

**Sur les modules de dimension projective infinie sur les algèbres  
inclinées-amassées**

par

Louis Beaudet

Thèse présentée au Département de mathématiques  
en vue de l'obtention du grade de philosophie doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 2014

Le 11 août 2014

*le jury a accepté la thèse de Monsieur Louis Beaudet  
dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeur François Huard  
Directeur de recherche  
Département de mathématiques  
Université Bishop's

Professeur Thomas Brüstle  
Codirecteur de recherche  
Département de mathématiques

Professeur Shiping Liu  
Membre interne  
Département de mathématiques

Professeur Ralf Schiffler  
Membre externe  
Département de mathématiques  
Université du Connecticut

Professeur Ibrahim Assem  
Président rapporteur  
Département de mathématiques

*À ma famille*

# SOMMAIRE

L'objectif principal de cette thèse est d'approfondir l'étude des modules de dimension projective infinie sur les algèbres inclinées-amassées. Dans un premier temps, nous bornerons la fonction  $\phi$  d'Igusa-Todorov dans le cadre des algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Subséquemment, nous donnerons une preuve combinatoire de la périodicité des premiers syzygies des modules de corde et de bande sur de telles algèbres. Grâce à cette périodicité, nous serons en mesure de borner supérieurement la  $\phi$ -dimension d'Igusa-Todorov.

Nous caractériserons, dans une deuxième partie, les modules de dimension projective infinie de l'algèbre d'endomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ , où  $\mathcal{C}$  est une catégorie triangulée possédant un objet  $T$  maximal 1-orthogonal. Nous montrerons qu'un  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ -module  $M$  est de dimension projective infinie si et seulement si son idéal de factorisation  $I_M \trianglelefteq \text{End}_{\mathcal{C}}(T[1])$  est non nul. De plus, inspirés par les travaux sur les hamacs de Brenner, Ringel et Vossieck ([7], [26]), nous décrirons et regrouperons les modules de dimension projective infinie en un nouvel ensemble, appelé balançoire, particulièrement localisable dans le carquois d'Auslander-Reiten de  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ .

# ABSTRACT

The writing of this thesis was guided by a single main idea; to go deeper in the study of infinite projective dimension modules on cluster-tilted algebras. At first, we will find an upper bound for the function  $\phi$  of Igusa-Todorov in the framework of the cluster-tilted algebras of type  $\mathbb{A}_n$  and  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Subsequently, we will give a combinatorial proof of the periodicity of the first syzygy of a string and a band module on such algebras. With this periodicity, we will be able to bound the  $\phi$ -dimension of Igusa-Todorov.

In the second part, we will characterize infinite projective dimension modules by explaining their exact positions in the Auslander-Reiten quiver of the algebra  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ , where  $\mathcal{C}$  is any triangulated category and  $T$  a 1-maximal orthogonal object of  $\mathcal{C}$ . We show that an  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ -module  $M$  is of infinite projective dimension if and only if its factorization ideal  $I_M \leq \text{End}_{\mathcal{C}}(T[1])$  is nonzero. In addition, inspired by the works on hammocks by Brenner, Ringel and Vossieck ([7], [26]), we will describe and regroup in a new set, called a swing, the modules of infinite projective dimension especially localizable in the quiver of Auslander-Reiten of  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ .

# REMERCIEMENTS

Mes plus sincères remerciements à mes directeurs de thèse, Pr. Thomas Brüstle et Pr. François Huard, qui furent une source non seulement d'inspiration et de savoir mathématique, mais également d'encouragements soutenus tout au long de ma recherche. Leur disponibilité constante et surtout leur patience face aux affres de mes inquiétudes ont permis une atmosphère propice au parachèvement de mes études. Sincèrement toute ma gratitude.

Un mot également pour la formidable équipe d'algèbre de l'Université de Sherbrooke : Pr. Ibrahim Assem, pour son support énergique et son optimisme, ainsi que Pr. Shiping Liu pour m'avoir guidé, lors de séances d'exercices dirigées, dans les prémices de ma nouvelle carrière d'enseignant. J'ai également eu la chance, tout au long de mon parcours, de rencontrer moult collègues de différentes universités. J'aimerais souligner ici ma collaboration toute particulière avec Pr. Gordana Todorov de la Northeastern University, qui dans sa bonhomie m'a permis de me sentir partie intégrante de notre petite équipe de travail. Merci également au Pr. Kiyoshi Igusa pour ces discussions animées notamment sur les idées précurseuses de la fonction d'Igusa-Todorov.

J'aimerais de plus remercier Grégoire Dupont pour de multiples digressions mathéma-

tiques et sa façon saine et positive de relativiser les découragements que l'on peut rencontrer lors de la recherche graduée. Une expérience et une amitié d'une grande richesse.

Plus personnellement, je ne saurais passer outre famille et amis, tout spécialement mes parents Louise et Jean ainsi que Karelle et Judith, qui m'ont donné la motivation nécessaire à la rédaction de cette thèse. Il y a très certainement une partie de vous dans cet accomplissement.

Louis Beaudet  
Sherbrooke, avril 2014

# TABLE DES MATIÈRES

<b>SOMMAIRE</b>	<b>3</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>4</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>5</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>10</b>
<b>CHAPITRE 1 — Préliminaires</b>	<b>14</b>
1.1 Algèbres des chemins . . . . .	14
1.2 La théorie d’Auslander-Reiten . . . . .	19
1.3 La catégorie dérivée-bornée . . . . .	23
1.4 Catégories triangulées . . . . .	26
<b>CHAPITRE 2 — Algèbres inclinées-amassées</b>	<b>31</b>
2.1 Catégories amassées et algèbres inclinées-amassées . . . . .	31
2.2 Mutation de carquois . . . . .	38



<b>CHAPITRE 3 — La fonction d’Igusa-Todorov</b>	<b>40</b>
3.1 Définitions et exemples . . . . .	40
<b>CHAPITRE 4 — La fonction d’Igusa-Todorov pour les cas <math>\mathbb{A}_n</math> et <math>\tilde{\mathbb{A}}_n</math></b>	<b>45</b>
4.1 Algèbres de corde . . . . .	45
4.2 Algèbres inclinées-amassées de type $\mathbb{A}_n$ . . . . .	49
4.3 Algèbres inclinées-amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . . . . .	51
4.4 Algèbres inclinées-amassées de type $\mathbb{A}_n$ et $\tilde{\mathbb{A}}_n$ issues de surfaces . . . . .	53
4.5 Périodicité . . . . .	55
4.5.1 Modules de corde . . . . .	55
4.6 Fonction d’Igusa-Todorov . . . . .	76
<b>CHAPITRE 5 — Modules de dimension projective infinie sur les algèbres inclinées-amassées</b>	<b>81</b>
5.1 Préliminaires . . . . .	82
5.2 Théorème principal . . . . .	84
5.3 Hamacs, balançoires et faisceaux . . . . .	89
5.3.1 Hamacs sur les catégories amassées . . . . .	91
5.3.2 Hamacs sur les catégories triangulées . . . . .	92
5.3.3 Catégories amassées de type $\mathbb{A}$ . . . . .	94
5.3.4 Catégories amassées de type $\mathbb{D}$ . . . . .	95

<b>CONCLUSION</b>	<b>100</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>102</b>

# INTRODUCTION

Tout au long de cette thèse, nous travaillerons dans un contexte où  $k$  est un corps algébriquement clos. Pour une algèbre  $\Lambda$ , nous noterons  $\text{mod } \Lambda$  la catégorie des  $\Lambda$ -modules à droite de type fini. Une place prépondérante sera donnée aux algèbres amassées introduites par Fomin et Zelevinsky dans [16], plus particulièrement, aux algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ , définies par Caldero, Chapoton et Schiffler et par Buan, Marsh et Reiten (voir [8], [9], [14]).

Dans [22], Igusa et Todorov définirent un invariant permettant une nouvelle approche des modules de dimension projective infinie soit la fonction  $\phi$  appelée fonction d'Igusa-Todorov. Pour un anneau artinien à droite  $R$ , notons  $K$  le groupe abélien libre engendré par tous les symboles  $[M]$ , pour  $M$  un  $R$ -module à droite de type fini, factorisé par le sous-groupe engendré par :

- (a)  $[A] - [B] - [C]$  si  $A \cong B \oplus C$ ,
- (b)  $[P]$  si  $P$  est projectif.

$K$  est donc le groupe abélien libre engendré par un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphisme des  $R$ -modules de type fini, indécomposables et non projectifs. On peut appliquer à ce groupe  $K$  le foncteur syzygie, noté  $\Omega$ . Nous avons ainsi l'ho-

homomorphisme de groupes  $\Omega : K \rightarrow K$ . Notons  $\langle \text{add } M \rangle$  le sous-groupe de  $K$  engendré par les facteurs directs indécomposables et non projectifs de  $M$ . En vertu du principe du bon ordre, il existe un entier  $n$  tel que le rang de  $\Omega^n(\langle \text{add } M \rangle)$  soit égal au rang de  $\Omega^i(\langle \text{add } M \rangle)$  pour tout  $i \geq n$ . On définit  $\phi_P(M)$  comme étant le plus petit  $n$  où il y a stabilité pour le rang. Nous avons la définition suivante.

**Définition 0.1** *Soit  $R$  un anneau artinien à droite. La  $\phi$ -dimension projective de  $R$ , notée  $\phi_P \dim(R)$ , est définie par  $\phi_P \dim(R) = \sup\{\phi_P(M) \mid M \in \text{mod } R\}$ . De façon tout à fait analogue, on définit  $\phi_I \dim(R) = \sup\{\phi_I(M) \mid M \in \text{mod } R\}$ .*

**Remarque 0.2** *Par abus de notation, nous utiliserons  $\phi$  pour la fonction  $\phi_P$  et  $\phi \dim$  pour la fonction  $\phi_P \dim$ .*

Récemment, Huard et Lanzilotta ([21]), publièrent un premier résultat caractérisant les algèbres auto-injectives en fonction de leur  $\phi$ -dimension. En effet, ils démontrèrent que pour une algèbre  $\Lambda$ ,  $\phi \dim(\Lambda)$  est nulle si et seulement si  $\Lambda$  est auto-injective. Au chapitre 4 de cette thèse, nous avons tenté une approche semblable, c'est-à-dire borner la  $\phi$ -dimension pour d'autres types d'algèbres. Plus précisément, nous avons utilisé la fonction d'Igusa-Todorov dans le but de contrôler ou de mieux comprendre les modules de dimension projective infinie sur les algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . À l'aide de quelques propriétés combinatoires, nous avons pu établir, dans un premier temps, le résultat suivant.

