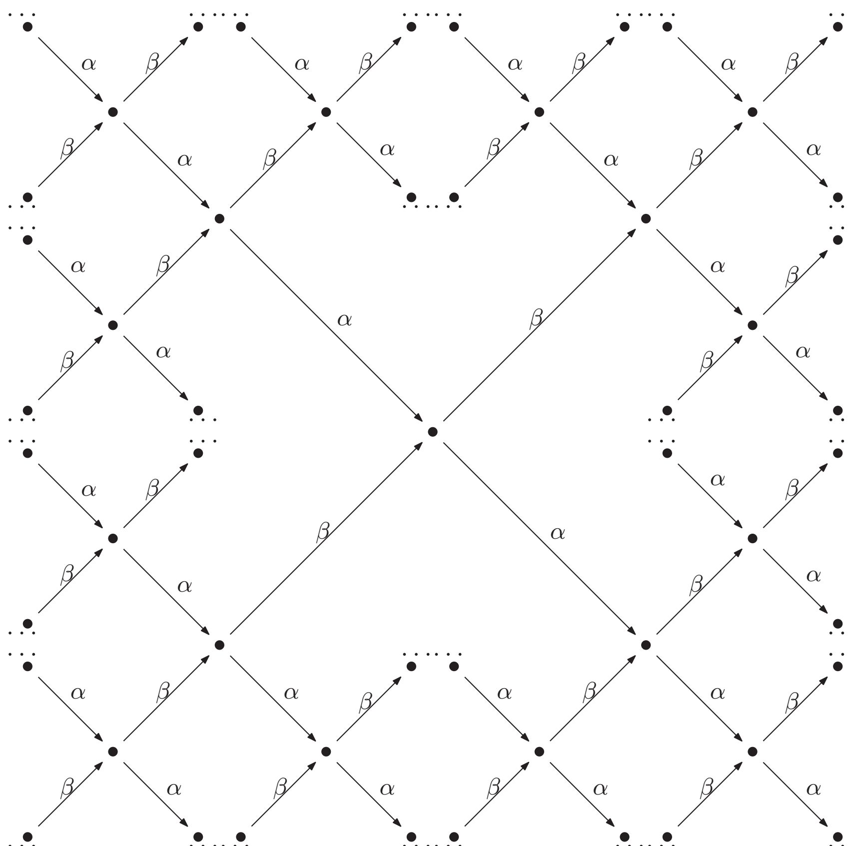


ou



où les lignes pointillées indiquent les relations zéro, ni de tels carquois sans aucune relation.

Proposition 3.19. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie sobre et connexe. Alors, A est une algèbre inclinée itérée de type $\mathbb{A}$ si et seulement si le carquois lié (Q, I) est un sous-carquois plein fini du carquois infini suivant :*



lié par l'idéal engendré par tous les chemins de la forme $\alpha\beta$ ou $\beta\alpha$.

Démonstration. Voir [24], théorème IV.6.7. $\square$

Proposition 3.20. *Soit A une algèbre inclinée itérée de type $\mathbb{A}$. Alors A est une algèbre de cordes de représentation finie.*

Démonstration. Cela suit de la définition d'une algèbre de cordes et du théorème 3.17. □

3.3 Puissance annulatrice du radical en fonction du carquois ordinaire

Tel qu'annoncé en début de chapitre, l'objectif de cette dernière section est de donner la valeur de la puissance annulatrice du radical $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ de la catégorie $\operatorname{mod} A$ en fonction du carquois ordinaire Q_A si A est une algèbre inclinée itérée de type $\mathbb{A}$.

Soient $\operatorname{mod} A^{op}$ la catégorie des $A-$modules à gauche de type fini et $D = \operatorname{Hom}_{\mathbf{k}}(\_, \mathbf{k}) : \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A^{op}$ la dualité standard (voir [5]). On a le résultat suivant :

Proposition 3.21. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme irréductible. Alors :*

(1) $D(f) : DY \longrightarrow DX$ est un morphisme irréductible.

(2) $d_r(f) = d_l(D(f))$.

(3) $d_l(f) = d_r(D(f))$.

Démonstration. (1) On a que $D(f)$ n'est ni une section, ni une rétraction. De plus, supposons que $D(f) = f_1 f_2$. Alors $f = DD(f) = D(f_1 f_2) = D(f_2)D(f_1)$ implique que $D(f_1)$ est une section ou $D(f_2)$ est une rétraction, c'est à dire f_1 est une rétraction ou f_2 est une section, donc $D(f)$ est irréductible.
(2) On a qu'il existe un entier n et un morphisme $g \in \operatorname{rad}_A^n(Y, Z) \setminus \operatorname{rad}_A^{n+1}(Y, Z)$ tels que $gf \in \operatorname{rad}_A^{n+2}(X, Z)$ si et seulement si il existe un entier n et un morphisme $D(g) \in \operatorname{rad}_{A^{op}}^n(DZ, DY) \setminus \operatorname{rad}_{A^{op}}^{n+1}(DZ, DY)$ tels que $D(gf) = D(f)D(g) \in \operatorname{rad}_{A^{op}}^{n+2}(DZ, DX)$. D'où $d_r(f) = d_l(D(f))$.
(3) De même, on a qu'il existe un entier n et un morphisme $g \in \operatorname{rad}_A^n(Z, X) \setminus \operatorname{rad}_A^{n+1}(Z, X)$

