Les groupes cycliques discrets d'isométries du bidisque

par

Stéphanie Perron

Mémoire présenté au Département de mathématiques en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Shebrooke, Québec, Canada, juillet 2015

23 juillet 2015

Le jury a accepté le mémoire de madame Stéphanie Perron dans sa version finale

Membres du Jury

Professeure Virginie Charette
Directrice de recherche
Département de mathématique

Professeure Vasilisa Shramchenko
Membre interne
Département de mathématique

Professeur Ibrahim Assem
Président-rapporteur
Département de mathématique

Sommaire

Dans ce mémoire, on présente un espace de la géométrie hyperbolique, le bidisque. On y parle de la géométrie du bidisque et pour ce faire on expose en détail la géométrie du plan hyperbolique. Ensuite, on présente les groupes d'isométries du bidisque pour lesquels on décrit les groupes d'isométrie du plan hyperbolique. Enfin, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que des sous-groupes cycliques d'isométries du bidisque soient discrets.

Mots clés : variété riemannienne, plan hyperbolique, bidisque, groupe discret, action proprement discontinue, sous-groupes cycliques.

Remerciement

Je voudrais d'abord remercier ma directrice de recherche, Virginie, pour son support, sa gentillesse, sa disponibilité et sa confiance. J'aimerais aussi la remercier pour tous les moments passés à son bureau à réfléchir sur les problèmes reliés à mon mémoire. Enfin, j'aimerais lui dire un merci spécial pour toutes les autres discussions éclairantes qui ont meublé nos rencontres hebdomadaires. Je voudrais également remercier Ibrahim Assem et Vasilisa Shramchenko d'avoir accepté de faire parti de mon jury.

Je voudrais remercier tous mes collègues mathématiciens du département pour leur aide diverse et pour leur compagnie forte agréable durant ces années d'étude. Je voudrais dire merci à Hipolito pour les quelques minutes volées ici et là à discuter mathématiques. Je voudrais dire merci à Rémi pour les quelques minutes qu'il a consacrées à m'aider à créer certaines images dans mon mémoire.

Je voudrais dire merci à ma famille et belle-famille, en particulier à Félix.

J'aimerais finalement remercier mon copain Julien pour son support, ses encouragements et ses bons mots inspirants. J'aimerais lui dire un merci spécial pour l'aide qu'il m'a apportée pour écrire un mémoire fluide et cohérent.

Stéphanie Perron

Sherbrooke, 2015

Table des matières

Table des figures

Liste de Symboles

$\mathbb{R}^2$: Le plan euclidien

$\mathbb{C}$: Le plan complexe

$\mathbb{H}^2$: Le plan hyperbolique

$\widetilde{\mathbb{H}}^2$: Fermeture de $\mathbb{H}^2$

$M_n(\mathbb{C})$: Matrices $n \times n$ à coefficients complexes

∂X : frontière de X

$\langle\cdot\rangle$: sous-groupe engendré par $\cdot$

$[G : H]$: L'indice du sous-groupe H de G

$[g, h]$: commutateur de g par h.

$\sim$: Indique la conjugaison entre deux groupes

$\cong$: Indique un isomorphisme entre deux groupes

$\mathrm{Im}(\cdot)$: représente la partie imaginaire d'un nombre complexe

$\sqcup$: union disjointe entre deux ensembles

$[\cdot]$: représente la classe d'équivalence

$\|\cdot\|$: Norme d'une matrice

Introduction

La géométrie usuelle du plan est basée sur une suite d'axiomes qui ont d'abord été présentés dans le 13e volume des Éléments d'Euclide 300 av. J.-C. et repris dans Ratcliffe [8]. Ces axiomes énoncent toutes les règles permettant la construction, dans le plan, d'objets géométriques simples tels que les droites, les cercles et tous les autres objets qui peuvent en découler.

Or, l'étude de la géométrie ne se limite pas à l'étude des objets dans le plan euclidien. En effet, il est possible de munir d'une nouvelle géométrie d'autres surfaces que le plan euclidien. Par exemple, on peut doter la sphère de la géométrie sphérique [8] ou encore munir l'hyperboloïde à deux nappes de la géométrie hyperbolique [8]. Cette dernière surface, appelée plan hyperbolique, diffère en un point majeur avec le plan euclidien. En effet, le cinquième axiome d'Euclide sur les droites parallèles stipule :

Soit une droite infinie, il existe une unique *droite parallèle à la droite donnée et passant par un point extérieur à cette dite droite.*

Dans le plan hyperbolique, cet axiome n'est plus vrai dans son écriture originale, il doit plutôt être modifié de la façon suivante :

Soit une droite infinie, il existe une infinité *de droite parallèles à la droite donnée et passant par un point extérieur à ladite droite.*

Ainsi, avec cette seule différence, la construction ainsi que l'application d'isométries à des objets géométrique dans le plan hyperbolique est très différente de ce qu'elle est dans le plan euclidien.

Dans ce mémoire on s'intéresse à un espace nommé *bidisque* qui correspond au produit cartésien de deux copies du plan hyperbolique. On s'intéresse aux groupes d'isométries de cet espace en particulier à un groupe d'isométries qui correspond au produit cartésien de deux copies du groupe d'isométries du plan hyperbolique. Dans ce travail on met l'accent sur l'étude des sous-groupes cycliques d'isométries du bidisque, afin de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que de tels sous-groupes soient discrets.

Le premier chapitre est dédié à la mise en place des définitions et résultats nécessaires pour présenter le plan hyperbolique. Le second chapitre est consacré à la présentation des groupes de transformations du plan hyperbolique pour déterminer les conditions nécessaires afin qu'un sous-groupe d'isométries soit discret. Dans le troisième chapitre, le but est de déterminer quels groupes cycliques d'isométries du bidisque sont discrets.

Chapitre 1

Définitions et préliminaires

Dans ce travail on s'intéresse à la géométrie du bidisque ainsi qu'à ses groupes d'isométries. Le bidisque étant une variété riemannienne, il est d'abord important de mettre en place les définitions nécessaires sur ces variétés, sur les groupes discrets agissant sur celles-ci ainsi que sur l'action proprement discontinue de certains groupes des mêmes variétés. Enfin, il est essentiel de décrire la géométrie du plan hyperbolique en définissant la métrique et la topologie choisies pour cet espace. Ces deux aspects sont traités de façon détaillée dans le chapitre qui suit.

1.1 Variétés riemanniennes

En tant que variété riemannienne, le bidisque est un espace de Hausdorff connexe. En premier lieu, on définira cet espace de façon à représenter la géométrie du bidisque. Ensuite, on verra comment un groupe agit sur cet espace.
Dans cette section, les définitions et résultats qui traitent des variétés riemanniennes, des groupes discrets ainsi que de l'action proprement discontinue sont tirés des notes de cours de Abels et Strantzalos sur les groupes de transformation propre [1], de Bredon [5] ainsi que de Royden [9].

1.1.1 Action de groupe sur les variétés riemanniennes

Définition 1.1.1. *Un espace topologique X est appelé un espace de* Hausdorff *si pour toute paire de points x et y il existe deux voisinages ouverts V_1 et V_2 avec $x \in V_1$ et $y \in V_2$ tels que V_1 et V_2 sont disjoints.*

Définition 1.1.2. *Un espace topologique X est dit* connexe *si pour tous A, B ouverts tels que $X = A \sqcup B$ alors $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$.*

Définition 1.1.3. *Une* variété *M de dimension n est un espace de Hausdorff connexe tel que chaque point de M admet un voisinage homéomorphe à une boule dans $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.1.4. *Une* variété lisse *de dimension n est un espace de Hausdorff deuxième dénombrable M^n muni d'une collection de cartes telles que :*

1) *une carte est un homéomorphisme $\phi : U \longrightarrow U'$ où U est un ouvert de M^n et $U' \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;*
2) *Chaque point $x \in M$ est dans le domaine d'une carte ;*
3) *Pour des cartes $\phi : U \longrightarrow U'$ et $\psi : V \longrightarrow V'$, le changement de coordonnées $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V)$ est infiniment différentiable ;*
4) *La collection de carte est maximale avec les trois premières propriétés.*

Définition 1.1.5. *Une variété lisse M munie d'une métrique lisse est appelée une* variété riemannienne.

Définition 1.1.6. *Soient X un ensemble et G un groupe. On donne l'application suivante :*

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

Cette application est une action de G sur X si, pour tout $x \in X$ et pour tout $g, h \in G$, elle respecte les conditions suivantes :

i) $1 \cdot x = x$

ii) $g(hx) = (gh)x$

où 1 *représente l'identité du groupe* G

1.1.2 Orbite et sous-groupe stabilisateur

Définition 1.1.7. *Soit X un ensemble muni de l'action d'un groupe G.* L'orbite *d'un point par G est l'ensemble :*

$$G(x) = \{g(x) \in X \mid g \in G\}. \tag{1.1}$$

Dans un groupe, il existe un sous-groupe dont l'action, est équivalente à l'action de l'identité pour un point donné. Ce sous-groupe est appelé *sous-groupe stabilisateur*. Pour $x \in X$, on le notera :

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}. \tag{1.2}$$

Afin de bien s'imaginer la forme que prend l'orbite d'un point par un groupe ainsi que le sous-groupe stabilisateur d'un point voici l'exemple d'une rotation du plan euclidien.

Exemple 1.1.8. *Prenons un groupe G engendré par une rotation g d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre $(0,0)$ dans le plan euclidien.*
L'orbite du point $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ par G est représenté par les points noirs sur le cercle de rayon 1 dans la figure 1.1.

$$G((0,1)) = \left\{(1,0); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); (0,1); \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); (-1,0); \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right); (0,-1); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

Le sous-groupe stabilisateur de G est l'ensemble des puissances de g^8.

$$G_x = \{g^{8n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

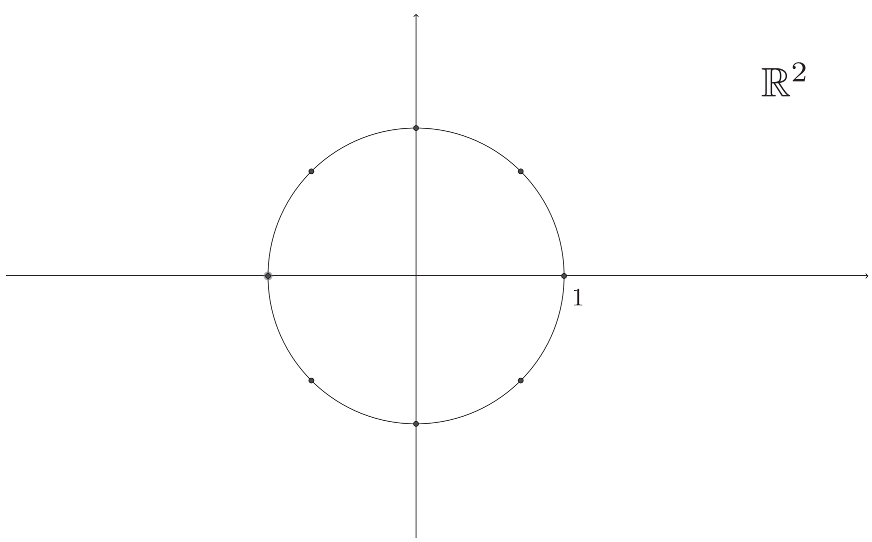

Figure 1.1 – Schéma illustrant l'orbite du point $(0,1)$ par G.