**Théorème 0.3** *Tous les modules de corde de dimension projective infinie sur une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  ont un premier syzygie  $\Omega$ -périodique de périodicité 3 modulo leurs facteurs directs projectifs.*

Grâce à cette périodicité, nous avons borné la  $\phi$ -dimension de ces types d'algèbres dans le corollaire suivant.

**Corollaire 0.4** *Soit  $\Lambda$  une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Pour tout module  $M \in \text{mod } \Lambda$ , on a  $\phi(M) \leq 1$ . Ainsi,  $\phi \dim(\Lambda) \leq 1$ .*

Nous avons par la suite élargi notre recherche aux modules de dimension projective infinie sur une algèbre inclinée-amassée arbitraire et aux catégories amassées  $\mathcal{C}$  de types  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{D}$ . Nous étudierons l'idéal  $I_M$  de  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T[1])$  formé de tous les endomorphismes se factorisant par  $M \in \text{mod}(\text{End}_{\mathcal{C}}(T))$  et montrerons que les  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ -modules  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$  sont de dimension projective infinie précisément lorsque cet idéal est non nul.

**Théorème 0.5** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée et  $T$  un objet maximal 1-orthogonal. Soit  $M$  un objet indécomposable de  $\mathcal{C}$  n'appartenant pas à  $\text{add } T[1]$ . Alors, le  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$  est de dimension projective infinie précisément lorsque l'idéal de factorisation  $I_M$  est non nul.*

Inspiré par les notions de hamacs étudiées par Brenner dans [7] ou encore par Ringel et Vossieck dans [26], nous introduirons la notion d'hamac à gauche et à droite pour des catégories triangulées et étudierons leurs interrelations avec le sous-carquois

$$H(i, j) = \{X \in \mathcal{C} \mid \text{il existe } 0 \neq \lambda : T_i[1] \rightarrow T_j[1] \text{ se factorisant par } X\}.$$

Nous étendrons le concept à celui de balançoire, soit la collection des objets appartenant à deux chemins sectionnels du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  aux points fixes  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$ , notée  $S(T_i[1], T_j[1])$ . En définissant  $H_i$  et  ${}_jH$  comme étant respectivement le support de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_i[1], -)$  et de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, T_j[1])$ , nous obtiendrons les deux résultats de localisation suivants.

**Proposition 0.6** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie amassée de type  $\mathbb{D}$ . Supposons que  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$  sont deux objets du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  situés de telle façon que  $H(i, j) \neq \emptyset$ ,*

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_i[1], T_i) \neq 0$  et qu'il n'y ait pas de chemin sectionnel de  $T_i[1]$  à  $T_j[1]$ . Alors,  $H(i, j)$  est une balançoire aux points fixes  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$ . De plus,

$$H(i, j) \neq (H_i \cap {}_jH)$$

dans le cas où  $S(T_i[1], T_j[1]) \neq (H_i \cap {}_jH)$ .

**Proposition 0.7** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie amassée de type  $\mathbb{D}$ . Supposons que  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$  sont deux objets du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  situés de telle façon que  $H(i, j) \neq \emptyset$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_i[1], T_i) \neq 0$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_j[1], T_j) \neq 0$ . Alors,

$$(H_i \cap {}_jH) = H(i, j).$$

Le premier chapitre en est un de rappels de différentes notions essentielles de la théorie des représentations et celle d'Auslander-Reiten. Les chapitres deux et trois seront consacrés aux fondements nécessaires à la théorie des algèbres inclinées-amassées ainsi qu'à un bref rappel de la fonction d'Igusa-Todorov. Une borne pour la  $\phi$ -dimension des algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  sera calculée au chapitre quatre. Finalement, une localisation des modules de dimension projective infinie sur une algèbre inclinée-amassée sera explicitée au chapitre cinq.

# CHAPITRE 1

## Préliminaires

Ce chapitre se veut une brève introduction aux définitions et résultats de base de la théorie des représentations. Nous suivrons une approche chronologique axée sur la théorie des carquois de Gabriel et celle des suites presque-scindées d'Auslander-Reiten constituant une ébauche sommaire de ce qui fera par la suite partie intrinsèque de tous nos résultats.

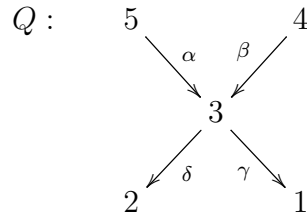
### 1.1 Algèbres des chemins

Nous développerons ici la théorie des carquois introduite par Gabriel dans les années 70. Les carquois, constructions de flèches et de points, sont des structures graphiques précieuses ainsi que des supports visuels simples et fidèles des algèbres. Nous verrons qu'à une  $k$ -algèbre correspond une telle structure et que, réciproquement, à un carquois correspond une  $k$ -algèbre associative.

**Définition 1.1** *Un carquois  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$  est constitué d'un ensemble  $Q_0$  de points et d'un ensemble  $Q_1$  de flèches et de deux morphismes  $s$  et  $b : Q_1 \rightarrow Q_0$  qui à chaque*

flèche  $\alpha \in Q_1$  lui associent sa source  $s(\alpha) \in Q_0$  et son but  $b(\alpha) \in Q_0$  respectivement. Ce carquois est dit fini si les ensembles  $Q_0$  et  $Q_1$  sont tous deux finis.

**Exemple 1.2** Voici un carquois  $Q$  composé de 4 flèches et de 5 points.



Un chemin de longueur  $l \geq 1$  est une suite de flèches dont la concaténation est possible (le but de l'une est la source de l'autre). Un chemin est donc une suite  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_l$  telle que  $\alpha_i \in Q_1$  et  $b(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$  pour  $1 \leq i \leq l - 1$ . Un chemin stationnaire en  $a \in Q_0$ , noté  $e_a$ , est un chemin de longueur 0 ayant comme source et comme but le point  $a$ .

Ayant maintenant en main les définitions d'un carquois et d'une concaténation de chemins, nous sommes en mesure de définir l'algèbre des chemins sur ce carquois.

**Définition 1.3** Soit  $Q$  un carquois. L'algèbre des chemins  $kQ$  de  $Q$  sur  $k$  est la  $k$ -algèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent a pour base l'ensemble de tous les chemins de longueur  $l \geq 1$  dans  $Q$  et tel que le produit de deux vecteurs de base  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l$  et  $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k$  de  $kQ$  est défini par

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l)(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k$$

si  $b(\alpha_l) = s(\beta_1)$  et égal à 0 sinon.

Le produit d'un élément arbitraire de  $kQ$  est ensuite induit du produit des éléments de la base par la  $k$ -bilinéarité.



L'algèbre des chemins  $kQ$  est donc l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans  $k$  des chemins du carquois  $Q$ .

**Exemple 1.4** *Soit le carquois*

$$Q : 3 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 1$$

*L'algèbre des chemins est donnée par*

$$kQ = \langle e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \alpha\beta \rangle.$$

Le lemme suivant précise davantage la structure d'algèbre de  $kQ$ .

**Lemme 1.5** *Soit  $Q$  un carquois et  $kQ$  son algèbre des chemins. Alors,*

- (1)  *$kQ$  est une algèbre associative,*
- (2)  *$kQ$  possède un élément identité si et seulement si  $Q_0$  est fini,*
- (3)  *$kQ$  est de dimension finie si et seulement si  $Q$  est fini et acyclique.*

Dans ce qui suit, nous étudierons les quotients d'une algèbre des chemins. Nous verrons qu'il est possible de factoriser  $kQ$  par un idéal judicieusement défini. Tout d'abord, quelques définitions.

**Définition 1.6** *Soit  $Q$  un carquois fini et connexe. L'idéal de  $kQ$  engendré par les flèches de  $Q$  est appelé l'idéal des flèches de  $kQ$  et est noté  $R_Q$ .*

Remarquons qu'il y a décomposition en somme directe de  $R_Q$  en tant qu'espace vectoriel sur  $k$  :

$$R_Q = kQ_1 \oplus kQ_2 \oplus \cdots \oplus kQ_l \oplus \cdots$$

où  $kQ_l$  est le sous espace vectoriel de  $kQ$  engendré par l'ensemble  $Q_l$  de tous les chemins de longueur  $l$ . En particulier, nous avons

$$R_Q^l = \bigoplus_{m \geq l} kQ_m.$$

Voyons comment factoriser l'algèbre des chemins par un idéal de  $kQ$  contenu dans  $R_Q^2$  pour former de nouvelles algèbres.

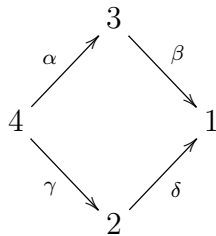
**Définition 1.7** Soit  $Q$  un carquois fini et  $R_Q$  l'idéal des flèches de l'algèbre des chemins  $kQ$ . Un idéal bilatère  $I$  de  $kQ$  est dit admissible s'il existe  $m \geq 2$  tel que  $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$ .

Si  $I$  est un idéal admissible de  $kQ$ , alors la paire  $(Q, I)$  est appelée un carquois lié. L'algèbre quotient  $kQ/I$  est l'algèbre de ce carquois lié  $(Q, I)$ .

Un premier résultat sur la dimension de ces algèbres est donné dans la proposition suivante.

**Proposition 1.8** Soit  $Q$  un carquois fini et  $I$  un idéal admissible de  $kQ$ . Alors, l'algèbre  $kQ/I$  est de dimension finie.