tels que $fg \in \operatorname{rad}_A^{n+2}(Z, Y)$ si et seulement si il existe un entier n et un morphisme $D(g) \in \operatorname{rad}^n_{A^{op}}(DX, DZ) \backslash \operatorname{rad}^{n+1}_{A^{op}}(DX, DZ)$ tels que $D(fg) = D(g)D(f) \in \operatorname{rad}^{n+2}_{A^{op}}(DY, DZ)$. D'où $d_r(f) = d_l(D(f))$. $\square$

Pour une algèbre donnée A de carquois ordinaire Q_A avec relations, on définit le carquois opposé Q_A^{op} de telle sorte qu'à tout point $a \in (Q_A)_0$ on associe un point $a^o \in Q_A^{op}$ et à toute flèche $\beta : a \longrightarrow b$ on associe une flèche $\beta^o : b^o \longrightarrow a^o$. En outre, si on inverse les relations, on obtient le carquois lié de l'algèbre opposée A^{op}.

Lemme 3.22. *Soient A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie, $a \in (Q_A)_0$ et $g_a : I_a \twoheadrightarrow I_a/\operatorname{soc}(I_a)$ la projection canonique. Si g_a est non nul, alors $d_l(g_a) = d_r(f_{a^o})$ où f_{a^o} désigne l'inclusion canonique* $\operatorname{rad}(P_{a^o}) \hookrightarrow P_{a^o}$ *dans la catégorie* $\operatorname{mod} A^{op}$.

Démonstration. On a $D(g_a) : D(I_a/\operatorname{soc}(I_a)) \longrightarrow D(I_a)$ avec $D(I_a/\operatorname{soc}(I_a)) = \operatorname{rad} P_{a^o}$ et $D(I_a) = P_{a^o}$. De plus, en vertu de la proposition 1.49, g_a est minimal presque scindé à gauche donc $D(g_a)$ est minimal presque scindé à droite, d'où, toujours en vertu de la proposition 1.49, $D(g_a) = f_{a^o}$. Alors, en vertu de la proposition 3.21, $d_l(g_a) = d_r(D(g_a)) = d_r(f_{a^o})$. $\square$

On s'intéresse maintenant au calcul du degré à droite de l'inclusion $\operatorname{rad} P \hookrightarrow P$ où P parcourt l'ensemble des $A-$modules projectifs indécomposables non simples.

Lemme 3.23. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie et B une algèbre quotient de A. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme irréductible dans* $\operatorname{mod} A$ *et X, Y sont des B-modules indécomposables, alors $f : X \longrightarrow Y$ est irréductible dans* $\operatorname{mod} B$.

Démonstration. Cela suit directement du fait que si B une algèbre quotient de A, alors $\operatorname{mod} B$ est une sous-catégorie pleine de $\operatorname{mod} A$. $\square$

Lemme 3.24. *Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie inclinée itérée de type $\mathbb{A}$, B une algèbre quotient de A et $\chi : X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} X_n$ un chemin sectionnel dans Γ_A. Si pour tout $i = 0, \dots, n$, X_i est un B-module, alors χ est aussi un chemin sectionnel dans Γ_B.*

Démonstration. En vertu du lemme 3.23, les morphismes $f_1, \dots, f_n$ sont irréductibles dans mod B, donc χ est un chemin dans Γ_B. Il reste à montrer que ce chemin est sectionnel, c'est-à-dire que pour tout $i \in 2, \dots, n$, on a $\tau_B X_i \ncong X_{i-2}$. Supposons au contraire que $\tau_B X_i \cong X_{i-2}$ pour un certain i. Alors, en vertu de [5] (lemme VIII.5.2), il existe un monomorphisme $h : X_{i-2} \longrightarrow \tau_A X_i$. Or, en vertu de [21] (proposition page 50 et illustration page 53), puisque A est une algèbre inclinée itérée de type $\mathbb{A}$ et que le chemin χ est sectionnel, on a $\mathrm{Hom}_A(X_{i-2}, \tau_A X_i) = 0$, une contradiction. Donc χ est sectionnel dans Γ_B. □

Définition 3.25. [Déformation] Soit (Γ, τ) un carquois à translation. On dit qu'une marche u se *déforme* à une autre marche v si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :

(1) $u = v$;

(2) $u = u'\alpha\alpha^{-1}v'$ (ou $u = u'\alpha^{-1}\alpha v'$) et $v = u'v'$, où u', v' sont des marches et $\alpha \in \Gamma_1$;

(3) $u = u'\alpha\beta v'$ et $v = u'\delta\gamma v'$ (ou $u = u'\beta^{-1}\alpha^{-1}v'$ et $v = u'\gamma^{-1}\delta^{-1}v'$), où u', v' sont des marches et $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ sont des flèches telles que $\alpha\beta$ et $\delta\gamma$ se trouvent dans la même maille.