1.2 Groupes discrets et action de groupe proprement discontinue

Dans cette section on présente les définitions et résultats préliminaires concernant les groupes topologiques discrets ainsi que l'action de groupe proprement discontinue en vue de montrer que des sous-groupes d'isométries sont discrets dans le plan hyperbolique et dans le bidisque.

1.2.1 Groupes discrets

Les notions reliées aux groupes discrets sont tirées de Ratcliffe [8].

Définition 1.2.1. *Un groupe topologique est un groupe G qui est un espace topologique tel que les applications suivantes :*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sont continues.

Remarque : Soient X un espace topologique est G un groupe. Alors, pour tout $g \in G$ fixé, l'application $G \longrightarrow G$ définie par $x \longmapsto g(x)$ est un homéomorphisme d'inverse $x \longmapsto g^{-1}(x)$.

Définition 1.2.2. *Soit G un groupe topologique. Alors, G est discret si tous ses points sont ouverts.*

La définition précédente n'est pas des plus aisées à utiliser. Le résultat qui suit règle ce problème.

Lemme 1.2.3. *Soit G un groupe topologique. Alors G est discret si et seulement si le singleton* $\{1\}$ *est ouvert.*

Démonstration :

Nécessité : Cela suit trivialement de la définition.

Suffisance : Supposons que $\{1\}$ est ouvert. On sait que G agit par homéomorphisme sur G, ainsi l'inverse d'une application de G existe et est continue.
Prenons $g \in G$ quelconque. On a que $g = (g^{-1})^{-1}$ et on sait que l'image inverse d'un ouvert est un ouvert.
Ainsi, $(g^{-1})^{-1}\{1\}$ est ouvert, mais

$$(g^{-1})^{-1}\{1\} = g\{1\} = \{g\}$$

Alors, $\{g\}$ est ouvert. Donc G est discret.

□

1.2.2 Action proprement discontinue

Les définitions et les résultats de cette sous-section sont tirés de Beardon [3].

Définition 1.2.4. *Soit X un espace topologique et soit G un groupe d'homéomorphismes de X dans lui-même. L'action de G sur X est dite* proprement discontinue *si pour tout* *compact* $K \subset X$ *:*

$$g(K) \cap K \neq \varnothing$$

pour au plus un nombre fini de $g \in G$*.*

Le théorème suivant ne sera pas démontré dans le cadre des variétés riemannienne, mais il le sera dans le cas des isométries du plan hyperbolique.

Définition 1.2.5. *Soit un espace topologique* X *et soit un groupe* G *de* X*. L'action de* G *sur* X *définie par l'application suivante :*

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g(x)$$

est libre *si* $g(x) = x$ *implique que* $g = 1$*.*

Théorème 1.2.6. *Dans une variété riemannienne* X*, un sous-groupe* G*, dont l'action est libre, du groupe d'isométries de* X *est discret si et seulement si son action sur la variété est proprement discontinue.*

L'exemple suivant montre que si le sous-groupe avec lequel on travaille n'est pas un sous-groupe d'un groupe d'isométries, le résultat du théorème 1.2.6 n'est pas vrai.

Exemple 1.2.7. *Dans l'exemple suivant, le sous-groupe* $H \subset G$ *est discret, mais n'est pas un sous-groupe d'isométries. Ainsi, l'action de* H *n'est pas nécessairement proprement discontinue.*

Soit $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et soit G un groupe d'homéomorphismes de X dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Prenons $d \in G$ telle que

$$\begin{aligned} d : X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto \left(2x, \frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette transformation n'est pas une isométrie puisqu'elle ne préserve pas la distance dans $\mathbb{R}^2$.

Formons le groupe cyclique $H = \langle d \rangle$. On a que H est cyclique et donc discret.

Or, soit $K \subset X$ un compact où $K = \partial(\{(x, y) \in X \mid -a \leq x \leq a\, , -b \leq y \leq b\})$, on a, pour $n > 0$ que

$$d^n(K) \cap K \neq \varnothing, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Comme illustré à la figure 1.2.

Ainsi, bien que H soit discret, l'action de H sur X n'est pas proprement discontinue.

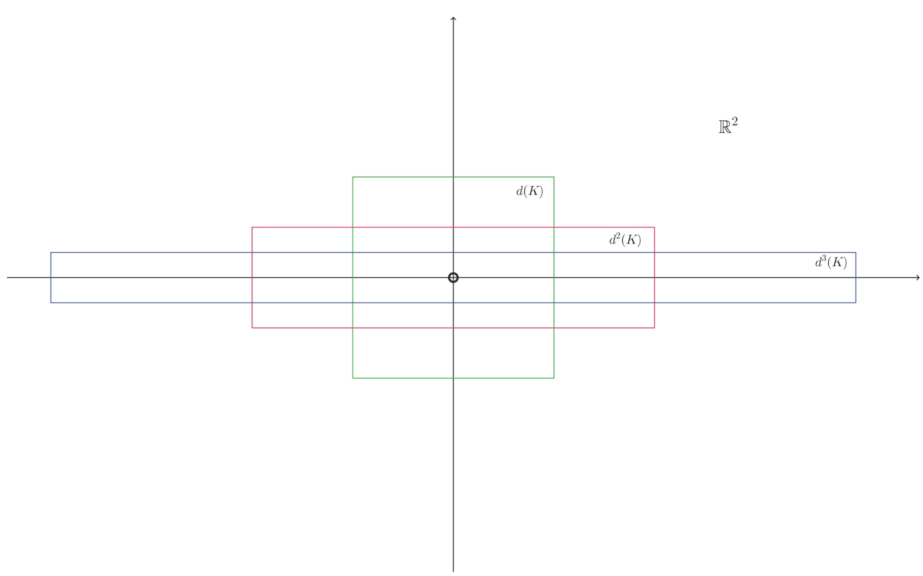

Figure 1.2 – Schéma illustrant trois puissances de K par d. L'intersection étant non-vide pour un nombre infini de $d \in G$.

1.3 Métrique et topologie du plan hyperbolique

Il y a trois modèles qui représentent le plan hyperbolique. Dans l'espace à trois dimensions, on le représente fréquemment par le modèle de l'hyperboloïde (figure 1.3). Tandis que dans l'espace à deux dimensions, on le représente par le disque de Poincarré ou par le demi-plan supérieur. (figure 1.4)

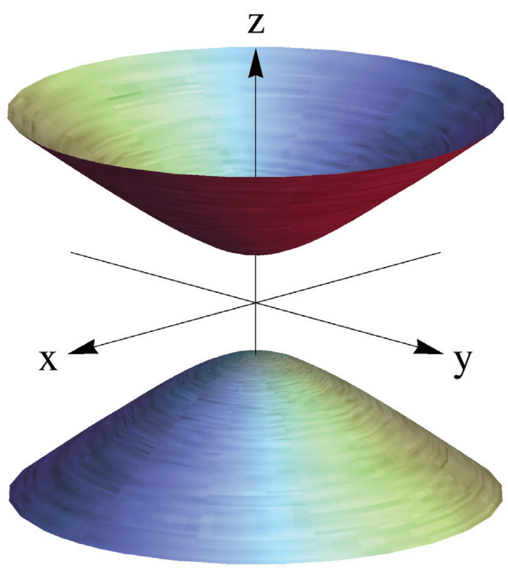

Figure 1.3 – Modèle de l'hyperboloïde du plan hyperbolique dans l'espace à trois dimensions.

Le modèle du plan hyperbolique utilisé dans ce mémoire sera majoritairement le modèle du demi-plan supérieur dont la définition est tirée de Ratcliffe [8].

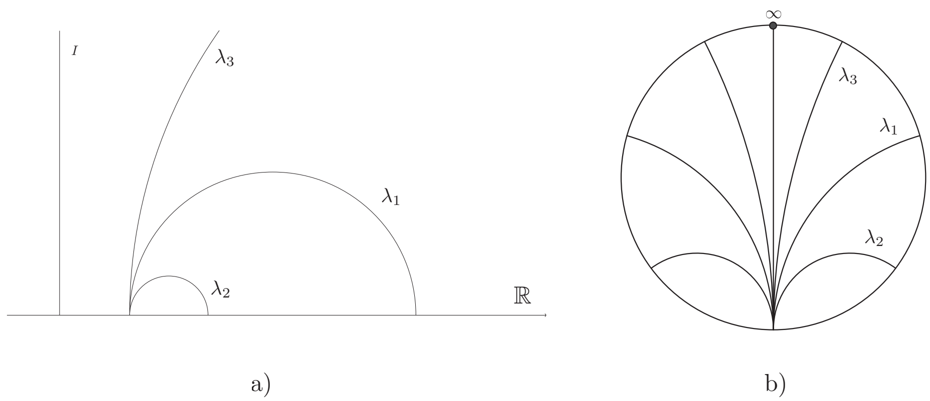

Figure 1.4 – Modèle en deux dimensions du plan hyperbolique. a) Modèle du demi-plan supérieur $\mathbb{H}^2$; b) Modèle du disque de Poincarré $\mathbb{D}$. λ_1, λ_2 et λ_3 représentent des géodésiques.

Dans cette section on donne la définition de la métrique ainsi que la topologie choisie dans le plan hyperbolique dans le but de présenter les groupes d'isométries dans le plan hyperbolique au second chapitre.

La définition de la métrique choisie dans le plan hyperbolique est tirée de Katok [7]. Finalement, la théorie concernant la topologie choisie du plan hyperbolique est tirée de Beardon et Minda [4].