**Exemple 1.9** Le carquois  $Q$  donné par



peut être factorisé par l'idéal admissible  $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$  pour donner l'algèbre quotient  $kQ/I = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta \rangle$ , où tous les chemins énumérés ici représentent des classes d'équivalence distinctes.

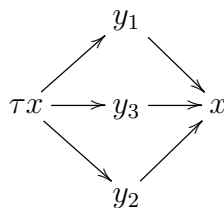
Soit  $x$  un point d'un carquois donné  $Q$ . Notons respectivement  $x^+$  et  $x^-$  l'ensemble des points qui succèdent et qui précèdent  $x$  dans le carquois  $Q$ . C'est-à-dire, l'ensemble des points  $z$  et  $y$  de  $Q$  tel qu'il existe respectivement un chemin dans  $Q$  de  $x$  vers  $z$  et de  $y$  vers  $x$ .

**Définition 1.10** Soit  $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  un carquois acyclique localement fini et  $\tau$  une bijection de domaine et codomaine un sous-ensemble de  $\Gamma_0$ . La paire  $(\Gamma, \tau)$  est appelée un carquois à translation si, pour tout  $x \in \Gamma_0$  tel que  $\tau x$  existe et tout prédécesseur  $y \in x^-$ , le nombre de flèches de  $y$  vers  $x$  égale le nombre de flèches de  $\tau x$  vers  $y$ .

Un sous-carquois  $(\Gamma', \tau')$  d'un carquois à translation  $(\Gamma, \tau)$  est un sous-carquois à translation plein si  $\Gamma'$  est un sous-carquois plein de  $\Gamma$  et si  $\tau'x = \tau x$  lorsque  $x$  est un point de  $\Gamma'$  tel que  $\tau x \in \Gamma'$ .

Clairement, si  $x \in \Gamma_0$  est tel que  $\tau x$  existe, alors  $(\tau x)^+ = x^-$ . C'est-à-dire, les prédécesseurs immédiats de  $x$  sont les successeurs immédiats de  $\tau x$ . De plus, le sous-carquois plein de  $\Gamma$  constitué d'un point non projectif (un point de  $\Gamma$  dont  $\tau$  n'est pas défini), de ses translatés  $\tau x$  et des points de  $(\tau x)^+ = x^-$  est appelé une maille se terminant en  $x$  et débutant en  $\tau x$ .

**Exemple 1.11** Voici un exemple de maille à 3 termes médians où  $\{y_1, y_2, y_3\} = (\tau x)^+ = x^-$ .



**Définition 1.12** Soit  $Q = (Q_0, Q_1)$  un carquois acyclique et connexe. On définit le carquois à translation infini  $(\mathbb{Z}Q_0, \tau)$  comme suit.

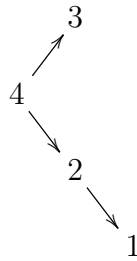
L'ensemble des points de  $\mathbb{Z}Q$  est donné par  $(\mathbb{Z}Q)_0 = \mathbb{Z} \times Q_0 = \{(n, x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in Q_0\}$  et pour chaque flèche  $\alpha : x \rightarrow y$  de  $Q_1$  et chaque  $n$  de  $\mathbb{Z}$ , il existe deux flèches de  $(\mathbb{Z}Q)_1$ ,

$$(n, \alpha) : (n, x) \rightarrow (n, y) \quad \text{et} \quad (n, \alpha') : (n+1, y) \rightarrow (n, x).$$

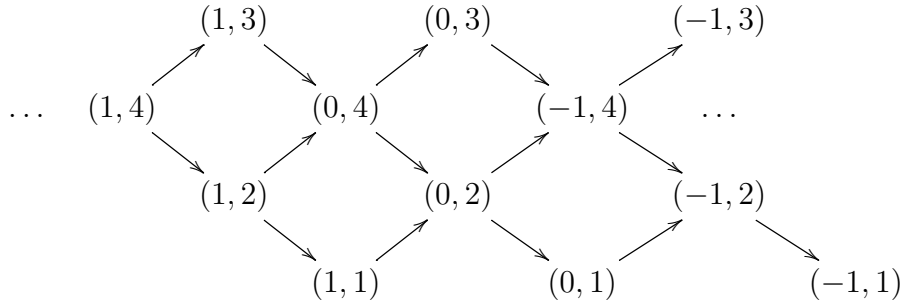
Ce sont là toutes les flèches de  $(\mathbb{Z}Q)_1$ . On définit la translation  $\tau$  sur  $\mathbb{Z}Q$  par  $\tau(n, x) = (n+1, x)$ , pour tout  $(n, x) \in (\mathbb{Z}Q)_0$ . Il suffit par la suite de définir une bijection  $\sigma$  entre l'ensemble des flèches de but  $(n, x)$  et ceux de source  $(n+1, x)$  par

$$\sigma(n, \alpha) = (n, \alpha') \quad \text{et} \quad \sigma(n, \alpha') = (n+1, \alpha).$$

**Exemple 1.13** Prenons le carquois  $Q$  suivant.



Le carquois  $\mathbb{Z}Q$  est de la forme



## 1.2 La théorie d'Auslander-Reiten

Nous introduisons ici d'autres notions classiques que nous utiliserons abondamment soient celles de suites presque-scindées et de carquois d'Auslander-Reiten. Des notions maintenant indispensables à la théorie des représentations.

**Définition 1.14** Soit  $A$  une  $k$ -algèbre de dimension finie et  $L, M, N$  des modules de  $\text{mod } A$ .

(1) Un homomorphisme de  $A$ -modules  $f : L \rightarrow M$  est dit minimal à gauche si tout  $h \in \text{End}(M)$  tel que  $hf = f$  est un automorphisme.

(2) Un homomorphisme de  $A$ -modules  $g : M \rightarrow N$  est dit minimal à droite si tout  $h \in \text{End}(M)$  tel que  $gh = g$  est un automorphisme.

(3) Un homomorphisme de  $A$ -modules  $f : L \rightarrow M$  est dit presque-scindé à gauche si  $f$  n'est pas une section et pour tout  $A$ -homomorphisme  $u : L \rightarrow U$  qui n'est pas une section, il existe  $u' : M \rightarrow U$  tel que  $u'f = u$ .

(4) Un homomorphisme de  $A$ -modules  $g : M \rightarrow N$  est dit presque-scindé à droite si  $g$  n'est pas une rétraction et pour tout  $A$ -homomorphisme  $v : V \rightarrow N$  qui n'est pas une rétraction, il existe  $v' : V \rightarrow M$  tel que  $gv' = v$ .

De plus, un homomorphisme de  $A$ -modules  $f : L \rightarrow M$  est dit minimal presque-scindé à gauche (respectivement à droite) s'il est à la fois minimal à gauche (respectivement à droite) et presque-scindé à gauche (respectivement à droite).

Afin de construire le carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre donnée, nous aurons également besoin de la notion d'irréductibilité d'un morphisme.

**Définition 1.15** Un homomorphisme de  $A$ -modules  $f : M \rightarrow Y$  est dit irréductible si

(1)  $f$  n'est ni une section, ni une rétraction et

(2) si  $f = f_1 f_2$ , alors  $f_1$  est une rétraction ou  $f_2$  est une section.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow f_2 & \nearrow f_1 \\ & Z & \end{array}$$

Nous avons également la proposition suivante concernant les noyaux et conoyaux de morphismes irréductibles.

**Proposition 1.16 ([5], Cor. 1.8)** (1) *Si  $f$  est un monomorphisme irréductible, alors  $\text{Coker } f$  est indécomposable.*

(2) *Si  $g$  est un épimorphisme irréductible, alors  $\text{Ker } f$  est indécomposable.*

Pour une algèbre  $A$  le carquois d'Auslander-Reiten s'avère utile dans l'étude de la catégorie des  $A$ -modules. En effet, il nous donne les briques fondamentales, c'est-à-dire les modules indécomposables sur cette algèbre, en plus des homomorphismes irréductibles entre ces derniers.

Soit  $M$  un  $A$ -module dont la présentation projective minimale est donnée par

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire où le morphisme  $p_0 : P_0 \rightarrow M$  et le morphisme  $P_1 \rightarrow \text{Ker } p_0$  induit de  $p_1$  sont des couvertures projectives. Appliquant à cette présentation le foncteur exact à gauche  $(-)^t = \text{Hom}_k(-, A)$  on obtient la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} \text{Coker } p_1^t \longrightarrow 0.$$

On appelle  $\text{Coker } p_1^t$  la transposée de  $M$ , notée  $\text{Tr}M$ . Notons  $\underline{\text{mod}} A$  la sous-catégorie de  $\text{mod } A$  obtenue en factorisant celle-ci par l'idéal des homomorphismes de  $M$  vers  $N$  se factorisant par un  $A$ -module projectif. Nous avons le foncteur dual suivant.

**Proposition 1.17** *La correspondance  $M \mapsto \text{Tr}M$  induit un foncteur  $k$ -linéaire  $\text{Tr} : \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A^{op}$ .*

Afin de définir un endofoncteur de  $\text{mod } A$  nous devons composer le foncteur  $\text{Tr}$  par le foncteur dual standard  $D = \text{Hom}_k(-, k)$ .

**Définition 1.18** *Les translations d'Auslander-Reiten sont définies comme étant les compositions des foncteurs  $D = \text{Hom}_k(-, k)$  avec  $\text{Tr}$ . Nous avons*

$$\tau = D\text{Tr} \quad \text{et} \quad \tau^{-1} = \text{Tr}D.$$

Soient  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules indécomposables. On note  $\text{rad}(M, N)$  le  $k$ -espace vectoriel de tous les homomorphismes non inversibles de  $M$  vers  $N$ . De la même façon,  $\text{rad}^2(M, N)$  est l'ensemble de tous les homomorphismes de la forme  $gf$  où  $f \in \text{rad}(M, Z)$  et  $g \in \text{rad}(Z, N)$  pour un module quelconque  $Z \in \text{mod } A$ . Nous avons le lemme suivant.