Définition 3.26. [Relation d'homotopie] Soit (Γ, τ) un carquois à translation. La *relation d'homotopie* est définie sur l'ensemble des marches de Γ comme étant la plus petite relation d'équivalence $\sim$ telle que :

(1) Pour toute flèche $\alpha : x \to y$ avec $x, y \in \Gamma_0$, on a $\alpha\alpha^{-1} \sim \varepsilon_x$ et $\alpha^{-1}\alpha \sim \varepsilon_y$;

(2) Si $\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n$ appartiennent à une même maille, alors $\alpha_i\beta_i \sim \alpha_j\beta_j$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$;

(3) Si u, v, w, w' sont des marches et $u \sim v$, alors $wu \sim wv$ et $uw' \sim vw'$ lorsque ces composées sont définies.

Définition 3.27. [Groupe fondamental] Soient (Γ, τ) un carquois à translation et $x \in \Gamma_0$. Le *groupe fondamental* de Γ en x est l'ensemble $\Pi(\Gamma, x)$ des classes d'homotopie des marches de source et de but x, muni de la composition induite par la composition usuelle des marches.

Remarque 3.28. Si Γ est connexe, le groupe fondamental ne dépend pas du choix de x. On le note alors $\Pi(\Gamma)$.

Définition 3.29. [Algèbre simplement connexe] Soit A une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie sobre et connexe de représentation finie. On dit que A est *simplement connexe* si le groupe fondamental $\Pi(\Gamma_A)$ est trivial.

Définition 3.30. [Relation $\approx$] Soient (Γ, τ) un carquois à translation et u, v deux marches de Γ. On note $u \approx v$ s'il existe une suite de marches $u = u_0, \ldots, u_n = v$ telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, u_i se déforme à u_{i+1} ou u_{i+1} se déforme à u_i.

Lemme 3.31. *La relation $\approx$ est une relation d'équivalence et, pour toutes marches u, v de Γ, on a $u \sim v$ si et seulement si $u \approx v$.*

Démonstration. On a trivialement que la relation $\approx$ est réflexive, symétrique et transitive telle que $u \approx v$ implique que $u \sim v$ pour toutes marches u, v de Γ. Réciproquement, puisque $\sim$ est minimale, si $u \sim v$, alors $u \approx v$, pour toutes marches u, v de Γ. □

Proposition 3.32. *Soient A une $\boldsymbol{k}-$algèbre de dimension finie et de représentation finie et I un $A-$module injectif indécomposable. Supposons qu'il existe des marches réduites u*

et v de Γ_A de source I et de but X. Si $u = \mu w$ avec μ une flèche et w une marche et v ne commence pas par μ, alors A n'est pas simplement connexe.

Démonstration. Supposons au contraire que A est simplement connexe. Alors $uv^{-1} \sim \varepsilon_I$, d'où $u \sim v$. Par conséquent, $u \approx v$. Ainsi, il existe une suite $u = u_0, \ldots, u_n = v$ de marches Γ_A telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, u_i se déforme à u_{i+1} ou u_{i+1} se déforme à u_i. Montrons que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la forme réduite de u_i commence par μ. Par hypothèse, $u = u_0$ est réduite et commence par μ. Soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que la forme réduite de u_i commence par μ. Alors, il y a quatre cas possibles :

Si $u_{i+1} = u_i$, le résultat est trivial.

Si $u_i = u_i'\alpha\alpha^{-1}u_{i+1}'$ (ou $u_i = u_i'\alpha^{-1}\alpha u_{i+1}'$) et $u_{i+1} = u_i'u_{i+1}'$ ou si $u_{i+1} = u_{i+1}'\alpha\alpha^{-1}u_i'$ (ou $u_{i+1} = u_{i+1}'\alpha^{-1}\alpha u_i'$) et $u_i = u_{i+1}'u_i'$, où α est une flèche, alors u_{i+1} et u_i ont la même forme réduite, d'où la forme réduite de u_{i+1} commence par μ.

Si $u_i = u_i'\beta^{-1}\alpha^{-1}u_{i+1}'$ et $u_{i+1} = u_i'\gamma^{-1}\delta^{-1}u_{i+1}'$, où u_i', u_{i+1}' sont des marches et $\alpha\beta, \delta\gamma$ se trouvent dans la même maille, alors puisque u_i commence par μ, on a que u_i' commence par μ, d'où u_{i+1} aussi.