Le modèle du *demi-plan supérieur*, noté $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$, est défini comme :

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Définition 1.3.1. *Soient x, y deux points d'une surface S dans $\mathbb{H}^2$, posons $z = x + iy$ tel que $dz = dx + idy$. Ainsi on obtient la* métrique *suivante :*

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}. \tag{3.1}$$

Définition 1.3.2. *Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^2$ un chemin différentiable par morceaux tel que pour tout $z = (x,y) \in \mathbb{H}^2$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ avec $t \in [0,1]$. La* longueur d'arc hyperbolique *se mesure par :*

$$l_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y(t)} dt. \tag{3.2}$$

Définition 1.3.3. *Soient z et w deux points dans le plan hyperbolique, la* distance hyperbolique *entre ces deux points est calculée par :*

$$d_{\mathbb{H}^2}(z,w) = \inf_{\gamma}(l_{\mathbb{H}^2}(\gamma)). \tag{3.3}$$

où γ est un chemin différentiable par morceaux entre z et w.

Définition 1.3.4. *On peut déduire, de la définition 1.3.3, la formule suivante pour la distance entre deux points, z et w du plan hyperbolique :*

$$d_{\mathbb{H}^2}(z,w) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}\right). \tag{3.4}$$

Remarque : Sur l'axe imaginaire, dans le plan hyperbolique, la distance entre deux points $x = bi$ et $y = ai$ est :

$$d_{\mathbb{H}^2}(x,y) = \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{3.5}$$

Démonstration :

Soient x et y dans $\mathbb{H}^2$ deux points verticalement alignés sur l'axe imaginaire I. Notons $x = bi$ et $y = ai$. Ainsi,

$$2\tanh^{-1}\left(\frac{|x-y|}{|x-\bar{y}|}\right) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{b-a}{b+a}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{b-a}{b+a}}{1-\frac{b-a}{b+a}}\right)\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

$\square$

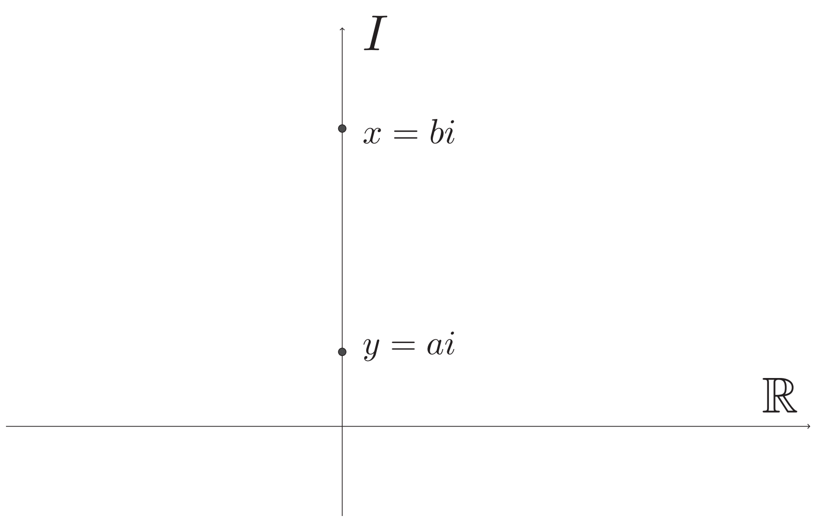

Figure 1.5 – Image illustrant deux points sur l'axe imaginaire I pour calculer leur distance.

Dans le plan hyperbolique, on munit $\mathbb{H}^2$ de la topologie métrique. Ainsi, tout ouvert dans $\mathbb{H}^2$ est une réunion de boules ouvertes du plan euclidien.

Théorème 1.3.5. *La topologie induite par la métrique définie à la définition 1.3.1 est équivalente à la topologie induite par la métrique du plan euclidien* $\mathbb{R}^2$.

Démonstration :

Soit C_H un disque hyperbolique de centre hyperbolique $z \in \mathbb{H}^2$ non nul et de rayon hyperbolique r_h. Comme les isométries du plan hyperbolique agissent transitivement sur le plan hyperbolique, il existe une isométrie g qui envoie le centre z sur $c_h = ai$ un point de l'axe imaginaire. On obtient donc $g(C_H)$ un disque hyperbolique de centre c_h non nul et de rayon hyperbolique r_h.

Ce disque est également un disque euclidien de centre euclidien $c_e = a\cosh(r_h)i$ non nul et de rayon euclidien $r_e = a\sinh(r_h) > 0$. On notera ce disque C_E. Les formules explicites du centre euclidien et du rayon euclidien dans le plan hyperbolique sont données dans l'article de Charette, Drumm et Lareau-Dussault [6].

Il faut donc montrer que C_E et $g(C_H)$ sont les mêmes disque. Pour ce faire, il faut montrer que les points du disque euclidien C_E sont les points du disque hyperbolique $g(C_H)$.

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{H}^2}(c_h, x) &= d_{\mathbb{H}^2}(ai, a\cosh(r_h)i + a\sinh(r_h)e^{i\theta}) && (3.6)\\
&= 2\tanh^{-1}\left(\frac{|ai - a\cosh(r_h)i - a\sinh(r_h)e^{i\theta}|}{|ai + a\cosh(r_h)i - a\sinh(r_h)e^{-i\theta}|}\right) && (3.7)\\
&= 2\tanh^{-1}\left(\left(\frac{(1-\cosh(r_h) - \sinh(r_h)\sin(\theta))^2 + (\sinh(r_h)\cos(\theta))^2}{(1+\cosh(r_h) + \sinh(r_h)\sin(\theta))^2 + (\sinh(r_h)\cos(\theta))^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) && (3.8)\\
&= 2\tanh^{-1}\left(\left(\frac{\cosh(r_h) - 1}{\cosh(r_h) + 1}\right)^{\frac{1}{2}}\right) && (3.9)\\
&= r_h && (3.10)
\end{aligned}$$

Ainsi, les points du disque C_E sont les points du disque $g(C_h)$. De la même façon, on peut vérifier que le disque de départ est également un disque euclidien. En effet, les isométries du plan euclidien agissent transitivement sur le plan euclidien. Donc, la translation hyperbolique g est également une translation euclidienne qui envoie le centre euclidien de C_H sur c_e dans le disque C_E.

$\square$

Chapitre 2

Groupes de transformations du plan hyperbolique

Le groupe d'isométries du bidisque sur lequel on met l'accent correspond au produit cartésien de deux copies du groupe d'isométries du plan hyperbolique. Dans ce chapitre, on définit d'abord le groupe d'isométries du plan hyperbolique, qui préservent l'orientation, en donnant la métrique choisie pour ce groupe. À l'aide des définitions reliées au groupe d'isométries du plan hyperbolique, on donne ensuite les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe d'isométries du plan hyperbolique soit discret.

Pour la suite, les définitions ayant trait aux transformations du plan hyperbolique sont tirées de Beardon [3], Katok [7] et Ratcliffe [8]. Les démonstrations aux résultats de cette section sont inspirées des trois mêmes auteurs.

2.1 Groupes de matrices

Dans le plan hyperbolique, chaque isométrie du groupe d'isométrie est associée à une paire de matrices dans le groupe de matrices $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ qui préservent l'orientation du plan hyperbolique. On aura besoin de définir les éléments du groupe et donner la métrique choisie pour ce groupe.

2.1.1 Définitions

Le groupe de matrices $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est formé de matrices carrées 2×2 à coefficients réels et dont le déterminant est égal à 1.

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; ad - bc = 1\,, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.1}$$

Le groupe quotient formé des classes d'équivalences dont les représentants sont des matrices de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ qui préservent l'orientation dans le plan hyperbolique est :

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_2\} \tag{1.2}$$

où $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les matrices de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sont contenue dans des classes d'équivalence qui contiennent une paire de matrices $\pm A$. Alors, pour $[A] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$:

$$[A] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\}$$

telle que $ad - bc = 1$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Définition 2.1.1. *Soit* $[A] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *et* $z \in \mathbb{H}^2$. *L'action de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *sur le plan hyperbolique est définie par l'application :*

$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ ([A], z) &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

Ce quotient ne dépend pas du choix du représentant dans la classe d'équivalence $[A]$ *de* A.

Proposition 2.1.1. *Tout élément de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *agit par homéomorphisme sur* $\mathbb{H}^2$.

Démonstration :

On doit montrer que chaque transformation provenant de l'action décrite à la définition 2.1.1 envoie $\mathbb{H}^2$ sur lui même.
Prenons $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}^2$. Posons $w = A(z)$ où $A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
Ainsi, on a que

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \cdot \frac{c\bar{z}+d}{c\bar{z}+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}$$

de sorte que

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{w-\bar{w}}{2i} = \frac{z-\bar{z}}{2i|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(z) > 0$ implique que $\mathrm{Im}(w) > 0$.
Comme A ainsi que son inverse sont continues, on a que $w \in \mathbb{H}^2$.

$\square$

2.1.2 Topologie

On étudiera la topologie du groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Il existe une bijection entre le plan complexe $\mathbb{C}$ et le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, ainsi lorsqu'on montre que $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ est un espace topologique, alors on a que $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ seront des espaces topologiques également. Les notions qui suivent sont majoritairement tirées de Bredon [5] et de Ratcliffe [8].

$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ est un groupe de matrices inversibles dont les coefficients sont complexes. C'est un groupe muni de la multiplication de matrices.

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, ad - bc \neq 0\,, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\} \tag{1.3}$$

Définition 2.1.2. *La* norme *d'une matrice* $A = (a_{ij})$ *de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ *est :*

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{2} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

À l'aide de cette norme, on peut définir une distance sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Soient A et B dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$:

$$d(A,B) = \|A - B\| \tag{1.5}$$

Ainsi, d correspond à la métrique euclidienne sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ puisque $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ est considéré comme étant un sous-espace topologique du groupe $\mathbb{C}^4$.

Théorème 2.1.3. *Le groupe de matrices* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$*, muni de la métrique définie à l'équation* (1.4) *est un groupe topologique.*

Démonstration :

Soient $(A,B) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ tel que $(A,B) \mapsto AB \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. On a que les coefficients de la matrice AB sont des polynômes dont les coefficients proviennent de A et B. Ainsi, l'application suivante :

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \tag{1.6}$$

$$(A,B) \longmapsto AB \tag{1.7}$$

est continue par la matrice AB.

Déterminons la fonction déterminant :

$$\det : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*.$$

Cette fonction est continue pour les mêmes raisons que l'application 1.6 était continue. Le déterminant correspond à des coefficients qui sont des polynômes dans les coefficients de A.

Ainsi,

$$A_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{(\det(A^{ji}))}{\det(A)}$$

où A^{ij} est le mineur de A obtenu en effaçant la ligne i et la colonne j.