**Lemme 1.19** *Soient  $M$  et  $N$  deux modules indécomposables de  $\text{mod } A$ . Un homomorphisme  $f : M \rightarrow N$  est irréductible si et seulement si  $f \in \text{rad}(M, N) \setminus \text{rad}^2(M, N)$ .*

Ainsi, la dimension du quotient  $\text{Irr}(M, N) := \text{rad}(M, N) / \text{rad}^2(M, N)$  mesure le nombre d'homomorphismes irréductibles de  $M$  vers  $N$ . On appelle ce quotient l'espace des homomorphismes irréductibles.

**Définition 1.20** *Soit  $A$  une algèbre sobre et connexe de dimension finie. Le carquois  $\Gamma(\text{mod } A)$  de  $\text{mod } A$  est défini comme suit :*

- (1) *Les points de  $\Gamma(\text{mod } A)$  sont les classes d'isomorphisme  $[X]$  des modules indécomposables  $X \in \text{mod } A$ .*
- (2) *Soient  $[M]$  et  $[N]$  des points de  $\Gamma(\text{mod } A)$  correspondant à des modules indécomposables de  $\text{mod } A$ . Les flèches  $[M] \rightarrow [N]$  sont en bijection avec les vecteurs d'une base du  $k$ -espace vectoriel  $\text{Irr}(M, N)$ .*

*Le carquois  $\Gamma(\text{mod } A)$  de la catégorie de modules  $\text{mod } A$  est appelé le carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre  $A$ .*

De plus, les suites presque-scindées qui composent le carquois d'Auslander-Reiten peuvent être extrapolées du prochain théorème.

**Théorème 1.21** (1) *Pour tout  $A$ -module indécomposable non projectif  $M$ , il existe une suite presque-scindée de  $A$ -modules  $0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ .*

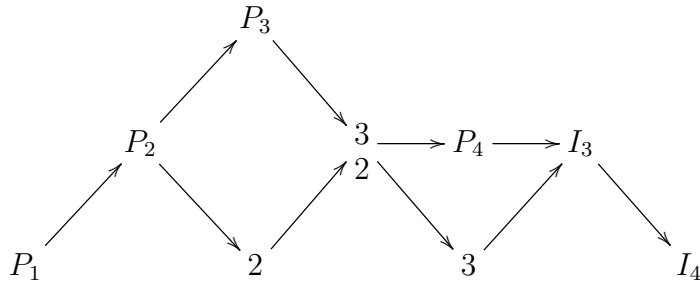
(2) *Pour tout  $A$ -module indécomposable non injectif  $N$ , il existe une suite presque-scindée de  $A$ -modules  $0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0$ .*

Résumons l'essence de la théorie d'Auslander-Reiten par un exemple.

**Exemple 1.22** *Soit le carquois*

$$Q : 4 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\gamma} 1$$

lié par l'idéal admissible  $I = \langle \alpha\beta\gamma \rangle$  et soit  $A = kQ/I$  l'algèbre des chemins de ce carquois lié. Le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\text{mod } A)$  est donné par



où nous avons, par exemple, les suites exactes presque-scindées suivantes.

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 2 \oplus P_3 \longrightarrow \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \longrightarrow 0 .$$

### 1.3 La catégorie dérivée-bornée

La théorie sur les catégories dérivées est essentiellement due à Grothendieck et Verdier dans les années soixante (voir [29] pour la thèse de Verdier). Construites à partir de la



catégorie des complexes d'une catégorie abélienne, elles s'avèrent un support nécessaire lorsque vient le temps d'étudier la catégorie amassée d'une algèbre héréditaire.

Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne quelconque. C'est-à-dire une catégorie dont tous les  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, -)$  sont des groupes abéliens, dont tous les homomorphismes ont un noyau et un conoyau (et dont les homomorphismes canoniques sont des isomorphismes) et finalement une catégorie où la composition des homomorphismes est bilinéaire. Un complexe  $(X^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , ou tout simplement  $X$ , est la donnée d'une chaîne doublement infinie de morphismes

$$\dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

où la composition  $d^{n+1} \circ d^n = 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . La catégorie des complexes de  $\mathcal{A}$ , notée  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ , est donnée par les classes d'objets  $\text{Ob}(\mathcal{C}(\mathcal{A})) := (X^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et de morphismes  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y) := (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  où  $X^n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Un morphisme de complexes  $f : X \rightarrow Y$  est une famille de morphismes  $f^n : X^n \rightarrow Y^n$ , telle que le diagramme suivant commute pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \\ \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\ Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \end{array}$$

$X^n$  est appelée la composante de degré  $n$  du complexe  $(X^n, d^n)$  et  $d^n$  la différentielle de degré  $n$ . Un tel complexe est dit borné inférieurement s'il existe  $N \in \mathbb{Z}$  tel que  $X^n = 0$  pour tous les entiers  $n \leq N$ . Pareillement, un complexe est dit borné supérieurement s'il existe  $N \in \mathbb{Z}$  tel que  $X^n = 0$  pour tous les entiers  $n \geq N$ . Un complexe est dit borné s'il est à la fois borné inférieurement et supérieurement. La catégorie des complexes est munie d'un automorphisme, noté  $[s]$ , pour un certain  $s \in \mathbb{Z}$ , dont l'action sur  $X$  est le complexe  $X[s] := (X^{n+s}, (-1)^s d^{n+s})$ . Cet automorphisme, compatible avec les homomorphismes, est appelé foncteur de décalage.

Un morphisme  $\phi : X \rightarrow Y$  entre deux complexes est homotope à zéro s'il existe des morphismes  $\rho^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$  tels que  $\phi^n = d_Y^{n-1} \circ \rho^n + \rho^{n+1} \circ d_X^n$ . De tels morphismes forment un idéal  $I(X, Y)$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ . C'est-à-dire, un sous-groupe tel que pour chaque paire de complexes  $X$  et  $Y$  nous avons l'inclusion suivante :

$$I(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y).$$

La catégorie d'homotopie  $K(\mathcal{A})$  est le quotient de  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  par cet idéal.

$$K(\mathcal{A}) := \mathcal{C}(\mathcal{A})/I(X, Y)$$

En particulier, pour chaque paire de complexes  $X, Y$ ,

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)/I(X, Y).$$

Le  $n^e$  groupe de cohomologie d'un complexe  $X$  est le quotient  $H^n(X) := \text{Ker}(d^n)/\text{Im}(d^{n-1})$ .

Un morphisme de complexes  $\phi : X \rightarrow Y$  est un quasi-homomorphisme si  $\phi^n$  induit un isomorphisme entre le  $n^e$  groupe de cohomologie de  $X$  et le  $n^e$  groupe de cohomologie de  $Y$ , c'est-à-dire si  $H^n(X) \xrightarrow{\sim} H^n(Y)$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Étant donnée une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$ , nous pouvons définir de nouvelles catégories appelées catégories d'homotopie ayant pour objets les complexes de  $\mathcal{A}$  et dont les morphismes sont des classes d'équivalence d'homotopie de morphismes de complexes. Nous obtenons différentes catégories d'homotopie selon le choix initial de complexes (bornés inférieurement, supérieurement ou tout simplement bornés). Ainsi, nous avons les sous-catégories pleines de  $K(\mathcal{A})$  suivantes :  $K^+(\mathcal{A})$ , des complexes bornés inférieurement ;  $K^-(\mathcal{A})$ , des complexes bornés supérieurement et finalement  $K^b(\mathcal{A})$ , des complexes bornés. Toutes ces catégories héritent de la structure additive de  $K(\mathcal{A})$  et, comme nous le verrons plus loin, sont des catégories dites triangulées. Ce qui nous amène à la définition d'une catégorie dérivée.

**Définition 1.23** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $S$  une classe d'homomorphismes de  $\mathcal{C}$ . La **localisation** de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $S$  est la catégorie  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  munie d'un foncteur  $Q$  satisfaisant :

- (1)  $Q(s)$  est un isomorphisme pour tout  $s \in S$ ,
- (2) tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tel que  $F(s)$  est un isomorphisme pour tout  $s \in S$  se factorise uniquement à travers  $Q$ .

**Définition 1.24** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. La **catégorie dérivée** de  $\mathcal{A}$ , notée  $D(\mathcal{A})$ , est la localisation de la catégorie d'homotopie  $K(\mathcal{A})$  par rapport à la classe  $S$  des quasi-isomorphismes, c'est-à-dire  $D(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A})[S^{-1}]$ .

Tout comme nous avons fragmenté notre définition de catégorie d'homotopie, nous pouvons restreindre la catégorie dérivée à la catégorie dérivée-bornée de  $\mathcal{A}$ .

**Définition 1.25** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. La **catégorie dérivée-bornée** de  $\mathcal{A}$ , notée  $D^b(\mathcal{A})$ , est la localisation de la catégorie d'homotopie bornée  $K^b(\mathcal{A})$  par rapport à la classe  $S$  des quasi-isomorphismes, c'est-à-dire  $D^b(\mathcal{A}) = K^b(\mathcal{A})[S^{-1}]$ .

Lorsque  $\mathcal{A}$  est abélienne,  $D^b(\mathcal{A})$  est engendrée, comme structure triangulée, par les complexes de  $\mathcal{A}$  concentrés en  $n = 0$ . Dans la prochaine section, nous étudierons ces catégories dites triangulées.

## 1.4 Catégories triangulées

Puisque les rudiments de la théorie des catégories triangulées seront utilisés dans les démonstrations ultérieures, nous croyons bon ici d'en rappeler quelques définitions et axiomes. Pour de plus amples informations, propriétés et définitions sur le sujet, nous référons le lecteur au livre de Happel [20].

Un **foncteur de translation** est un automorphisme de catégorie additive  $\mathcal{C}$ , noté  $T$  :  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ .

**Remarque 1.26** Dans ce qui suivra, nous utiliserons la notation  $X[n]$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ , plutôt que  $T^n X$  pour un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et un foncteur de translation  $T$ .