Enfin, si $u_i = u_i'\alpha\beta u_{i+1}'$ et $u_{i+1} = u_i'\delta\gamma u_{i+1}'$, où u_i', u_{i+1}' sont des marches et $\alpha\beta, \delta\gamma$ se trouvent dans la même maille, alors, puisque I est injectif, il n'existe pas de maille de source I et donc on a nécessairement que u_i' commence par μ, d'où $u_{i+1} = u_i'\delta\gamma u_{i+1}'$ commence également par μ.

En vertu du principe de récurrence, la forme réduite de u_i commence par μ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. En particulier, la marche réduite $v = u_n$ commence par μ, une contradiction, d'où le résultat. $\square$

Lemme 3.33. *Soit A une $\boldsymbol{k}-$algèbre de dimension finie inclinée itérée de type $\mathbb{A}$ et $a \in Q_0$. Si $P_a \ncong S_a$ et $\operatorname{rad} P_a$ est décomposable, alors la configuration du degré de l'inclusion*

$\mathrm{rad}(P_a) \hookrightarrow P_a$ *est la suivante :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \tau M_1^i \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & M_1^i = \mathrm{Coker}\ \iota_1 \arrow[dr] & & & \\
 & & \tau M_1^{i-1} \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & M_1^{i-1} \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & N_1^{i+1} \arrow[dr, dotted] & & \\
M(\beta_2 \dots \beta_r) = M_1 \arrow[urr, dotted] \arrow[dr, "\iota_1"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & M_1^1 \arrow[urr, dotted] & & & & & N_1^{i+(j-1)} \arrow[dr] & \\
 & P_a \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & & S_a = M(\varepsilon_a) \\
M(\gamma_r^{-1} \dots \gamma_2^{-1}) = M_2 \arrow[ur, "\iota_2"] \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[drr, dotted] & & M_2^1 \arrow[drr, dotted] & & & & & N_2^{j+(i-1)} \arrow[ur] & \\
 & & \tau M_2^{j-1} \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & M_2^{j-1} \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & N_2^{j+1} \arrow[ur, dotted] & & \\
 & & & \tau M_2^j \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & M_2^j = \mathrm{Coker}\ \iota_2 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

où les lignes pointillées désignent les translations d'Auslander-Reiten, $i = d_r(\iota_1)$, $j = d_r(\iota_2)$ *et les chemins* $G_1 : P_a \longrightarrow M_1^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_1^i$, $H_1 : M_1^i \longrightarrow \dots \longrightarrow M_1^{i+(j-1)} \longrightarrow S_a$, $G_2 : P_a \longrightarrow M_2^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_2^j$ *et* $H_2 : M_2^j \longrightarrow \dots \longrightarrow M_2^{j+(i-1)} \longrightarrow S_a$ *sont sectionnels et forment un parallélogramme.*

Démonstration. En vertu des théorèmes 2.14 et 2.16, on connaît déjà l'existence de deux chemins sectionnels H_1 et H_2 de source P_a et de buts respectifs $\mathrm{Coker}\,\iota_1$ et $\mathrm{Coker}\,\iota_2$. D'autre part, puisque $\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}\,\iota_1, S_a)$ et $\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}\,\iota_2, S_a)$ sont non nuls, il existe des chemins dans Γ_A de sources $\mathrm{Coker}\,\iota_1$ et $\mathrm{Coker}\,\iota_2$ et de but S_a. De plus, puisque A est simplement connexe, le polygone formé par les deux chemins sectionnels et les deux chemins de sources $\mathrm{Coker}\,\iota_1$ et $\mathrm{Coker}\,\iota_2$ et de but S_a ne contient pas de $A-$module injectif. En effet, sinon il existerait un $A-$module injectif I et deux marches réduites de source I et de but P_a ne commençant pas par la même flèche, une contradiction à la proposition 3.32.

On peut alors construire le parallélogramme dont trois des sommets sont P_a, $\operatorname{Coker}\iota_1$ et $\operatorname{Coker}\iota_2$.