Donc, chaque coefficient de A^{-1} reste une fonction des coefficients de A. Donc, l'application suivante :

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \tag{1.8}$$

$$A \longmapsto A^{-1} \tag{1.9}$$

est continue par l'inverse de A.

Par conséquent, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ est un groupe topologique.

□

Chaque sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ est un groupe topologique muni de la métrique définie à l'équation (1.4).

Exemple 2.1.4. *Les sous-groupes suivants sont des groupes topologiques qui sont munis de la même topologie que* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ *:*

— $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$

— $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est égal à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm 1_2\}$, ainsi on munit ce groupe de topologie quotient de la topologie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Définition 2.1.5. *Soit un espace topologique X muni d'une topologie notée τ_X et soit R une relation d'équivalence sur X. L'espace quotient $Y = X/R$ est l'ensemble des classes d'équivalences des éléments de X.*

C'est la topologie la plus fine telle que la projection $\pi : X \longrightarrow Y$ est continue où Y associe à $x \in X$ sa classe d'équivalence. Ainsi pour $U \subset Y$ un ouvert, on aura que

$\pi^{-1}(U) = V$ est un ouvert de X.

2.1.3 Convergence

Dans la section 2.1.2, on a donné la définition de la métrique de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Comme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, on prend la métrique induite par l'inclusion. Pour la notion de convergence on aura besoin de la métrique définie plus haut.

Proposition 2.1.2. *Soit* $\{A_n\}$ *une suite de matrices dans* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *où* $A_n(i,j)$ *est le coefficient à la ligne* i *et la colonne* j *de chaque matrice* A_n*. Alors,* $A_n \to A$ *dans* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *si et seulement si* $(A_n(i,j)) \to A(i,j)$*,* $i,j = 1,2$*.*

Démonstration :

Posons,

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Toutes deux dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Alors,

$$\|A_n - A\| \to 0$$

si et seulement si

$$\left\| \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| \to 0$$

si et seulement si

$$\left\| \begin{pmatrix} a_n - a & b_n - b \\ c_n - c & d_n - d \end{pmatrix} \right\| \to 0$$

si et seulement si

$$\left(|a_n - a|^2 + |b_n - b|^2 + |c_n - c|^2 + |d_n - d|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

si et seulement si

$$|a_n - a|^2 + |b_n - b|^2 + |c_n - c|^2 + |d_n - d|^2 \to 0$$

pour qu'une somme d'éléments positifs converge vers 0 il suffit que chaque élément converge individuellement vers 0. Ainsi :

$$\begin{cases} |a_n - a| \to 0; \\ |b_n - b| \to 0; \\ |c_n - c| \to 0; \\ |d_n - d| \to 0. \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a_n \to a; \\ b_n \to b; \\ c_n \to c; \\ d_n \to d. \end{cases}$$

Dans cette démonstration, A est une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ puisque la fonction déterminant est continue.

$\square$

Comme mentionné plus haut, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm 1_2\}$. Ainsi, pour une suite de classe d'équivalences de matrices $\{[A_n]\} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ on aura que $[A_n] \to [A]$ si

$A_n \to A$ et $-A_n \to A$ lorsque $n \to \infty$.

2.2 Groupes d'isométries du plan hyperbolique

Dans le plan hyperbolique, on note $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ le groupe d'isométries. C'est un groupe pour la composition des isométries. On a que $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ et le sous-groupe des isométries qui préservent l'orientation dans le plan est $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Ainsi, à chaque classe de matrices $[A]$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ correspond une isométrie $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.
La composition de deux isométries g et h de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ correspond au produit des matrices associées à ces isométries et il en va de même pour l'inverse d'une isométrie qui correspond à l'inverse de la matrice associée.
À partir de ces définitions, on est en mesure de déterminer les matrices associées à chacune des isométries du plan hyperbolique et ainsi de les classifier selon le nombre de points fixes qu'elles admettent.

La théorie concernant les isométries du plan hyperbolique est tirée des livres de Beardon [3], Katok [7], et Ratcliffe [8].

2.2.1 Classification des isométries de $\mathbb{H}^2$

Les notions concernant la classification des isométries de $\mathbb{H}^2$ est tirée des livres de Beardon [3] et de Katok [7].

Définition 2.2.1. *Soit G un groupe d'isométries. Deux sous-groupes G_0 et G_1 de G sont* conjugués *s'il existe $h \in G$ tel que $G_0 = hG_1h^{-1}$. Si G_0 et G_1 sont conjugués on note : $G_0 \sim G_1$.*

Remarque : On observe que g fixe $x \in X$ si et seulement si hgh^{-1} fixe $h(x)$ et ainsi $G_{h(x)} = hG_x h^{-1}$ ce qui nous donne que si x et y sont dans la même orbite on aura que G_x et G_y sont conjugués.

Définition 2.2.2. *La* trace *d'une isométrie* $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ *représentée par* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *dans* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *est :*

$$\mathrm{tr}(g) = |a + d| \tag{2.1}$$

Avec la définition de l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et la définition de la trace d'une isométrie, on peut déterminer les trois types d'isométries dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Définition 2.2.3. *Soit* $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$, *alors*

1. g *est hyperbolique si* $\mathrm{tr}(g) > 2$

2. g *est parabolique si* $\mathrm{tr}(g) = 2$

3. g *est elliptique si* $\mathrm{tr}(g) < 2$

On peut déterminer la forme des matrices associées à chacune des isométries dans $\mathbb{H}^2$ en étudiant leurs valeurs propres. Selon la nature des valeurs propres, chaque isométrie est conjuguée à un type de matrice en particulier.

Proposition 2.2.1. *Soit* $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$, *alors*

1. *Si la matrice associée à* g *admet* 2 *valeurs propres réelles et distinctes, alors* g *est diagonalisable et est conjuguée à une matrice de la forme :*

$$g \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}; \quad \lambda > 1$$

.

On dit de g qu'elle est hyperbolique.

2. *Si la matrice associée à g admet un couple de valeurs propres complexes conjuguées, alors g est conjuguée à une matrice de la forme :*

$$g \sim \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

On dit de g qu'elle est elliptique.

3. *Si la matrice associée à g admet une valeur propre réelle double, alors g est conjuguée à la matrice de Jordan :*

$$g \sim \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad a \neq 0$$

On dit de g qu'elle est parabolique.

2.2.2 Groupes d'isométries discrets

Dans une variété riemannienne, on a qu'un sous-groupe est discret si son action sur la variété est proprement discontinue. Ce résultat est d'une importance significative dans l'étude des groupes discrets d'une variété. Dans ce qui suit, on montre ce résultat dans le cas d'un sous-groupe quelconque G de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.
La théorie reliée à cette section en majoritairement tirée de Beardon [3], Katok [7] et Ratcliffe [8].

Action proprement discontinue et sous-groupes discrets

Dans les sections 2.1.2 et 2.1.3 sur la topologie et la convergence on a donné les définitions de la norme d'une matrice ainsi que de la convergence d'une suite de matrices vers une matrice du même groupe. Beardon [3] donne une condition de finitude pour les sous-groupes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Lemme 2.2.4. *Un sous-groupe G de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est discret si et seulement si pour chaque $k > 0$ l'ensemble :*

$$G_k = \{A \in G \mid \|A\| \leq k\} \tag{2.2}$$

est fini.

Démonstration :

Nécessité : Supposons, pour $k > 0$, que G_k soit infini. Alors, G admet des éléments distincts A_n tels que $\|A_n\| \leq k$ pour $n = 1, 2, ...$

Si $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ et que $\|A_n\| \leq k$, alors $|a_n| \leq k$ et ainsi A_n admet des sous-suite emboitées A_{n_i} avec $i = 1$ à 4 où a_n, b_n, c_n et d_n convergent vers a, b, c et $d > 0$ respectivement.

On peut donc former la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ étant donné qu'il existe quatre sous-suites différentes de A_n pour lesquelles chaque coefficient de A_n converge vers les coefficient de B.

Ainsi, $A_n \to B$ et comme la fonction déterminant est continue on a que B est un élément de G.

Enfin, B est un point d'accumulation de la suite de matrices A_n dans G. Ainsi, G n'est pas discret.

Suffisance : Supposons que pour chaque $k > 0$ l'ensemble G_k soit fini. En vertu de la section 2.1.2 on a que la norme est une fonction continue. Ainsi, comme G_k est fini pour chaque $k > 0$ on a que G ne peut pas admettre de point limite. Ainsi, pour toute suite convergente de matrices $\{A_n\}$ dans G on a que si $A_n \to B$, avec B dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, on a qu'à partir d'un certain rang $N > 0$ et n pour tout $n > N$ l'égalité$A_n = B$ est vérifiée.

Ainsi, G est discret.

$\square$

Avec cette proposition, on peut montrer que tout sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est dénombrable. En effet, si on pose :

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

une union dénombrable d'ensembles finis, on a que G est dénombrable.
Comme, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est un groupe quotient dont les représentants des classes d'équivalences de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sont dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, les sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sont aussi dénombrables.

Lemme 2.2.5. *Soit $K \subset \mathbb{H}^2$ un compact et soit $z \in \mathbb{H}^2$. L'ensemble $A = \{g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid g(z) \in K\}$ est compact dans* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Démonstration :

Soit $\pi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ la projection usuelle de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur le groupe quotient $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Cette projection est une fonction continue.

On sait que l'image, par une fonction continue, d'un compact est compact. Ainsi, $A = \pi(\pi^{-1}(A))$ est un compact si $\pi^{-1}(A)$ est compact.

Dans cette preuve on considère $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ en tant que sous-espace topologique de $\mathbb{R}^4$. Ainsi, pour montrer que $\pi^{-1}(A)$ est compact il faudra montrer qu'il est fermé et borné.

1) Considérons la fonction évaluation en un point $z \in \mathbb{H}^2$ notée ev_z où

$$\begin{aligned} ev_z : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ M &\longmapsto ev_z(M) = \pi(M)(z) \end{aligned}$$

On a que $\pi^{-1}(A) = ev_z^{-1}(K)$ et comme la fonction évaluation est continue on a que $\pi^{-1}(A)$ est fermé. En effet, $K \subset \mathbb{H}^2$ est un compact dans un espace séparé donc il est fermé.