Un **sextuple**  $(X, Y, Z, u, v, w)$  d'une catégorie additive  $\mathcal{C}$  est la donnée d'objets  $X, Y, Z$  et de morphismes  $u, v, w$  de  $\mathcal{C}$  organisés comme suit :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

Un **morphisme de sextuple**  $(f, g, h)$  est pour sa part, un morphisme entre les objets qui composent cesdits sextuples et dont le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & \curvearrowright & \downarrow g & \curvearrowright & \downarrow h & \curvearrowright & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{u'} & X'[1] \end{array}$$

Si  $f, g$  et  $h$  sont des isomorphismes de  $\mathcal{C}$ , le morphisme est alors appelé un isomorphisme.

Une **rotation de sextuple** est une translation à gauche ou à droite d'un sextuple donné. Par exemple, pour le sextuple

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

nous avons les deux rotations suivantes :

$$Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \qquad Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$$

**Définition 1.27** Une catégorie additive  $\mathcal{C}$  est dite **triangulée** si elle est munie d'un foncteur de translation et d'une classe de sextuples, appelés triangles distingués, satisfaisant aux axiomes suivants :

- (1) Tout sextuple isomorphe à un triangle est également un triangle. Tout morphisme  $u : X \rightarrow Y$  peut être prolongé à un triangle  $(X, Y, Z, u, v, w)$ . Le sextuple  $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$  est un triangle.
- (2) Si  $(X, Y, Z, u, v, w)$  est un triangle, alors  $(Y, Z, X[1], v, w, -u[1])$  l'est aussi.
- (3) Étant donnés deux triangles  $(X, Y, Z, u, v, w)$  et  $(X', Y', Z', u', v', w')$  et deux morphismes  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : Y \rightarrow Y'$  tels que  $u'f = gu$ . Alors, il existe un morphisme  $(f, g, h)$  du premier triangle au second.
- (4) (Axiome de l'octaèdre) Considérons trois triangles  $(X, Y, Z', u, i, i')$ ,  $(Y, Z, X', v, j, j')$  et  $(X, Z, Y', uv, k, k')$ . Alors, il existe des morphismes  $f : Z' \rightarrow Y'$ ,  $g : Y' \rightarrow X'$  tels que le diagramme suivant commute et que la troisième ligne soit également un triangle.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{1_X} & X & & & & \\
 \downarrow u & & \downarrow vu & & & & \\
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{j'} & Y[1] \\
 \downarrow i & & \downarrow k & & \downarrow 1_{X'} & & \downarrow i[1] \\
 Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' & \xrightarrow{i[1]j'} & Z'[1] \\
 \downarrow i' & & \downarrow k' & & & & \\
 X[1] & \xrightarrow{1_{X[1]}} & X[1] & & & & 
 \end{array}$$

La catégorie  $D^b(\mathcal{A})$  est triangulée. Tout objet  $X \in \mathcal{A}$  peut être identifié à un complexe concentré en degré 0 de  $D(\mathcal{A})$  que nous noterons  $X[0]$ . Si nous nous transposons plus particulièrement dans le cas qui nous intéresse, soit le cas  $\mathcal{A} = \text{mod } A$ , une suite exacte courte de  $\text{mod } A$

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

peut être vue, dans  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ , comme la suite exacte courte

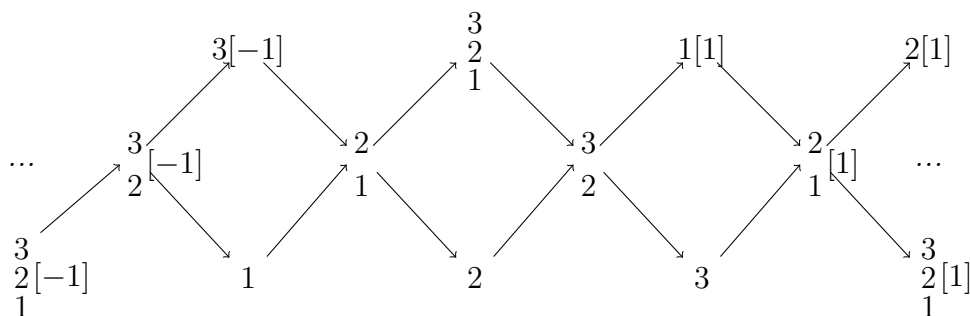
$$0 \longrightarrow X[0] \longrightarrow Y[0] \longrightarrow Z[0] \longrightarrow 0.$$

Le concept de suite exacte cédera cependant sa place à celui de triangle distingué. En fait, la catégorie  $D(\mathcal{A})$  n'est pas abélienne si  $\mathcal{A}$  n'est pas semi-simple. La structure abélienne des catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  devra donc être remplacée par la structure triangulée de  $D(\mathcal{A})$ .

Un théorème dû à Happel nous permet d'être plus concret en ce qui concerne la construction du carquois d'Auslander-Reiten de  $D^b(\text{mod } A)$  pour une algèbre héréditaire  $A = kQ$ . Celle-ci n'est que copies du carquois d'Auslander-Reiten de  $\text{mod } kQ$  muni du foncteur de décalage  $[1]$ .

**Théorème 1.28** *Soit  $Q$  un carquois de type Dynkin. Alors, le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie dérivée-bornée  $D^b(\text{mod } kQ)$  est le carquois à translation  $\mathbb{Z}Q$ , muni de la translation canonique.*

**Exemple 1.29** *Soit  $Q$  le carquois  $3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$  et  $A = kQ$  l'algèbre des chemins associée. Le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie  $D^b(\text{mod } A)$  est donné par*



Les objets indécomposables de  $D^b(\text{mod } A)$  sont de la forme  $M[i]$ , où  $M$  est un  $A$ -module indécomposable et  $[i]$ , pour  $i \in \mathbb{Z}$ , est le foncteur de translation de  $D^b(\text{mod } A)$ . Les

morphismes entre deux objets  $M[i]$  et  $N[j]$  de  $D^b(\text{mod } A)$  sont donnés par

$$\text{Hom}(M[i], N[j]) = \text{Ext}_A^{j-i}(M, N) = \begin{cases} \text{Hom}_A(M, N) & \text{si } j = i \\ \text{Ext}_A^1(M, N) & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le dernier 0 provenant du fait que l'algèbre  $A$  est héréditaire puisqu'en effet, pour toute algèbre héréditaire  $A$ , nous avons  $\text{Ext}_A^i(-, -) = 0$  pour tout  $i \geq 2$ .

Nous verrons, dans le chapitre suivant, comment tronquer la catégorie  $D^b(\text{mod } A)$  par une auto-équivalence pour ainsi mettre en relation directe la catégorie dérivée-bornée et la catégorie inclinée-amassée associée à l'algèbre des chemins de  $A = kQ$ .

# CHAPITRE 2

## Algèbres inclinées-amassées

Les algèbres amassées, introduites par Fomin et Zelevinsky dans [16] étendent maintenant leurs ramifications dans plusieurs branches des mathématiques. En géométrie, par exemple, pour les espaces de Teichmüller ou encore dans la théorie des représentations des algèbres de dimension finie.

Les catégories amassées (pour une introduction voir [8]) sont définies comme la catégorie orbite de  $\tau^{-1}[1]$  de la catégorie dérivée-bornée des  $kQ$ -modules de type fini, où  $Q$  est un carquois acyclique. Par la suite, Buan, Marsh et Reiten dans [9] introduisirent les algèbres inclinées-amassées, définies comme étant les algèbres d'endomorphismes d'objets inclinants sur la catégorie amassée d'une algèbre héréditaire  $kQ$ .

### 2.1 Catégories amassées et algèbres inclinées-amassées

Soit  $H$  une algèbre héréditaire de dimension finie sur un corps  $k$  algébriquement clos et soit  $D^b(\text{mod } H)$  la catégorie dérivée-bornée des  $H$ -modules de type fini. Sous l'action du



foncteur  $F := \tau^{-1}[1]$ , nous obtenons la catégorie amassée associée à l'algèbre  $H$ ,

$$C_H := D^b(\text{mod } H)/F.$$

Le théorème suivant dû à Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov nous permet de construire le carquois d'Auslander-Reiten de cette catégorie amassée. Il s'agit de tronquer le carquois d'Auslander-Reiten de  $D^b(\text{mod } H)$  et d'en rejoindre les extrémités. Rappelons qu'un foncteur  $F$  est une équivalence si et seulement si  $F$  est fidèle, plein et dense.

**Théorème 2.1 ([8])** *Soit  $Q$  un carquois de type Dynkin, et  $F$  une auto-équivalence d'ordre infini de la catégorie  $D^b(\text{mod } kQ)$ . Alors le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie  $D^b(\text{mod } kQ)/F$  est de la forme  $\mathbb{Z}Q/\phi$ , où  $\phi$  est l'automorphisme du carquois à translation de  $\mathbb{Z}Q$  correspondant à l'auto-équivalence  $F$ .*

Un type précis d'objets aux propriétés particulières, notamment sur leurs extentions  $\text{Ext}_{C_H}^1(-, -)$ , permettra la construction de nouvelles algèbres dites inclinées-amassées.

**Définition 2.2** *Soit  $T$  un objet de la catégorie amassée  $C_H$  et  $n$  le nombre de points du carquois associé à l'algèbre héréditaire  $H$ . Alors,  $T$  est un **objet inclinant** si*

- (1)  $\text{Ext}_{C_H}^1(T, T) = 0$ ,
- (2)  $T$  possède un nombre maximal de facteurs directs non isomorphes, c'est-à-dire  $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$ , où  $T_i$  est indécomposable et  $T_i \not\cong T_j$ .

Notons que nous retrouvons la définition originale d'un module inclinant  $T$  sur une algèbre  $\Lambda$  lorsqu'en plus de ces deux conditions nous avons  $\text{dp}_\Lambda T \leq 1$ . Pour tout objet  $T$ , nous désignerons par  $\text{add } T$  la sous-catégorie pleine dont les objets sont tous les facteurs directs de sommes directes de copies de  $T$ . Nous avons la caractérisation suivante d'un objet inclinant induite par la dualité de Serre ( $\text{Ext}_{C_H}^1(X, Y) \cong D\text{Hom}_{C_H}(Y, \tau X)$ ) et les propriétés du foncteur de décalage [1].