Soit Y le quatrième sommet. Puisque $\dim(\operatorname{Coker}\iota_i) = \dim(P_a) - \dim(M_i)$ pour $i \in 1, 2$, la suite exacte courte $0 \longrightarrow P_a \longrightarrow \operatorname{Coker}\iota_1 \oplus \operatorname{Coker}\iota_2 \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ nous donne que $\dim(Y) = \dim(\operatorname{Coker}\iota_1) + \dim(\operatorname{Coker}\iota_2) - \dim(P_a) = 1$ car $M_1 \oplus M_2 = \operatorname{rad}(P_a)$, d'où Y est simple. Ainsi, puisque $\operatorname{Hom}(P_a, Y)$ est non nul, on obtient que $Y = S_a$. D'où la conclusion. $\square$

Lemme 3.34. *Soient $A = \mathbf{k}Q/I$ une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie inclinée itérée de type $\mathbb{A}$ et $a \in Q_0$. Si $P_a \ncong S_a$, soient $f_a : \operatorname{rad}(P_a) \hookrightarrow P_a$ l'inclusion canonique et η le nombres de cordes de Q_A de source a commençant par une flèche. Alors, $d_r(f_a) = \eta$.*

Démonstration. On a $P_a = M(ID)$ avec I directe et D inverse telles que $l(ID) \geq 1$, puisque $P_a \ncong S_a$. Si $\operatorname{rad}(P_a)$ est indécomposable, sans perdre de généralité on peut supposer que $P_a = M(D)$, où $D = \beta_1\beta_2\ldots\beta_r$ avec $r \geq 1$ et $\beta_i \in Q_1$ pour tout i. Soit $P_a = Y_{n+1} \xrightarrow{v_n} Y_n \xrightarrow{v_{n-1}} \ldots \xrightarrow{v_1} Y_1$, où $Y_1 \cong \operatorname{Coker} f_a = S_a$ le chemin sectionnel associé à $d_r(f_a)$ donné par le théorème 2.14. Posons $v = v_1 ... v_n$. Alors, on a que S_a est un facteur direct de $\operatorname{top} Y_i$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n+1\}$, sinon il n'existerait pas de morphisme non nul $Y_i \longrightarrow S_a$, une contradiction, car $g \neq 0$. Donc, pour tout $i \in \{2, \ldots, n+1\}$, il existe une corde C_i telle que $Y_i = M(C_i)$, $s(C_i) = a$ et $C_i = \beta_1 C_i'$ où C_i' est une corde de source $b(\beta_1)$, peut-être égale à $1_{b(\beta_1)}$. D'où $d_r(f_a) \leq \eta$.

Soit maintenant $M = M(C)$ où C est une corde de source a commençant par une flèche. Montrons qu'il existe $i \in \{2, \ldots, n+1\}$ tel que $M \cong Y_i$. Tout d'abord, on sait qu'il existe un épimorphisme $\psi : M \longrightarrow S_a$. Ensuite, S_a étant un facteur direct de $\operatorname{top} M$, P_a est un facteur direct de la couverture projective de M et donc il existe un morphisme non nul $\varphi : P_a \longrightarrow M$. De plus, ce morphisme φ peut être choisi de telle sorte que la composée

$\psi\varphi$ soit non nulle. Ainsi, il existe un morphisme non nul $h : P_a \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} S_a$. Il reste à montrer que ce morphisme est sur le chemin sectionnel. Or, P_a et S_a sont sur le chemin sectionnel et $\mathrm{Hom}_A(P_a, S_a)$ est non nul, donc en vertu de [21], on a $\dim_{\mathbf{k}}(\mathrm{Hom}_A(P_a, S_a)) \leq 1$, donc $\dim_{\mathbf{k}}(\mathrm{Hom}_A(P_a, S_a)) = 1$ et tout morphisme non nul de P_a vers S_a est un multiple de v. Donc, en vertu de [28] (théorème 2.10), il existe $i \in \{2, \ldots, n+1\}$ tel que $M = Y_i$ et ainsi $d_r(f_a) \geq \eta$, ce qui termine la preuve de l'énoncé dans le cas où $\mathrm{rad}(P_a)$ est indécomposable.

Supposons maintenant que $\mathrm{rad}(P_a) = M_1 \oplus M_2$ avec M_1, M_2 deux $A-$modules indécomposables. Alors, $P_a = M(ID)$ où $D = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_r$ et $I = \gamma_s^{-1} \ldots \gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}$ avec $r, s \geq 1$. Notons $\iota_1 : M_1 = M(\beta_2 \ldots \beta_r) \hookrightarrow P_a$ et $\iota_2 : M_2 = M(\gamma_s^{-1} \ldots \gamma_2^{-1}) \hookrightarrow P_a$ les inclusions canoniques. Montrons que $d_r(\iota_i) = \eta_i$ pour $i = 1, 2$ où η_1 est le nombre de cordes commençant par γ_1 et η_2 est le nombre de cordes commençant par β_1. En vertu du lemme 3.33, la configuration de $f_a = [\iota_1\ \iota_2]$ dans Γ_A est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Coker}\,\iota_1 \arrow[ddr, dash, "H_1"] & \\
M_1 \arrow[dr, "\iota_1"] & & & \\
 & P_a \arrow[uur, dash, "G_1"] \arrow[ddr, dash, "G_2"'] & & S_a \\
M_2 \arrow[ur, "\iota_2"'] & & & \\
 & & \mathrm{Coker}\,\iota_2 \arrow[uur, dash, "H_2"'] &
\end{tikzcd}$$

où, pour $i = 1, 2$, G_i est le chemin sectionnel correspondant à $d_r(\iota_i)$ (dont l'existence est donnée par le théorème 2.14), H_i est un chemin sectionnel de $\mathrm{Coker}\,\iota_i$ vers S_a, $S_a = \mathrm{Coker}\, f_a$ et le quadrilatère de sommets $P_a, \mathrm{Coker}\,\iota_1, S_a, \mathrm{Coker}\,\iota_2$ est un parallélogramme.