2) On a que $K \subset \mathbb{H}^2$ est compact, ainsi il est borné dans $\mathbb{H}^2$. Alors, il existe une constante positive réelle m telle que si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \pi^{-1}(A)$ alors

$$\left\| \frac{az+b}{cz+d} \right\| < m$$

De même, il existe une constante réelle positive k telle que

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \geq k$$

Et comme on a vu dans la preuve de la proposition 2.1.1

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} \geq k$$

Ce qui nous donne que

$$|cz+d| \leq \sqrt{\frac{\mathrm{Im}(z)}{k}}$$

et

$$|az+b| < m\sqrt{\frac{\mathrm{Im}(z)}{k}}$$

Ainsi,

$$\frac{|az+b|}{|cz+d|} < m$$

On peut remarquer que les quantités $\mathrm{Im}(z)$, m et k présentes dans ces inégalités ne tiennent pas compte du choix de a, b, c, d. Ainsi, A est borné.

Enfin, A est compact.

$\square$

Lemme 2.2.6. *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. *Si l'action de G sur $\mathbb{H}^2$ est proprement discontinue alors si $x \in \mathbb{H}^2$ et si $g_1, g_2, ...$ sont des éléments distincts de G, la suite $g_1(x), g_2(x), ...$ ne peut pas converger vers un $y \in X$.*

Démonstration :

Prenons une suite $\{g_n(x)\}$ dans $\mathbb{H}^2$ qui converge vers $y \in \mathbb{H}^2$. Alors,

$$K = \{y, x, g_1(x), g_2(x), ...\}$$

est compact puisqu'il contient tous ses points d'accumulation. Puisque $g_n(K) \cap K \neq \varnothing$ pour tout $n = 1, 2, ...$ on a que l'action de G n'est pas proprement discontinue sur $\mathbb{H}^2$.

$\square$

Théorème 2.2.7. *Dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, un sous-groupe G de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *est discret si et seulement si son action sur $\mathbb{H}^2$ est proprement discontinue.*

Démonstration :

Nécessité : Supposons que G est discret. Soit $K \subset \mathbb{H}^2$ et soit $z \in \mathbb{H}^2$. Considérons l'ensemble $\{g \in G \mid g(z) \in K\}$. On a que

$$\{g \in G \mid g(z) \in K\} = G \cap \{g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid g(z) \in K\}.$$

Comme G est un sous-groupe discret d'un groupe topologique, il est fermé. Et comme $\{g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid \; g(z) \in K\}$ est compact, on a que

$$\mathrm{card}\left(\{g \in G \mid g(z) \in K\}\right) < \infty$$

Soit $B_{\mathbb{H}^2}(z, r)$ une boule de centre z et de rayon $r > 0$ qui contient K. Considérons $B_{\mathbb{H}^2}(z, 2r)$ telle que pour h n'appartenant pas à $\{g \in G \mid g(z) \in K\}$, $h(z)$ n'est pas dans $B_{\mathbb{H}^2}(z, 2r)$.

Alors, $h(B_{\mathbb{H}^2}(z, r)) = B_{\mathbb{H}^2}(h(z), r)$ puisque h est une isométrie et $h(K) \subset B_{\mathbb{H}^2}(h(z), r)$. Mais, $B_{\mathbb{H}^2}(z, r) \cap B_{\mathbb{H}^2}(h(z), r) = \varnothing$ sauf pour un nombre fini de $h \in G$. Ainsi, $h(K) \cap K = \varnothing$ sauf pour un nombre fini de $h \in G$.

Enfin, l'action de G sur $\mathbb{H}^2$ est proprement discontinue.

Suffisance : Supposons que G n'est pas discret. Alors, il existe des éléments distincts $g_1, g_2, ...$ dans G tels que $g_n \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Ainsi, la suite $g_n(x) \to x \in \mathbb{H}^2$. Or, selon le lemme 2.2.6, si une telle suite existe l'action de G sur $\mathbb{H}^2$ ne sera pas proprement discontinue.

$\square$

Sous-groupes cycliques

Il faut observer que si G est un sous-groupe discret, alors tout sous-groupe conjugué à G est discret puisque la conjugaison est un homéomorphisme de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ vers lui-même.

Lemme 2.2.8. *Soit g une isométrie elliptique de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ et d'angle $\theta \in]0, 2\pi[$. Alors, $\langle g \rangle$ est d'ordre fini si et seulement si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Q}$.*

Démonstration :

Nécessité : Supposons que $\langle g \rangle$ soit d'ordre fini. Sans perte de généralité, posons :

$$g = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Comme $\langle g \rangle$ est d'ordre fini, ainsi il existe $0 < N < \infty$ tel que $g^N = id$.
Ainsi :

$$g^N = \begin{pmatrix} \cos(N\theta) & -\sin(N\theta) \\ \sin(N\theta) & \cos(N\theta) \end{pmatrix}$$

Si $g^N = id$, alors

$$\begin{cases} \cos(N\theta) & = 1 \quad \text{et} \\ \sin(N\theta) & = 0. \end{cases}$$

Donc,

$$N\theta = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \theta = 2\pi \frac{n}{N}$$

Ainsi, $\frac{n}{N} = k \in \mathbb{Q}$.

Suffisance : Supposons que $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Q}$. On a que $k \in \mathbb{Q}$ ainsi $k = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$.
Prenons $N = q$, ainsi :

$$\begin{pmatrix} \cos\left(N\left(2\pi\frac{p}{q}\right)\right) & -\sin\left(N\left(2\pi\frac{p}{q}\right)\right) \\ \sin\left(N\left(2\pi\frac{p}{q}\right)\right) & \cos\left(N\left(2\pi\frac{p}{q}\right)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi p) & -\sin(2\pi p) \\ \sin(2\pi p) & \cos(2\pi p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité est vraie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $g^q = 1$ et $\langle g \rangle$ est d'ordre fini.

$\square$

Théorème 2.2.9. *Soit* $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$. *Alors,*

i) Si g est hyperbolique ou parabolique, $\langle g \rangle$ est discret.

ii) Si g est elliptique, $\langle g \rangle$ est discret si et seulement s'il est d'ordre fini.

Démonstration :

i) Il faut montrer que, pour une suite $\{g^{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $\langle g \rangle$, si $g^{n_k} \to 1$ alors il existe $N > 0$ tel que pour tout $k > N$, $g^{n_k} = 1$.

Cas hyperbolique :

Soit g une isométrie hyperbolique. On peut,sans perte de généralité, en vertu de la conjugaison, poser :

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \lambda > 1$$

Prenons une suite $\{g^{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{Z}}$ dans $\langle g \rangle$. Les matrices de cette suite sont de la forme :

$$g^{n_k} = \begin{pmatrix} \lambda^{n_k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^{n_k}} \end{pmatrix}$$

Si $g^{n_k} \to 1$ alors $\lambda^{n_k} \to 1$.
Ce qui implique soit que $\lambda = 1$ puisque c'est une constante soit que $n_k \to 0$.
Or, comme $\lambda > 1$, il ne peut être égal à 1.
Alors, $n_k \to 0$ et ainsi à partir d'un certain rang $N > 0$ tel que $k > N$ on a que $n_k = 0$ et ainsi $\lambda^{n_k} = 1$.

Ainsi, $g^{n_k} = 1$ pour tout $k > N$. Donc, $\langle g \rangle$ est discret.

Cas parabolique :

Soit g une isométrie parabolique alors on peut, sans perte de généralité, poser

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0$$

Prenons une suite $\{g^{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{Z}}$ dans $\langle g \rangle$ dont les matrices prennent la forme :

$$g^{n_k} = \begin{pmatrix} 1 & a \cdot n_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $g^{n_k} \to 1$, on aura que $a \cdot n_k \to 0$.

Alors, soit $a = 0$ puisque c'est une constante ou bien $n_k \to 0$.

Mais, $a \neq 0$, alors $n_k \to 0$ et ainsi à partir d'un certain rang $N > 0$ tel que $k > N$ on a que $n_k = 0$ et ainsi que $a \cdot n_k = 0$.

Ainsi, $g^{n_k} = 1$ pour tout $k > N$. Donc $\langle g \rangle$ est discret.

ii) Soit g une isométrie elliptique alors on peut, sans perte de généralité, poser

$$g = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Prenons une suite $\{g^{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{Z}}$ dans $\langle g \rangle$ dont les matrices sont de la forme :

$$g^{n_k} = \begin{pmatrix} \cos(\theta n_k) & -\sin(\theta n_k) \\ \sin(\theta n_k) & \cos(\theta n_k) \end{pmatrix}$$

Nécessité : Supposons que $\langle g \rangle$ est discret. Alors, pour toute suite $\{g^{n_k}\} \in \langle g \rangle$ qui converge vers l'identité, il existe $N > 0$ tel que pour tout $k > N$, $g^{n_k} = 1$.

Si $g^{n_k} = 1$ pour tout $k > N$, alors :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta n_k) & -\sin(\theta n_k) \\ \sin(\theta n_k) & \cos(\theta n_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui est le cas, seulement si

— $\cos(\theta n_k) = 1$ et

— $\pm \sin(\theta n_k) = 0$

donc $n_k\theta = 2k\pi$ ce qui implique que $\theta = \frac{2k\pi}{n_k} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, il suit du lemme 2.2.8, que $\langle g\rangle$ est d'ordre fini.

Suffisance : Supposons que $\langle g\rangle$ est d'ordre fini $N > 0$. On a montré au lemme 2.2.8 que $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Q}$.

Prenons une suite $\{g^{n_l}\}$ dans $\langle g\rangle$ qui converge vers l'identité. Si $g^{n_l} \to 1$ et que $\theta = 2k\pi$, alors :

$$\begin{pmatrix} \cos(2k\pi \cdot n_l) & -\sin(2k\pi \cdot n_l) \\ \sin(2k\pi \cdot n_l) & \cos(2k\pi \cdot n_l) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui est le cas, seulement si

— $\cos(2k\pi \cdot n_l) \to 1$

— $\pm\sin(2k\pi \cdot n_l) \to 0$

Or, $\langle g\rangle$ est d'ordre fini, ainsi, il existe au plus N valeurs possibles pour $\cos(2k\pi \cdot n_l)$ et $\sin(2k\pi \cdot n_l)$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\min_{l\in L}\{|\cos(2k\pi \cdot n_l) - 1|\} < \varepsilon$. Alors, la boule ouverte $B_{\mathbb{H}^2}\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ne contient que le point 1.

Alors, à partir d'un certain rang $i > 0$ tel que pour tout $l > i$, $g^{n_l} = 1$.

□

Les deux exemples suivants permettent de visualiser l'orbite d'un point au moyen d'un sous-groupe cyclique engendré par une isométrie elliptique d'ordre fini et d'ordre infini respectivement.