**Proposition 2.3 ([8])** *Soient  $X$  et  $T$  des objets de  $C_H$  où  $T$  est inclinant. Alors,*

$$\mathrm{Hom}_{C_H}(T, X[1]) = 0 \text{ si et seulement si } X \in \mathrm{add} T.$$

En fait, de par [9], nous avons une pleine caractérisation d'un objet inclinant. En effet, un objet  $T$  de  $C_H$  est inclinant si et seulement si l'égalité suivante est valable :  $\mathrm{Hom}_{C_H}(T, X[1]) = 0$  si et seulement si  $X \in \mathrm{add} T$ .

La définition d'une catégorie inclinée-amassée passe en premier lieu par une caractérisation précise du lien entre les objets de cette dernière et ses homomorphismes.

**Définition 2.4** *Soient  $\mathcal{X}$  une sous-catégorie additive d'une catégorie additive  $\mathcal{A}$  et  $M$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Un morphisme  $X' \rightarrow M$ , où  $X' \in \mathcal{X}$ , est une  **$\mathcal{X}$ -approximation** à droite de  $M$  (respectivement à gauche) si le morphisme induit  $\mathrm{Hom}(X, X') \rightarrow \mathrm{Hom}(X, M)$  est un épimorphisme (respectivement un monomorphisme) pour tout  $X \in \mathcal{X}$ .*

**Définition 2.5** *Soit  $\Lambda$  une algèbre artinienne. Une sous-catégorie  $\mathcal{X}$  de  $\mathrm{mod} \Lambda$  est une catégorie approximante à droite (respectivement approximante à gauche) de  $\mathrm{mod} \Lambda$  si tout module  $M$  de  $\mathrm{mod} \Lambda$  possède une  $\mathcal{X}$ -approximation à droite (respectivement une  $\mathcal{X}$ -approximation à gauche).*

Nous croyons également utile, dans une optique de généralisation future, d'apporter une définition plus large du concept d'inclinaison, celui d'une sous-catégorie inclinée-amassée. Gardons tout simplement à l'esprit que la sous-catégorie  $\mathrm{add} T$  est un cas particulier de la définition suivante.

**Définition 2.6** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie amassée. Une **sous-catégorie pleine**  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{C}$  est dite **inclinée-amassée** si elle satisfait aux propriétés suivantes :*

- (1)  $\mathcal{T}$  est fonctoriellement finie, c'est-à-dire approximante à gauche et à droite,
- (2)  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, X[1]) = 0$  si et seulement si  $X \in \mathcal{T}$ ,
- (3)  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{T}[1]) = 0$  si et seulement si  $X \in \mathcal{T}$ .

Le prochain résultat, dû à Keller, donne la structure triangulée nécessaire à la catégorie amassée définie plus haut.

**Théorème 2.7 ([23])** *La catégorie amassée  $C_H$  est triangulée.*

De plus, puisque la catégorie  $C_H$  est construite en factorisant la catégorie dérivée-bornée par l'action d'un foncteur, celle-ci hérite des triangles d'Auslander-Reiten de  $D^b(\text{mod } H)$ .

**Proposition 2.8 ([9])** *La catégorie  $C_H$  possède des triangles d'Auslander-Reiten induits de ceux de  $D^b(\text{mod } H)$ .*

Le corollaire suivant nous permettra de relever un morphisme  $f : T_0 \rightarrow M$  en un triangle.

**Corollaire 2.9 ([24])** *Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie inclinée-amassée d'une catégorie triangulée  $\mathcal{C}$ . Pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}$ , il existe un triangle*

$$T_1 \longrightarrow T_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow T_1[1]$$

où  $f$  est une  $\mathcal{T}$ -approximation à gauche de  $M$  et  $T_1 \in \mathcal{T}$ .

En plus d'être triangulée, la catégorie amassée possède deux autres propriétés essentielles à notre étude, soit celle d'être 2-Calabi-Yau, c'est-à-dire que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, Y) = D\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(Y, X)$ , pour deux objets  $X$  et  $Y$  de la catégorie triangulée en question, et celle d'être Hom-finie, c'est-à-dire que les  $k$ -espaces vectoriels  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  sont de dimension finie.

**Proposition 2.10 ([23])** *Soit  $Q$  un carquois fini sans cycle orienté et  $H = kQ$  l'algèbre héréditaire associée. La catégorie amassée  $C_H$  est Hom-finie et 2-Calabi-Yau.*

**Définition 2.11** Soit  $T$  un objet inclinant de la catégorie amassée  $C_H$ . L'algèbre inclinée-amassée associée à l'objet  $T$ , notée  $\text{End}_{C_H}(T)^{op}$ , est l'algèbre opposée des endomorphismes de  $T$  sur  $C_H$ .

De plus, si  $H = kQ$  où  $Q$  est un carquois de type Dynkin  $\Delta$ , on dira que l'algèbre inclinée-amassée correspondante est de type  $\Delta$ .

Puisque les deux résultats majeurs obtenus dans cette thèse portent sur la dimension projective d'un module  $M \in \text{mod}(\text{End}_{C_H}(T)^{op})$ , il est primordial d'introduire le concept de la dimension de Gorenstein d'une algèbre et de caractériser, grâce à un résultat de Keller et Reiten, celle des algèbres inclinées-amassées. Nous verrons que malgré leur dimension globale infinie, elles sont de dimension de Gorenstein plus petite ou égale à 1. Notons qu'une catégorie abélienne possède assez de projectifs (respectivement d'injectifs) si tout objet possède une couverture projective (respectivement une enveloppe injective).

**Définition 2.12** Une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  possédant assez de projectifs et assez d'injectifs est dite de **Gorenstein** si la sous-catégorie pleine des objets projectifs (respectivement injectifs) est approximante à gauche (respectivement approximante à droite) et si de plus, il existe un entier  $d$  tel que  $\text{dp}_{\mathcal{A}}I \leq d$  et  $\text{di}_{\mathcal{A}}P \leq d$  pour tout projectif  $P$  et injectif  $I$  de  $\mathcal{A}$ . Le maximum d'un tel  $d$ , s'il existe, est appelé la **dimension de Gorenstein** de  $\mathcal{A}$ .

Nous avons la borne suivante en ce qui concerne la catégorie abélienne des modules sur  $\text{End}_{C_H}(T)^{op}$ .

**Proposition 2.13 ([23])** Soit  $\Lambda := \text{End}_{C_H}(T)^{op}$  une algèbre inclinée-amassée. La dimension de Gorenstein de  $\Lambda$  est plus petite ou égale à 1.

En vertu de cette proposition, les algèbres inclinées-amassées ne possèdent que des modules de dimension projective 0, 1 ou infinie. Nous verrons, dans les démonstrations des

chapitres suivants, l'importance de cette restriction.

Un résultat clé de la théorie des algèbres inclinées-amassées démontré par Buan, Marsh et Reiten dans [9] montre la force du lien entre la catégorie amassée  $C_H$  et la catégorie des modules de l'algèbre inclinée-amassée obtenue à partir d'un objet inclinant de  $C_H$ . En effet, modulo l'idéal de tous les morphismes de  $C_H$  se factorisant par  $\text{add } \tau T$ , la catégorie  $C_H$  est équivalente à celle des modules de type fini sur  $\text{End}_{C_H}(T)^{op}$ .

**Théorème 2.14 ([9])** *Si  $T$  est un objet inclinant de  $C_H$ , le foncteur  $\text{Hom}_{C_H}(T, -)$  induit une équivalence  $C_H/\text{add } \tau T \rightarrow \text{mod}(\text{End}_{C_H}(T)^{op})$ .*

De plus, nous avons la proposition suivante concernant les suites et triangles presque-scindés.

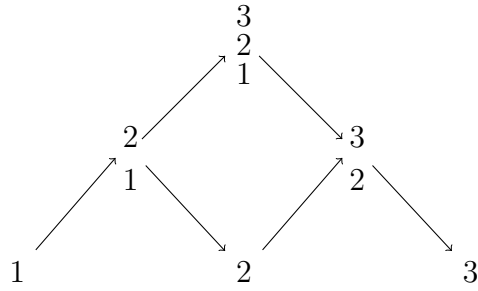
**Proposition 2.15 ([9])** *Les suites presque-scindées de  $C_H/\text{add } \tau T \simeq \text{mod}(\text{End}_{C_H}(T)^{op})$  sont induites des triangles presque-scindés de  $C_H$ .*

Rassemblons dans un exemple, l'ensemble de ces structures.

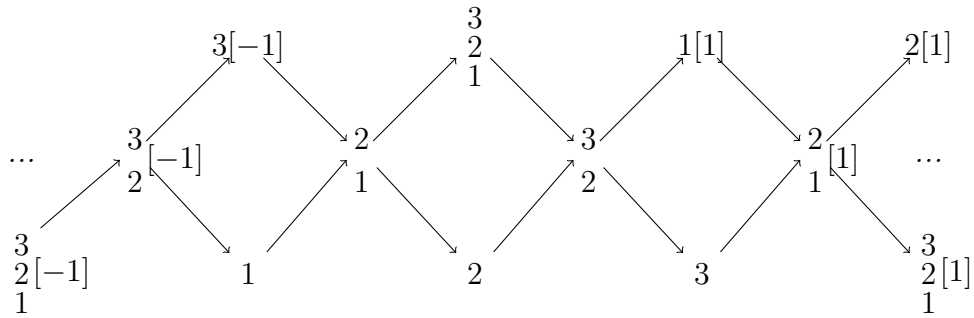
**Exemple 2.16** *Prenons le cas simple de l'algèbre de type  $\mathbb{A}_3$  donnée par l'algèbre des chemins  $H = kQ$  associée au carquois suivant.*

$$Q : 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

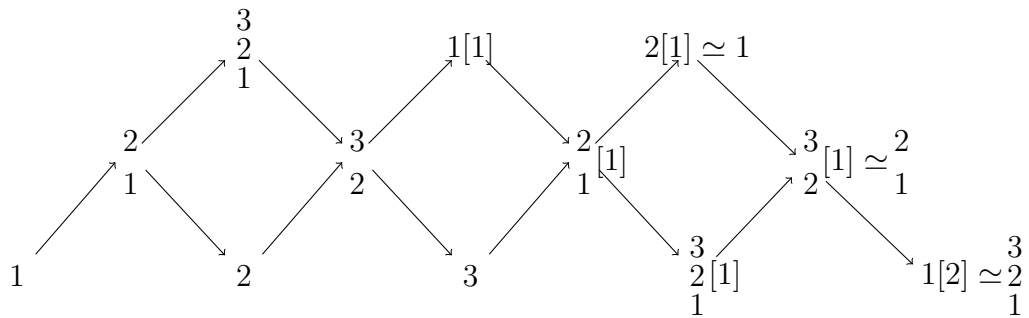
*Nous avons le carquois d'Auslander-Reiten des  $H$ -modules,  $\Gamma(\text{mod } H)$ .*



En complétant le carquois à translation  $\mathbb{Z}\Gamma(\text{mod } H)$ , nous obtenons le carquois de la catégorie  $D^b(\text{mod } H)$ .