Ainsi, $d_r(\iota_1) = l(G_1) = l(H_2)$ et $d_r(\iota_2) = l(G_2) = l(H_1)$.

Considérons les algèbres quotient $A_1 = A/\langle \beta_1 \rangle$ et $A_2 = A/\langle \gamma_1 \rangle$ et montrons que les $A-$modules appartenant au chemin sectionnel H_1 (respectivement H_2) sont des A_1-modules (respectivement A_2-modules). Pour cela, considérons la suite presque scindée finissant en S_a. Puisque $\operatorname{rad}(P_a)$ est non nul et décomposable, $S_a = M(C)$ où $C = \varepsilon_a$ est une corde ne commençant pas dans un creux (sans perdre de généralité, parce que $\gamma_1^{-1}C$ est une corde) et ne finissant pas dans un creux (parce que $C\beta_1$ est une corde). Alors, la suite presque scindée finissant en S_a est de la forme (00) du théorème 3.10, c'est-à-dire :

$$0 \longrightarrow M({}_sC_s) \longrightarrow M({}_sC) \oplus M(C_s) \longrightarrow M(C) \longrightarrow 0,$$

où ${}_sC$ est une corde de but a finissant par γ_1 et ne finissant pas dans un creux, C_s est une corde de source a commençant par β_1 et ne commençant pas dans un creux et où ${}_sC_s = ({}_sC)_s = {}_s(C_s)$ est une extension par la droite (mais pas par la gauche) de ${}_sC$ et une extension par la gauche (mais pas par la droite) de C_s. Ainsi, puisque Q_A est un arbre, ${}_sC$ ne contient pas la flèche β_1 (ni son inverse) et C_s ne contient pas la flèche γ_1 (ni son inverse).

Soit $C^0 = 1_a$, $C^1 := {}_sC$ et $H_j : \operatorname{Coker} \iota_j = M(C^k) \longrightarrow M(C^{k-1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow M(C^1) \longrightarrow S_a$ le chemin sectionnel contenant $M(C^1)$ et S_a (où $j = 1$ ou $j = 2$). Montrons que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, C^i est une corde de but a finissant par γ_1 et ne contenant pas β_1. Pour $i = 1$, $C^1 = {}_sC$ est une corde de but a finissant par γ_1, ne contenant pas β_1, ne finissant pas dans un creux et telle que $\tau(M(C^0))$ est donné par ${}_sC_s = ({}_sC)_s$ qui est une extension par la droite de C^1. Soit $M(C^i)$ un module sur le chemin sectionnel où C^i une corde de but a finissant par γ_1, ne contenant pas β_1, ne finissant pas dans un creux et telle que $\tau(M(C^{i-1}))$ est donné par une extension par la droite de C^i. Si $\alpha(M(C^i)) = 1$, alors $i = k$ et la récurrence se termine. Sinon, puisque C^i ne finit pas dans un creux, la suite presque scindée finissant en $M(C^i)$ est de la forme (00) ou (10) du théorème 3.10, c'est-à-dire :

$$0 \longrightarrow M({}_sC^i_s) \longrightarrow M({}_sC^i) \oplus M(C^i_s) \longrightarrow M(C^i) \longrightarrow 0,$$

ou :

$$0 \longrightarrow M(D^i_s) \longrightarrow M(D^i) \oplus M(C^i_s) \longrightarrow M(C^i) \longrightarrow 0.$$

Dans les deux cas, C^i_s est une extension par la droite de C^i alors que ${}_sC^i$ et D^i n'en sont pas. Alors, dans le premier cas, le module appartenant au chemin sectionnel contenant $M(C^1)$ et S_a est $M({}_sC^i)$ où $C^{i+1} = {}_sC^i$ est une corde de but a finissant par γ_1 et ne finissant pas dans un creux, ne contenant pas β_1 et de même, dans le deuxième cas, le module appartenant au chemin sectionnel contenant S_a et $M(C^i)$ est $M(D^i)$ où $C^i = {}_tD$ et donc $C^{i+1} = D^i$ est aussi une corde de but a finissant par γ_1 et ne finissant pas dans un creux, ne contenant pas β_1. De plus, dans les deux cas $\tau(M(C^i))$ est donné par une extension par la droite de C^i. En vertu du principe de récurrence, on a donc que pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$, C^i est une corde de but a finissant par γ_1 et ne contenant pas β_1. Ainsi, $j = 1$, d'où $H_j = H_1$, $M(C^k) = \operatorname{Coker} \iota_1$, $k = \eta_2$ et tous les modules appartenant à H_1 sont des A_1-modules. De la même manière, on peut montrer que tous les modules appartenant à H_2 sont des A_2-modules.