Exemple 2.2.10. *L'exemple suivant illustre l'orbite d'une elliptique dont l'angle est un multiple rationnel de 2π et dont le centre est l'origine $(0,0)$.*

Prenons $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ une isométrie elliptique d'angle égal à $\frac{\pi}{12}$. Sans perte de généralité, posons :

$$g = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{pmatrix}$$

Formons le sous-groupe cyclique engendré par g, $\langle g \rangle \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

L'orbite de $(0, 1) \in \mathbb{H}^2$ par $\langle g \rangle$ est discrète dans le cercle de rayon égal à 1.

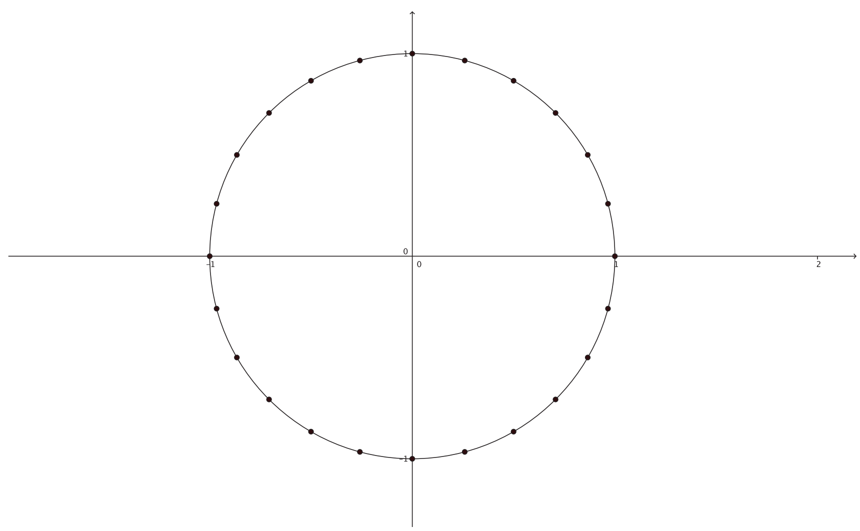

Figure 2.1 – Orbite d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{12}$ et de centre $(0, 0)$ composé 24 fois.

Exemple 2.2.11. *L'exemple suivant illustre l'orbite d'une isométrie elliptique dont l'angle est un multiple irrationnel de 2π et dont le centre est l'origine* $(0, 0)$.

Prenons $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ une elliptique d'angle égal à $2\sqrt{2}\pi$. Sans perte de généralité, posons :

$$g = \begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{2}\pi) & -\sin(2\sqrt{2}\pi) \\ \sin(2\sqrt{2}\pi) & \cos(2\sqrt{2}\pi) \end{pmatrix}$$

Formons $\langle g \rangle \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ le sous-groupe cyclique engendré par g.

L'orbite d'un point $x \in \mathbb{H}^2$ par $\langle g \rangle$ est dense dans le cercle de rayon 1dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

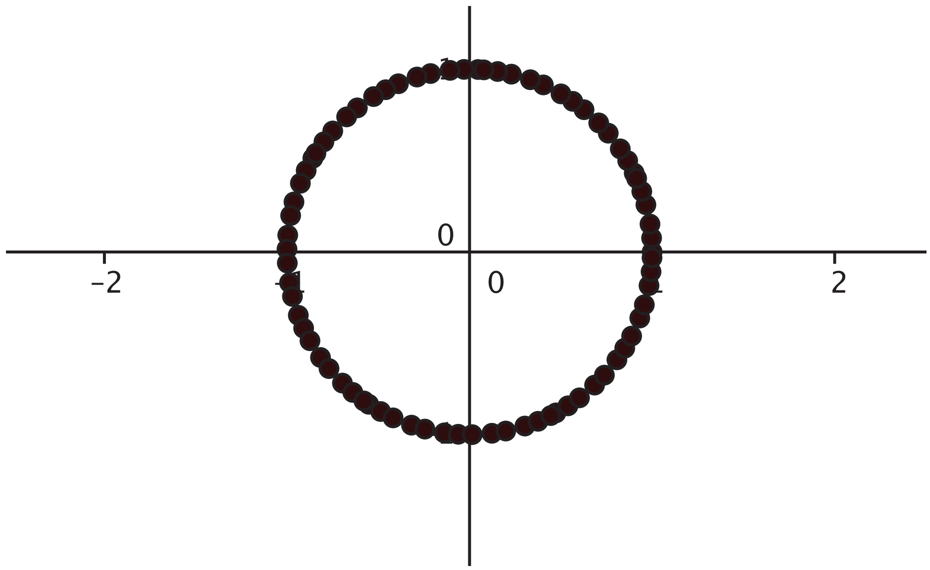

Figure 2.2 – Orbite d'une rotation d'angle $2\sqrt{2}\pi$ et de centre $(0, 0)$ composé $n = 57$ fois.

2.2.3 Groupes d'isométries discrets et non élémentaires

Dans cette section, on présente les critères nécessaires pour qu'un groupe d'isométrie non cyclique du plan hyperbolique soit discret, afin d'étendre ces critères aux groupes d'isométries du bidisque. Pour ce faire, on a besoin de définir la notion de sous-groupe élémentaire, laquelle est tirée de Katok [7]. Les autres définitions et résultats de cette section sont tirés de Beardon [3].

Définition 2.2.12. *Un sous-groupe G de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *est* élémentaire *s'il admet une orbite fini dans* $\widetilde{\mathbb{H}}^2$*.*

Les démonstrations des théorèmes suivants : 2.2.13 et 2.2.14 se trouvent intégralement dans le chapitre 2 du livre de Katok [7] et dans le chapitre 5 du livre de Beardon [3]. Elles ne seront pas présentées dans le cadre de ce mémoire.

Théorème 2.2.13. *Soit $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$. S'il ne contient aucun élément elliptique, alors G est soit discret soit élémentaire.*

Théorème 2.2.14. *Soit $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ un groupe non-élémentaire, il est discret si et seulement si pour chaque f et g dans G, on a que $\langle f, g \rangle$ est discret.*

Remarque : Puisque l'isométrie elliptique est la seule isométrie à avoir des points fixes dans l'intérieur du plan hyperbolique, on ne parle pas des deux autres isométries.

Lemme 2.2.15 (Lemme de Selberg)**.** *Soit G un groupe engendré par un nombre fini de matrices complexes $n \times n$. Alors, G admet un sous-groupe normal G_1 d'indice fini qui ne contient aucun élément non trivial d'ordre fini.*

Le théorème qui suit ainsi que la preuve sont inspirés de Beardon [3].

Théorème 2.2.16. *Soit G un sous-groupe non élémentaire de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Alors, G est discret si et seulement si les points fixes des éléments elliptiques de G ne s'accumulent pas dans $\mathbb{H}^2$.*

Démonstration :

Nécessité : Supposons que G est discret. En vertu du théorème 2.2.7 on a que l'action de G sur $\mathbb{H}^2$ est proprement discontinue.

Soit $x \in \mathbb{H}^2$ et soit K un voisinage compact de x. Puisque l'action de G est proprement discontinue, si on prend une isométrie elliptique g dans G, on a que $g(K) \cap K \neq \varnothing$ pour au plus un nombre fini de $g \in G$. Ainsi, il existe un nombre fini de points fixes dans le voisinage K de x. Donc, les points fixes des éléments elliptiques ne s'accumulent pas dans $\mathbb{H}^2$.

Suffisance : Supposons que les points fixes des éléments elliptiques de G ne s'accumulent pas dans $\mathbb{H}^2$.

Supposons qu'il existe au moins un $g \in G$ qui est d'ordre infini. Soit $z \in \mathbb{H}^2$ tel que $g(z) = z$, alors l'ensemble des points $g^n(x)$, avec $n \in \mathbb{Z}$, est dense sur le cercle hyperbolique de centre z et de rayon $r = d_{\mathbb{H}^2}(x, z)$. [3]

Comme G est non-élémentaire, il existe $f \in G$ tel que $f(z) \neq z$. En effet, si $f(z) = z$ aussi, on aurait une orbite fini dans la fermeture de $\widetilde{\mathbb{H}}^2$ et ainsi G ne serait plus non élémentaire.

On a que les points de $g^n f(z)$ sont des points fixes de $g^n f g (g^n f)^{-1}$ une isométrie elliptique de G.

Alors, comme $f(z) \neq z$ et que g fixe z, on a que $g^n f(z) \neq z$. Mais on a aussi que pour tous les autres points de $\mathbb{H}^2$, par exemple $f(z) \in \mathbb{H}^2$, l'orbite par g^n de tels points est dense dans $\mathbb{H}^2$. Ainsi, ces points s'accumulent dans $\mathbb{H}^2$, une contradiction.
Par conséquent, tous les éléments elliptiques sont d'ordre fini dans G.

Enfin, on va montrer que G est discret. On a que $G \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est défini comme un groupe de matrices. Alors, prenons $G_0 \subset G$ un sous-groupe engendré par un nombre fini d'éléments. Selon le lemme 2.2.15, G_0 contient un sous-groupe normal G_1 d'indice fini qui ne contient aucun élément non trivial d'ordre fini.

Comme chaque isométrie elliptique de G est d'ordre fini, on a que G_1 n'admet aucun élément elliptique et on a qu'il n'est pas élémentaire, ainsi selon le théorème 2.2.13 G_1 est discret.

Or, $G_1 \subset G_0$ est d'indice fini ce qui implique que G_0 est discret également. Et G_0 étant engendré par un nombre fini d'éléments, en vertu du théorème 2.2.14 on a que G est discret.

$\square$

En résumé, dans ce chapitre on a donné un résultat sur les sous-groupes d'isométries du plan hyperbolique dont les éléments elliptiques n'admettent pas de points fixes qui s'accumulent en vue d'étendre ce résultat aux sous-groupes d'isométries du bidisque.

Chapitre 3

Le bidisque et ses groupes de transformations

Pour décrire la géométrie du bidisque, il faut porter une attention particulière à la géométrie du plan hyperbolique. C'est ce qui a été fait dans le premier chapitre. De même, pour définir un groupe d'isométries agissant librement sur le bidisque, il est nécessaire d'étudier attentivement le groupe d'isométries du plan hyperbolique comme on l'a fait au second chapitre. Dans le chapitre qui vient, on présente le bidisque ainsi qu'un groupe d'isométries de cet espace afin de déterminer quels de ses sous-groupes d'isométries sont discrets. Plus particulièrement, on s'intéressera aux sous-groupes cycliques engendrés par une isométrie du groupe d'isométries du bidisque.