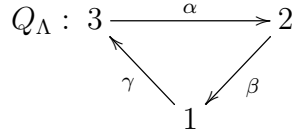


La construction de la catégorie amassée associée à l'objet  $2[1]$ , via le foncteur  $F$ , l'objet  $1$ , à  $\frac{3}{2}[1]$  l'objet  $\frac{2}{1}$  et finalement à  $1[2]$  l'objet  $\frac{3}{1}$ . Ce qui nous donne le carquois d'Auslander-Reiten de  $C_H$  suivant.



Choisissons par exemple l'objet inclinant  $T = 3 \oplus \frac{1}{2} \oplus 1$  et construisons à partir de celui-

ci l'algèbre d'endomorphisme  $\Lambda = \text{End}_{C_H}(T)^{op}$  représentant l'algèbre inclinée-amassée associée à l'objet  $T$ . L'algèbre  $\Lambda$  correspond à l'algèbre des chemins associée au carquois



lié par les relations  $\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\alpha = 0$ .

On remarque que le carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre inclinée-amassée  $\text{End}_{C_H}(T)^{op}$  est obtenu en supprimant de la catégorie amassée  $C_H$  les points correspondants aux objets  $\tau T_i$ . La condition  $\tau^2 P \cong I$ , pour un projectif  $P$  et un injectif  $I$  indécomposables, est toutefois nécessaire. Notons de plus que dans  $C_H$  on a  $\tau_{C_H} = [1]_{C_H}$ .

## 2.2 Mutation de carquois

Une notion classique au coeur des algèbres inclinées-amassées est certainement celle de la mutation. Que ce soit la mutation d'une graine originelle inhérente à la construction d'amas, ou encore la mutation d'un carquois d'un type donné, cette notion est indispensable aux algèbres amassées.

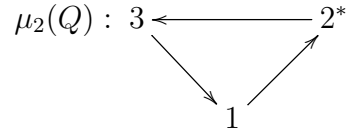
**Définition 2.17** Soit  $Q$  un carquois sans cycle de longueur plus petite ou égale à 2 et  $i$  un point de  $Q$ . La **mutation** de  $Q$  au point  $i$ , notée  $\mu_i(Q)$ , est le carquois obtenu de  $Q$  de la façon suivante :

- (1) Ajouter un point  $i^*$ .
- (2) S'il existe un chemin  $h \xrightarrow{\alpha} i \xrightarrow{\beta} j$ , alors, s'il y a une flèche de  $j$  vers  $h$ , on supprime celle-ci. S'il n'y a pas de flèche de  $j$  vers  $h$ , on ajoute une flèche de  $h$  vers  $j$ .
- (3) Pour tout point  $h$ , remplacer toutes les flèches de  $h$  vers  $i$  par une flèche de  $i^*$  vers  $h$ .

et remplacer toutes les flèches de  $i$  vers  $h$  par une flèche de  $h$  vers  $i^*$ .

(4) Supprimer le point  $i$ .

Si nous reprenons ici notre exemple du carquois  $Q : 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$  et que nous mutons celui-ci au point 2, nous obtenons le nouveau carquois



On remarque que ce carquois est celui associé à l'algèbre inclinée-amassée  $\text{End}_{C_H}(T)^{op}$  obtenue lors de nos précédents calculs. Il s'avère donc moins fastidieux d'engendrer les algèbres inclinées-amassées issues d'un type de carquois donné, ici de type Dynkin  $A_n$ , simplement en opérant une mutation sur un ou plusieurs points de cedit carquois. Nous avons la proposition suivante dûe à Buan, Marsh et Reiten.

**Proposition 2.18 ([10])** *Soit  $\Gamma$  une algèbre inclinée-amassée de type  $Q$ . Soit de plus le carquois  $Q'$  obtenu de  $Q$  par un nombre fini de mutations. Alors, il existe une algèbre inclinée-amassée  $\Gamma'$  de type  $Q'$ . De plus,  $\Gamma$  est de représentation finie si et seulement si  $\Gamma'$  est de représentation finie.*



# CHAPITRE 3

## La fonction d'Igusa-Todorov

Dans ce chapitre, il sera question de la fonction  $\phi$  d'Igusa-Todorov introduite à l'origine pour mieux comprendre la dimension finitiste des algèbres de dimension de représentation au plus 3 (voir [22]). Elle s'avèra toutefois un invariant efficace pour caractériser les algèbres auto-injectives. En effet, il fut démontré dans [21] qu'une algèbre  $\Lambda$  est auto-injective si et seulement si sa  $\phi$ -dimension est nulle. Il s'agit donc ici de poursuivre l'étude de ce nouvel invariant afin de déterminer les valeurs possibles pour la  $\phi$ -dimension des algèbres inclinées-amassées. Nous étudierons plus précisément les cas  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .

### 3.1 Définitions et exemples

Dans ce chapitre, nous désignerons par  $R$  un anneau artinien à droite et par  $\text{mod } R$  la catégorie des  $R$ -modules de type fini. Soit  $K$  le groupe abélien libre engendré par tous les symboles  $[M]$ , pour un  $R$ -module  $M$ , factorisé par le sous-groupe engendré par :

$$(a) [A] - [B] - [C] \text{ si } A \cong B \oplus C,$$

(b)  $[P]$  si  $P$  est projectif.

$K$  est donc le groupe abélien libre engendré par un ensemble complet des représentants des classes d'isomorphisme des  $R$ -modules de type fini, indécomposables et non projectifs. On peut appliquer à ce groupe  $K$  le foncteur syzygie, noté  $\Omega$ . Celui-ci se restreint à un homomorphisme classique de groupes  $\Omega : K \rightarrow K$ .

Notons  $\langle \text{add } M \rangle$  le sous-groupe de  $K$  engendré par les facteurs directs indécomposables et non projectifs de  $M$ . Le groupe abélien  $\Omega(\langle \text{add } M \rangle)$  étant une image de  $\langle \text{add } M \rangle$  possède une  $\mathbb{Z}$ -base, donc un rang, plus petit ou égal à celui de  $\langle \text{add } M \rangle$ . Puisque le  $R$ -module  $M$  a été choisi de type fini, les rangs impliqués dans cette construction sont également finis. La notion d'inclusion de rangs, induite par le morphisme  $\Omega$  sera primordiale dans la définition de la fonction d'Igusa-Todorov. En effet, en vertu du principe du bon ordre, il existe un entier  $n$  tel que le rang de  $\Omega^n(\langle \text{add } M \rangle)$  soit égal au rang de  $\Omega^i(\langle \text{add } M \rangle)$  pour tout  $i \geq n$ . On définit  $\phi_P(M)$  comme étant le plus petit  $n$  où il y a stabilité pour le rang. Il s'agit, pour établir la valeur de  $\phi_P$  d'un module donné  $M$ , de calculer sa résolution projective et d'analyser la stabilité des rangs dans la succession de ses syzygies. Nous avons le lemme suivant énonçant quelques propriétés de base de la fonction  $\phi_P$  que nous noterons plus simplement  $\phi$ .

**Lemme 3.1 ([22])** *Soit  $R$  un anneau artinien à droite et  $M, N \in \text{mod } R$ .*

- (1) *Si la dimension projective de  $M$  est finie, alors  $\text{dp}M = \phi(M)$ .*
- (2) *Si  $M$  est indécomposable et de dimension projective infinie, alors  $\phi(M) = 0$ .*
- (3)  $\phi(N \oplus M) \geq \phi(M)$ .
- (4)  $\phi(M^k) = \phi(M)$ ,  $k \geq 1$ .
- (5)  $\phi(M) \leq \phi(\Omega M) + 1$ .

La notion de  $\phi$ -dimension s'impose de façon tout à fait naturelle.

**Définition 3.2** Soit  $R$  un anneau artinien à droite. La  $\phi$ -dimension projective de  $R$ , notée  $\phi\dim(R)$ , est définie par  $\phi\dim(R) = \sup\{\phi(M) \mid M \in \text{mod } R\}$ .

**Remarque 3.3** Le travail fait ci-haut peut être dualisé en prenant le foncteur co-syzygie,  $\Omega^{-1}$ , associé non plus aux résolutions projectives mais plutôt aux résolutions injectives. On obtient ainsi la fonction  $\phi_I$  qui par définition correspond à la stabilité du rang des co-syzygies de  $M$ . Les propriétés du lemme 3.1 sont également respectées par  $\phi_I$ . De façon tout à fait analogue, on définit  $\phi_I\dim(R) = \sup\{\phi_I(M) \mid M \in \text{mod } R\}$ . Il n'y a présentement aucune indication sur l'égalité de ces deux dimensions ni de la finitude de celles-ci.

Nous avons par contre le théorème suivant dû à Huard et Lanzilotta, caractérisant la  $\phi$ -dimension des algèbres auto-injectives.

**Théorème 3.4 ([21])** Soit  $\Lambda$  une algèbre artinienne. Alors  $\phi\dim(\Lambda) = 0$  si et seulement  $\Lambda$  est une algèbre auto-injective.