En vertu du lemme 3.24, on a donc que H_1 est sectionnel dans $A_1 = A/\langle\beta_1\rangle$. Or, dans A_1, le A_1-module P_a n'est rien d'autre que $\operatorname{Coker} \iota_1$ dont le radical est indécomposable, et donc $l(H_1) = d_r(\iota_2) = \eta_2$. De même, H_2 est sectionnel dans $A_2 = A/\langle\gamma_1\rangle$. Or, dans A_2, on a que P_a n'est rien d'autre que $\operatorname{Coker} \iota_2$ dont le radical est indécomposable, et donc $l(H_2) = d_r(\iota_1) = \eta_1$. Enfin, en vertu du théorème 2.16, on a $d_r(f_a) = d_r(\iota_1) + d_r(\iota_2) = \eta_1 + \eta_2 = \eta$, d'où le résultat. $\square$

Lemme 3.35. *Soient $A = \mathbf{k}Q/I$ une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie inclinée itérée de* *type $\mathbb{A}$ et $a \in Q_0$. Si $I_a \ncong S_a$, soient $g_a : I_a \twoheadrightarrow I_a/\operatorname{soc}(I_a)$ la projection canonique et κ le nombre de cordes de Q_A de source a commençant par une flèche inverse. Alors, $d_l(g_a) = \kappa$.*

Démonstration. En vertu du lemme 3.22, on a $d_l(g_a) = d_r(f_{a^o})$. Donc, en vertu du lemme 3.34, on a que $d_l(g_a)$ est égal au nombre de cordes de source a^o commençant par une flèche dans Q_A^{op}, ce qui correspond au nombre de cordes de but a finissant par une flèche dans Q_A, ou, de façon équivalente, au nombre de cordes de source a commençant par une flèche inverse dans Q_A. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 3.36. *Soit $A = \mathbf{k}Q/I$ une $\mathbf{k}-$algèbre de dimension finie inclinée itérée de type $\mathbb{A}$. Pour tout $a \in Q_A$, soit x_a le nombre de cordes de source a dans Q_A. Alors, la puissance annulatrice de $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ est $N = \max\{x_a + 1 \mid a \in Q_0\}$.*

Démonstration. Pour tout $a \in Q_A$, soient η_a le nombres de cordes de source a commençant par une flèche et κ_a le nombre de cordes de source a commençant par une flèche inverse. En vertu du théorème 2.24 et des lemmes 3.34 et 3.35, on a $N = \max\{\eta_a + \kappa_a + 1 \mid a \in Q_0\}$. Or, $x_a = \eta_a + \kappa_a$ pour tout $a \in Q_0$, d'où le résultat. $\square$

Exemple 3.37. Considérons l'algèbre A donnée par le carquois Q_A :

$$\begin{tikzcd}
8 \arrow[dr, "\alpha_6"] & & 5 & \\
& 6 \arrow[ur, "\beta_5"] \arrow[dr, "\alpha_3"] & & 2 \\
7 \arrow[ur, "\beta_6"] & & 3 \arrow[ur, "\beta_2"] \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
& 4 \arrow[ur, "\beta_3"] & & 1
\end{tikzcd}$$

lié par $I = \langle \alpha_6\beta_5, \beta_6\alpha_3, \alpha_3\beta_2, \beta_3\alpha_1 \rangle$. Alors, $x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 5, x_5 = 5, x_6 = 6, x_7 = 3, x_8 = 5$. D'où la puissance annulatrice de $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ est $N = 6+1 = 7$, donnée par x_3 et x_6. Explicitement, les six cordes de source 3 sont $\alpha_1, \beta_2, \beta_3^{-1}, \alpha_3^{-1}, \alpha_3^{-1}\alpha_6^{-1}$ et $\alpha_3^{-1}\beta_5$ et les six cordes de source 6 sont $\beta_5, \beta_6^{-1}, \alpha_6^{-1}, \alpha_3, \alpha_3\alpha_1$ et $\alpha_3\beta_3^{-1}$.

Exemple 3.38. Considérons l'algèbre A donnée par le carquois Q_A :

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & \\
 & 5 \arrow[ur, "\beta_4"] \arrow[dr, "\alpha_3"] & & 2 \\
6 \arrow[ur, "\beta_5"] & & 3 \arrow[ur, "\beta_2"] \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
 & & & 1
\end{tikzcd}$$

lié par $I = \langle \alpha_6\beta_5, \beta_6\alpha_3, \alpha_3\beta_2, \beta_3\alpha_1 \rangle$. Alors, $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 4, x_5 = 4, x_6 = 2$. D'où la puissance annulatrice de $\operatorname{rad}(\operatorname{mod} A)$ est $N = 5$, donnée par exemple par x_5.