Les définitions qui traitent de la notation associée au bidisque, de la métrique ainsi que de la topologie qui lui est associée sont basées sur l'article de Charette, Drumm et Lareau-Dussault [6] et du livre de Bredon [5].

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. *Le bidisque est défini comme le produit de deux copies du plan hyperbolique muni de la topologie produit. On le note* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Il faut également noter que le bidisque est une variété riemannienne et ainsi les résultats du premier chapitre s'appliquent à cet espace. En particulier, un sous-groupe d'un groupe d'isométries qui agit sur le bidisque est discret si et seulement si l'action du sous-groupe sur le bidisque est proprement discontinue.

La métrique dont on dote le bidisque est une métrique produit de Riemann où pour z et w des points de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ on a que

$$d_{\mathbb{H}^2\times\mathbb{H}^2}(z,w) = \sqrt{d^2_{\mathbb{H}^2}(z_1,w_1) + d^2_{\mathbb{H}^2}(z_2,w_2)} \tag{1.1}$$

et où la distance entre deux points du plan hyperbolique peut aussi être écrite comme

$$d_{\mathbb{H}^2}(z_i,w_i) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{|z_i - w_i|}{|z_i - \bar{w}_i|}\right) \tag{1.2}$$

avec $z_i, w_i \in \mathbb{H}^2$

Cette distance est déduite de la définition de la distance entre deux points du plan hyperbolique présentée au chapitre 1 à la définition 1.3.4.

On rappelle que la topologie produit sur un espace $X \times Y$ admet comme base la collection $U \times V$ où $U \subset X$ et $V \subset Y$ sont des ouverts des espaces respectifs.

Comme $U_1 \times V_1 \cap U_2 \times V_2 = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ et que par récurrence on peut étendre le résultat à un nombre d'ouvert plus grand que 2, on a que les ouverts de l'espace $X \times Y$ correspondent à l'union quelconque des rectangles $U_i \times V_i$.

3.2 Groupe d'isométries Γ

Le groupe formé des isométries du bidisque est noté $\text{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$. Dans le contexte de ce mémoire, le groupe d'isométries qui est étudié est un sous-groupe normal du groupe d'isométries du bidisque à savoir le sous-groupe $\Gamma = \text{Isom}\,\mathbb{H}^2 \times \text{Isom}\,\mathbb{H}^2$. De ce fait, la métrique associée à ce groupe est la métrique produit.

Définition 3.2.1. *L'action de Γ sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est définie par l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \Gamma \times (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \\ ((g_1, g_2), (z_1, z_2)) &\longmapsto (g_1(z_1), g_2(z_2)) \end{aligned}$$

Où $g_i \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ et $z_i \in \mathbb{H}^2$ avec $i = 1, 2$.

Proposition 3.2.1. *Toute isométrie de Γ est un homéomorphisme de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ sur lui-même.*

Démonstration :

Soit $(z, w) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ et soit $(g, h) \in \Gamma$. On veut montrer que $(g, h)(z, w) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. Or, selon la définition du produit donnée plus haut (3.2.1), on a que :

$$(g, h)(z, w) = (g(z), h(w))$$

où, selon la proposition 2.1.1, $g(z)$ et $h(w)$ sont dans $\mathbb{H}^2$. Ainsi, $(g,h)(z,w) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$

$\square$

Dans le groupe d'isométries du bidisque, $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$, il existe une isométrie $\iota \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$ dont l'action est de permuter les coordonnées d'un point $z = (z_1, z_2)$ dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. Ainsi, l'application suivante

$$\iota : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$$
$$(z_1, z_2) \longmapsto (z_2, z_1)$$

est une involution.

Théorème 3.2.2. *L'involution ι normalise Γ. De plus,* $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) \cong \Gamma \rtimes \langle \iota \rangle$.

La démonstration complète de ce théorème se trouve dans l'article de Charette, Drumm et Lareau-Dussault [6].

3.2.1 Les surfaces dans le bidisque

Dans cette sous-section on montre que le groupe d'isométries Γ est un sous-groupe d'indice 2 du groupe d'isométries du bidisque $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$.

Les surfaces du bidisque ont une courbure [8] qui se situe entre 0 et -1. Les seules surfaces dont la courbure est exactement égale à -1 sont les plans horizontaux et verticaux. Ces plans prennent la forme : $\mathbb{H}^2 \times \{x\}$ et $\{x\} \times \mathbb{H}^2$ respectivement avec $x \in \mathbb{H}^2$.

Proposition 3.2.2. *Le groupe d'isométries Γ est un sous-groupe d'indice* 2 *de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$.

Démonstration :

Soit une surface verticale S de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. On a que S prend la forme $\{x\} \times \mathbb{H}^2$. Soit $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$ une isométrie.

Si on applique l'isométrie g à la surface verticale S on obtient que $g(S)$ est une surface de courbure négative égale à -1. Ainsi on obtient une des deux surfaces suivantes :

1. $g(S) = \{y\} \times \mathbb{H}^2$ est une surface verticale avec $y \in \mathbb{H}^2$;
2. $g(S) = \mathbb{H}^2 \times \{z\}$ est une surface horizontale avec $z \in \mathbb{H}^2$.

Ainsi, la surface obtenue en 1 est une surface verticale et $g \in \Gamma$. Mais, la surface obtenue en 2 est une surface horizontale. Pour la rendre verticale on a $\iota \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$, l'involution, qui échange les coordonnées de chaque point de la surface. Ainsi, $\iota \circ g(S)$ est une surface verticale, mais $\iota \notin \Gamma$ alors $\iota \circ g \notin \Gamma$.

On remarque alors, que seule la moitié des isométries, dont la surface résultante est de même orientation que la surface de départ, se trouve dans Γ.

$\square$

3.2.2 Groupes cycliques d'isométries

Dans cette sous-section, on présente quels groupes cycliques d'isométries sont discrets. Les résultats seront montrés sur des groupes cycliques à un générateur de la forme $\langle (g_1, g_2) \rangle$ où $g_i \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

On sait qu'un groupe est discret si, en prenant une suite convergente d'éléments de ce groupe, cette suite devient éventuellement constante. C'est ce qui a été utilisé au chapitre 2 dans le théorème 2.2.9 et c'est ce qui sera utilisé dans les résultats de cette sous-section.

Théorème 3.2.3. *Un groupe cyclique $\langle(g,h)\rangle$ engendré par une isométrie de Γ telle que g ou h est hyperbolique est discret.*

Démonstration :

Prenons $G = \langle(g,h)\rangle$ un groupe engendré par (g,h), une isométrie de Γ, où g est une isométrie quelconque et h est une isométrie hyperbolique de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

On peut, sans perte de généralité, poser :

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ; \ a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

et

$$h = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \ ; \ \text{où } \lambda > 1.$$

Prenons une suite $\{(g^{n_k}, h^{n_k})\}$ dans G avec n_k dans $\mathbb{Z}$. On veut montrer que si $(g^{n_k}, h^{n_k}) \to (1,1)$ alors à partir d'un certain rang $N > 0$ tel que $k > N$ on aura $(g^{n_k}, h^{n_k}) = (1,1)$.

Si $(g^{n_k}, h^{n_k}) \to (1,1)$, alors :

$$\left(\begin{pmatrix} a_{n_k} & b_{n_k} \\ c_{n_k} & d_{n_k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda^{n_k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^{n_k}} \end{pmatrix} \right) \to \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ce qui est le cas, seulement si chaque composante converge vers l'identité. Mais, on a vu dans la section 2.2.2 que la composante hyperbolique converge vers l'identité seulement si :

— $\lambda = 1$ car c'est une constante ou bien
— $n_k \to 0$

Or, $\lambda > 1$, ainsi, $n_k \to 0$. Mais comme n_k est entier, on qu'à partir d'un certain rang $N > 0$ tel que $k > N$, $n_k = 0$ et ainsi $(g^{n_k}, h^{n_k}) = (1, 1)$.

Alors, peu importe la nature de g, si h est une isométrie hyperbolique, le groupe engendré par (g, h) est discret.

$\square$

Théorème 3.2.4. *Un groupe cyclique $\langle (g, h) \rangle$ engendré par une isométrie de Γ telle que g ou h est parabolique est discret.*

Démonstration :

Prenons $G = \langle (g, h) \rangle$ un groupe engendré par (g, h), une isométrie de Γ, où g est une isométrie quelconque et h est une isométrie parabolique de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

On peut, sans perte de généralité, poser :

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\; ; \;\; a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

et

$$h = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \text{ où } a \neq 1.$$

Prenons une suite $\{(g^{n_k}, h^{n_k})\}$ dans G avec n_k dans $\mathbb{Z}$. On veut montrer que si $(g^{n_k}, h^{n_k}) \to (1,1)$ alors à partir d'un certain rang $N > 0$ tel que $k > N$ on aura $(g^{n_k}, h^{n_k}) = (1,1)$.

Si $(g^{n_k}, h^{n_k}) \to (1,1)$, alors :

$$\left(\begin{pmatrix} a_{n_k} & b_{n_k} \\ c_{n_k} & d_{n_k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \cdot n_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \to \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Seulement si

— $a = 0$ car c'est une constante ou bien

— $n_k \to 0$

Or, $a \neq 1$, ainsi, $n_k \to 0$ et à partir d'un certain rang $N > 0$ tel que $k > N$, on a que $n_k = 0$ et ainsi $(g^{n_k}, h^{n_k}) = (1,1)$.

Alors, peu importe la nature de g, si h est une isométrie parabolique, le groupe engendré par (g, h) est discret.

$\square$

Théorème 3.2.5. *Un groupe cyclique $\langle (g,h) \rangle$ engendré par une isométrie de Γ telle que g et h soient des isométries elliptiques, dont au moins une des isométries elliptiques est d'ordre infini, n'est pas discret.*

Démonstration :

Prenons $G = \langle (g,h) \rangle$ un groupe cyclique engendré par une isométrie de Γ où g et h sont elliptiques, mais g est d'angle $2\pi\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On peut, sans perte de généralité, poser :

$$g = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -\sin(2\pi\alpha) \\ \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

et

$$h = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

Pour montrer que G n'est pas discret, il faut montrer que l'identité $(1,1)$ est un point d'accumulation de G.

Dans un premier temps, supposons qu'il existe $N > 0$ tel que $h^N = 1$. Alors prenons le sous-groupe cyclique engendré par $(g^{Nk}, 1)$, avec k un entier.
On a montré, au lemme 2.2.9, que le sous-groupe engendré par une isométrie elliptique est discret si et seulement si le sous-groupe est d'ordre fini.

Or, le sous-groupe engendré par $(g^{Nk}, 1)$ n'est pas d'ordre fini puisque g^{Nk} est infini. Ainsi, 1 est un point d'accumulation de g^{Nk}. Donc, $(1,1)$ est un point d'accumulation du sous-groupe engendré par $(g^{Nk}, 1)$ et ainsi est un point d'accumulation pour G.

D'autre part, supposons que pour $N > 0$ on ait $h^N \neq 1$. Ainsi, en prenant le sous-groupe cyclique engendré par (g^{Nk}, h^{Nk}), on a que 1 est un point d'accumulation pour h^{n_k} et pour g^{n_k}. Donc, $(1, 1)$ est un point d'accumulation de G.

Par conséquent, G n'est pas discret.

□

3.2.3 Points fixes d'isométries du bidisque

Dans cette sous-section on présentera la forme des points fixes des isométries du bidisque dans Γ pour montrer que les points fixes d'isométrie (g, h), où g et f sont elliptiques, ne s'accumulent pas si elles sont dans un groupe discret. Dans le plan hyperbolique, le même résultat s'applique et la réciproque est également vraie si le sous-groupe est non élémentaire. Or, dans le bidisque, il n'est pas suffisant, pour qu'un sous-groupe soit discret, que celui-ci soit non élémentaire et que les points fixes de ses isométries (g, h), où g et f sont elliptiques, ne s'accumulent pas dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Définition 3.2.6. *Soit une isométrie $g = (g_1, g_2) \in \Gamma$ et un point $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. Alors, z est un point fixe de g si l'équation suivante est satisfaite :*

$$z = g(z)$$

Ainsi, les points fixes des isométries du bidisque correspondent aux points fixes de chacune de ses composantes g_1 et g_2.

Alors,

— Si g_1 est une isométrie elliptique et que g_2 est une isométrie hyperbolique ou parabolique, les points fixes, de g font partis de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ qui est le bord du bidisque.

— Si g_1 est une isométrie hyperbolique ou parabolique et que g_2 est une isométrie elliptique, les points fixes, de g font partis de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ qui est également le bord du bidisque.

— Si g_1 et g_2 sont hyperboliques ou paraboliques, on dit que la transformation g n'admet aucun point fixe dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ puisque les points fixes sont sur le bord du bidisque.

— Si g_1 et g_2 sont elliptiques, alors les points fixes g sont dans l'intérieur du bidisque.

Théorème 3.2.7. *Soit un sous-groupe G non cyclique de Γ. Si G est discret, alors les points fixes des isométries de la forme $g = (g_1, g_2)$ dans G, telle que g_1 et g_2 sont des isométries elliptiques, ne s'accumulent pas dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$.*

Démonstration :

On a pour hypothèse que G est discret, donc selon le théorème 1.2.6, l'action de G sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est proprement discontinue.

Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ et soit $K = K_1 \times K_2$ un voisinage compact de z. Comme l'action de G sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est proprement discontinue, on a que pour $g = (g_1, g_2) \in G$ une isométrie telle que g_1 et g_2 sont des isométries elliptique, $g(K) \cap K \neq \varnothing$ pour au plus un nombre fini de g dans G. Ainsi, seul un nombre fini de points fixes, des g en question, se trouvent dans K.
Ainsi, les points fixes de ces isométries ne s'accumulent pas dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. $\square$

Dans ce chapitre, on a montré que les sous-groupes cycliques engendrés par une isométrie dont une des composantes est hyperbolique ou parabolique sont nécessairement discrets. Dans le même sens, on a montré que les sous-groupes cycliques engendrés par une isométrie de la forme (*elliptique*, *elliptique*) dont une des composantes elliptiques est d'ordre infini ne peut être discret. Il serait donc intéressant de se pencher sur l'étude des sous-groupes engendrés par un nombre fini d'éléments et de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que le sous-groupe soit discret. On a déjà montré que dans un groupe discret les points fixes des isométries (g, h) dans Γ, telles que g et h sont des isométries elliptiques, ne s'accumulent pas dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. Il faudrait donc explorer le lien qui existe entre les points fixes des isométries de la forme précédente et les conditions qui font qu'un sous-groupe est discret.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté le bidisque en tant que variété riemannienne. On s'est intéressé aux groupes d'isométries cycliques dans le bidisque et à un critère pour que ces groupes soient discrets. Pour ce faire, dans le premier chapitre, on a donné les définitions et résultats nécessaires afin de présenter la géométrie du plan hyperbolique, c'est-à-dire sa métrique ainsi que sa topologie. Le second chapitre a été dédié à la présentation des groupes de transformations du plan hyperbolique dans l'optique de déterminer les conditions nécessaires pour qu'un groupe d'isométries soit discret qu'il soit cyclique ou pas. Enfin, dans le troisième chapitre on a déterminé les conditions pour qu'un groupe cyclique engendré par une isométrie du bidisque soit discret. Il est intéressant de se pencher sur les groupes d'isométries du bidisque engendré par un nombre fini d'isométries. Or, contrairement aux groupes d'isométries du plan hyperbolique, le critère qui détermine si ces groupes sont discrets implique l'étude des sous-groupes discrets denses dans la topologie de Zariski. Une possible suite de ce travail consistera à étudier les sous-groupes d'isométries du bidisque engendré par un nombre fini ou infini d'isométries et de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que de tels groupes soient discrets.

Annexe A

Sous-groupe stabilisateur

Exemple : *Le sous-groupe stabilisateur de* $G = \langle (g,h) \rangle \subset \Gamma$, *avec* g *une isométrie elliptique et* h *une isométrie hyperbolique est égal à l'identité.*

Démonstration : Soit $\{(g,h)^n\}$ une suite dans G et soit $(x,y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$:

$$(g,h)^n(x,y) = (g^n, h^n)(x,y) = (x,y)$$

si et seulement si

$$g^n(x) = x \text{ et } h^n(y) = y$$

si et seulement si

$$g^n = id\,, \text{et}\, h^n = id$$

si et seulement si

$$n = 0$$

Puisque la seule puissance où h est égal à id est la puissance nulle. Or, si $n = 0$, on a que g est également l'identité.

Ainsi, $\{(g,h) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) \mid (g,h)(x,y) = (x,y)\} = (1,1)$ $\square$

Annexe B

Lemme de Selberg

Dans cet annexe, on reprend le lemme de Selberg présenté dans le chapitre 2 au lemme 2.2.15. On veut donc montrer que le produit de deux groupes engendré par des matrices $n \times n$ à coefficient complexes admet un sous-groupe normal d'indice fini qui n'admet aucun élément non-trivial d'ordre fini.

Lemme B.0.8. *Soit $G_1 = \langle A_1, A_2, ..., A_m \rangle$ et $G_2 = \langle B_1, B_2, ..., B_m \rangle$ deux groupes engendré par des matrices $n \times n$ à coefficients complexes.*

$G_1 \times G_2$ admet un sous-groupe normal d'indice fini qui n'admet aucun élément non-trivial d'ordre fini.

Démonstration :

1) Selon le lemme 2.2.15, G_1 et G_2 admettent chacun un sous-groupe normal d'indice fini qui ne contient aucun élément non-trivial d'ordre fini. On les notera H_1 et H_2 respectivement.

   On veut montrer que $H = H_1 \times H_2$ est un sous-groupe normal de $G_1 \times G_2$.

Prenons un élément quelconque $g = (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, on veut montrer que

$$gHg^{-1} \in H$$

Prenons $h = (h_1, h_2) \in H$ quelconque, selon l'action de groupe définie à la définition 3.2.1, on a que

$$ghg^{-1} = (g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1h_1g_1^{-1}, g_2h_2g_2^{-1})$$

où $g_1h_1g_1^{-1} \in H_1$ et $g_2h_2g_2^{-1} \in H_2$ car H_1 et H_2 sont normal dans G_1 et G_2 respectivement.

Ainsi, on a que H est un sous-groupe normal de $G_1 \times G_2$.

2) On veut montrer que H est d'indice fini dans $G_1 \times G_2$.

On a que H_1 et H_2 sont d'indice fini dans G_1 et G_2 respectivement. Ainsi,

$$[G_1 : H_1] < \infty \quad \text{et} \quad [G_2 : H_2] < \infty$$

Et on peut montrer que

$$[G_1 \times G_2 : H] = [G_1 : H_1] \cdot [G_2 : H_2] < \infty$$

En effet, puisque H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G_1 et G_2 qui sont engendrés par un nombre fini d'éléments on aura que

$$[G_1 : H_1] = \frac{|G_1|}{|H_1|}$$

et

$$[G_2 : H_2] = \frac{|G_2|}{|H_2|}$$

Le résultat précédent est tirée de Assem et Leduc [2].

Ainsi,

$$[G_1 \times G_2 : H] = \frac{|G_1 \times G_2|}{|H|} = \frac{|G_1|}{|H_1|} \cdot \frac{|G_2|}{|H_2|} = [G_1 : H_1] \cdot [G_2 : H_2] < \infty$$

Et on a le résultat.

3) Enfin, H ne doit pas contenir d'élément non-trivial d'ordre fini de la forme $(elliptique, elliptique)$.

Or, chaque composante H_1 et H_2 de H n'admet aucun élément non-trivial d'ordre fini. Ainsi, le produit de tels éléments ne permet pas la présence d'élément de la forme $(elliptique, elliptique)$ d'ordre fini. De plus, chaque éléments de H n'admet de composante elliptique d'ordre fini.

$\square$

Bibliographie

[1] Herbert Abels and Polychronis Strantzalos, *Proper transformation groups*.

[2] Ibrahim Assem and Pierre Yves Leduc, *Cours d'algèbre : groupes, anneaux, modules et corps*, Presses inter Polytechnique, 2009.

[3] Alan F Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer, 1983.

[4] Alan F Beardon and David Minda, *The hyperbolic metric and geometric function theory*, Quasiconformal mappings and their applications **vol. 956** (2007).

[5] Glen E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1997, Corrected third printing of the 1993 original. MR 1700700 (2000b :55001)

[6] Virginie Charette, Todd A Drumm, and Rosemonde Lareau-Dussault, *Equidistant hypersurfaces of the bidisk*, Geometriae Dedicata (2013), 1–10.

[7] Svetlana Katok, *Fuchsian groups*, University of Chicago Press, 1992.

[8] John Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, vol. 149, Springer Science & Business Media, 2006.

[9] Halsey Lawrence Royden, Patrick Fitzpatrick, and Prentice Hall, *Real analysis*, vol. 198, Macmillan New York, 1988.