Bibliographie

[1] I. Assem. *Algèbres et modules : cours et exercices*. Enseignement des mathématiques. Les Presses de l'Université d'Ottawa–Masson, Ottawa–Paris, 1997.

[2] I. Assem, T. Brüstle, G. Charbonneau-Jodoin, and P.-G. Plamondon. Gentle algebras arising from surface triangulations. *Algebra and Number Theory*, 4(2) :201–229, 2010.

[3] I. Assem and D. Happel. Generalized Tilted Algebras of Type $\mathbb{A}_n$. *Communications in Algebra*, 9(20) :2101–2125, 1981.

[4] I. Assem, D. Happel, and O. Roldán. Representation-finite trivial extension algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 33 :235–242, 1984.

[5] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of Representation Theory of Associative Algebras*. Number 65 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Toruń, 2006.

[6] I. Assem and A. Skowroński. Iterated tilted algebras of type $\mathbb{A}_n$ tilde. *Math. Z.*, 195 :269–290, 1987.

[7] M. Auslander, I. Reiten, and S.O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Number 36 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[8] D. Avella-Alaminos and C. Geiss. Combinatorial derived invariants for gentle algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 212 :228–243, 2008.

[9] R. Bautista. Irreducible morphisms and the radical of a module category. *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México*, 22 :83–135, 1982.

[10] S. Brenner and M.C.R. Butler. Generalization of the Bernstein-Gel'fand-Ponomarev Reflection Functors. *Springer Lecture Notes*, 832 :103–169, 1980.

[11] J. C. Bustamante and V. Gubitosi. Hochschild Cohomology and the Derived Class of m-Cluster Tilted Algebras of Type A. *Algebras and Representation Theory*, 17 :445–467, 2014.

[12] M.C.R. Butler and C.M. Ringel. Auslander-Reiten Sequences With Few Middle Terms and Applications to String Algebras. *Communications in Algebra*, 15(1-2) :145–179, 1987.

[13] C. Chaio. On the Harada and Sai bound. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 44(6) :1237–1245, 2012.

[14] C. Chaio. Degrees in Auslander-Reiten components with almost split sequences of at most two middle terms. *Journal of Algebra and Its Applications*, 14(7) :1–26, 2015.

[15] C. Chaio, F. Coelho, and S. Trepode. On the composite of irreducible morphisms in almost sectional paths. *J. Pure Appl. Algebra*, 212 :244–261, 2008.

[16] C. Chaio, P. Le Meur, and S. Trepode. Degrees of irreducible morphisms and finite-representation type. *J. London Math. Soc. II*, 84(1) :35–57, 2011.

[17] C. Chaio, M. I. Platzeck, and S. Trepode. On the degree of irreducible morphisms. *Journal of Algebra*, 281(1) :200–224, 2004.

[18] C. Chaio and S.Liu. A note on the radical of a module category. *Communications in Algebra*, 41(12) :4419–4424, 2013.

[19] C. Chaio and S. Trepode. The composite of irreducible morphisms in standard components. *Journal of Algebra*, 323, 2010.

[20] D. Eisenbud et J.A. de La Peña. Chains of maps between indecomposable modules. *J. Reine und Angewandte Mathematik*, 504 :29–35, 1998.

[21] P. Gabriel. Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. In *Representation Theory I*, volume 831 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 1–71. Springer Berlin Heidelberg, 1980.

[22] V. Gubitosi. Derived class of m-cluster tilted algebras of type A tilde. *ArXiv :1507.07484, À paraître*, 2015.

[23] V. Gubitosi. m-Cluster Tilted Algebras of type A tilde. *ArXiv :1506.08874, À paraître*, 2015.

[24] D. Happel. *Triangulated Categories in the Representation of Finite-Dimensional Algebras*. Number 119 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1988.

[25] O. Kerner and A. Skowroński. On module categories with nilpotent infinite radical. *Compositio Mathematica*, 77(3) :313–333, 1990.

[26] S. Liu. Degrees of irreducible maps and the shapes of Auslander-Reiten quivers. *J. London Math. Soc.*, 45(2) :32–54, 1992.

[27] S. Liu. Shapes of connected components of the Auslander-Reiten quivers of artin algebras. *Canad. Math. Soc. Conf. Proc.*, 19 :109–137, 1995.

[28] S. Liu. Auslander-Reiten theory in a Krull-Schmidt category. *Sao Paulo J. Math. Sci.*, 4 :425–472, 2010.

[29] J. Schröer and A. Zimmermann. Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras. *Mathematische Zeitschrift*, 244(3) :515–530, 2003.