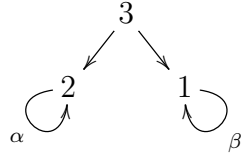
Notons également l'étroite connexion entre  $\phi\dim(\Lambda)$  et la dimension finitiste d'une algèbre  $\Lambda$ , notée  $\text{fin.dim}(\Lambda)$ , puisqu'en tout cas, la dimension finitiste est plus petite ou égale à la  $\phi$ -dimension de cette même algèbre. La dimension finitiste d'une algèbre  $\Lambda$  est donnée par

$$\text{fin.dim}(\Lambda) = \sup\{\text{dp}M \mid \text{dp}M < \infty \text{ et } M \in \text{mod } \Lambda\}.$$

Ainsi, puisque  $\phi(M) = \text{dp}M$  lorsque la dimension projective est finie, nous avons égalité entre  $\phi\dim(\Lambda)$  et  $\text{fin.dim}(\Lambda)$  lorsque tous les  $\Lambda$ -modules sont de dimension projective finie. Cependant, puisque  $\phi$  étudie également les modules décomposables avec facteurs directs de dimension projective infinie, il se peut que  $\phi\dim(\Lambda)$  soit plus grande que  $\text{fin.dim}(\Lambda)$ . C'est pourquoi, de façon générale, nous avons  $\text{fin.dim}(\Lambda) \leq \phi\dim(\Lambda)$ . Une borne finie

pour la fonction  $\phi_{\dim}$  impliquerait la véracité de la conjecture finitiste. Illustrons le comportement de la fonction  $\phi$  par quelques exemples simples.

**Exemple 3.5** Prenons l'algèbre des chemins donnée par le carquois



lié par les relations  $\alpha^2 = \beta^2 = 0$ . Les projectifs sont donnés par les modules

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 & & \\ 2 & 1 & \\ 2 & 1 & \end{pmatrix}.$$

Nous avons pour les modules 1, 2 et  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  les résolutions projectives suivantes.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & & & 1 & & & & 1 & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & & & 2 & & & & 2 & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_2 \oplus P_1 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_1 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & & & 2 \oplus 1 & & & & 2 \oplus 1 & & \end{array}$$

De plus,  $\phi(1 \oplus 2 \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}) = 1$  puisque nous avons les décompositions suivantes pour les syzygies de  $1 \oplus 2 \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \Omega^1 \langle [1] + [2] + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle &= \{ \Omega^1(\lambda_1[1] + \lambda_2[2] + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ \lambda_1 \Omega^1[1] + \lambda_2 \Omega^1[2] + \lambda_3 \Omega^1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ \lambda_1[1] + \lambda_2[2] + \lambda_3[2 + 1] \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ \lambda_1[1] + \lambda_2[2] + \lambda_3([2] + [1]) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ (\lambda_1 + \lambda_3)[1] + (\lambda_2 + \lambda_3)[2] \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

et pour tout  $i > 1$ ,

$$\begin{aligned}\Omega^i\langle [1] + [2] + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \ 1 \end{bmatrix} \rangle &= \{\lambda_1[1] + \lambda_2[2] + \lambda_3[2 + 1] \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(\lambda_1 + \lambda_3)[1] + (\lambda_2 + \lambda_3)[2] \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

On remarque qu'une  $\mathbb{Z}$ -base est formée par les symboles  $[1]$  et  $[2]$  du groupe  $K$ . Ainsi, tous les syzygies du module  $1 \oplus 2 \oplus \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \ 1 \end{bmatrix}$  sont de rang 2. Il n'y a qu'une seule chute de rang et ce au premier syzygie d'où  $\phi(1 \oplus 2 \oplus \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \ 1 \end{bmatrix}) = 1$ . Des calculs semblables nous permettent de conclure que  $\phi(1) = 0$  puisque le module 1 est indécomposable et que  $\text{dp}1 = \infty$ . Enfin, il est aisé de se convaincre qu'aucune chute de rang n'apparaît dans la résolution projective du module  $1 \oplus 2$ . Ainsi,  $\phi(1 \oplus 2) = 0$ .

Dans le chapitre suivant, nous bornerons la valeur de la fonction d'Igusa-Todorov pour des algèbres dites inclinées-amassées. Sachant qu'une  $\phi$ -dimension nulle caractérise l'ensemble des algèbres auto-injectives, qu'en est-il pour les algèbres inclinées-amassées? À défaut de pouvoir répondre à cette question en toute généralité, nous avons pu fournir combinatoirement une borne supérieure en ce qui concerne les algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Bien que plusieurs calculs, dans le cas général, semblent pencher pour une  $\phi$ -dimension plus petite ou égale à 2, ce n'est là que pure spéculation puisque nous n'avons pu fournir la preuve concrète d'un tel énoncé. Cependant, et comme nous le verrons,  $\phi \dim \Lambda \leq 1$  dans le cas où  $\Lambda$  est une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .

# CHAPITRE 4

## La fonction d'Igusa-Todorov pour les cas $\mathbb{A}_n$ et $\tilde{\mathbb{A}}_n$

Dans ce chapitre, nous introduirons les notions de base des algèbres de corde ainsi que quelques propriétés combinatoires des algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . La classification de Bastian (voir [6]) des carquois associés aux algèbres inclinées-amassées de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  y sera également exposée. Grâce à leurs caractéristiques combinatoires, notamment la longueur de leurs cycles ou encore la structure de leurs carquois associés, nous obtiendrons un premier résultat sur la  $\phi$ -dimension d'Igusa-Todorov. Pour ce faire, nous aurons besoin de démontrer la proposition centrale de ce chapitre sur la périodicité des syzygies des modules d'une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .

### 4.1 Algèbres de corde

Les algèbres de corde furent introduites par Wald et Waschbüsch dans [30] et également étudiées dans [13] par Butler et Ringel. Nous en donnerons ici les grandes lignes en plus de

rappeler un théorème important caractérisant l'ensemble des modules indécomposables sur une telle algèbre.

**Définition 4.1** Une algèbre  $\Lambda$  de dimension finie est une **algèbre de corde** s'il existe un carquois  $Q = \{Q_0, Q_1\}$  et un idéal admissible  $I$  tels que  $\Lambda = kQ/I$  satisfait à :

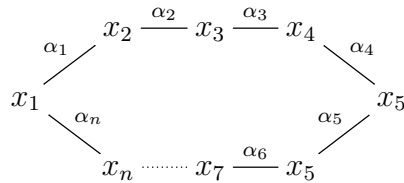
- (1) Tous les points de  $Q$  sont la source et le but d'au plus 2 flèches.
- (2) Pour toute flèche  $\alpha$  de  $Q$ , il existe au plus une flèche  $\beta$  et au plus une flèche  $\gamma$  telles que  $\alpha\beta \notin I$  et  $\gamma\alpha \notin I$ .

Soit  $\Lambda = kQ/I$  une telle algèbre. Pour une flèche  $\alpha \in Q_0$  de source  $s(\alpha)$  et de but  $b(\alpha)$ , on note  $\alpha^{-1}$  son inverse formel de source  $s(\alpha^{-1}) = b(\alpha)$  et de but  $b(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ . Une **corde**  $w = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$  est un chemin de flèches et d'inverses formels de flèches tel que  $\alpha_{i+1} \neq \alpha_i^{-1}$  et  $b(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et tel qu'aucun sous-chemin de  $w$  n'appartient à l'idéal  $I$ . Une corde  $w$  peut donc être représentée par la forme suivante :

$$w := x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \xrightarrow{\alpha_2} x_3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} x_n \xrightarrow{\alpha_n} x_{n+1}$$

où les  $x_i \in Q_0$  et où les  $\alpha_i$  sont des flèches ou inverses de flèches appartenant à  $Q_1$ .

Une **bande**  $b = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$  est un chemin cyclique de  $Q$ , c'est-à-dire une corde dont le but et la source coïncident ( $b(\alpha_n) = s(\alpha_1)$ ), tel que chaque puissance  $b^m$ , pour  $m \in \mathbb{N}$ , est également une corde mais tel que  $b$  elle-même ne soit pas une puissance de corde. La représentation classique d'une bande est donnée par :



Il nous est possible d'associer à chaque corde ou à chaque bande un module de  $\text{mod } \Lambda$ , dit respectivement module de corde et module de bande. Pour une corde  $w$  par exemple,

on obtient le module  $M(w)$  par la construction suivante. Premièrement, si  $w = e_a$ , le chemin trivial en  $a$ , alors  $M(w)$  est défini comme étant le module simple  $S(a)$  associé au point  $a$ . Supposons donc que  $w = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i \dots \alpha_n$  soit une corde non triviale, où  $\alpha_i$  est une flèche ou un inverse formel de flèche pour  $1 \leq i \leq n$ . Pour  $1 \leq i \leq n+1$ , on définit  $U_i = k$  et, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $U_{\alpha_i}$  comme étant le morphisme identité de  $U_{i-1}$  vers  $U_i$  si  $\alpha_i$  est une flèche. Si  $\alpha_i$  est plutôt un inverse formel alors définissons  $U_{\alpha_i}$  comme étant l'identité de  $U_{i+1}$  vers  $U_i$ . Le module de corde associé à  $w$ , noté  $M(w)$ , est défini comme suit.

(1) Pour un point  $a \in Q_0$ ,  $M(w)_a$  est la somme directe de tous les espaces vectoriels  $U_i$  tels que  $s(\alpha_i) = a$  et de l'espace vectoriel  $U_{i+1}$  dans le cas où  $b(\alpha_{i-1}) = a$ . Si le point  $a$  n'appartient pas à la corde  $w$ ,  $M(w)_a = 0$ .

(2) Pour une flèche  $\alpha \in Q_1$ , si  $\alpha \in w$ , alors  $M(w)_\alpha$  est la somme directe des morphismes  $U_{\alpha_i}$  tels que  $\alpha_i = \alpha$  ou  $\alpha_i = \alpha^{-1}$ , sinon  $M(w)_\alpha$  est le morphisme nul.

Les modules de bande sont pour leur part construits de la façon suivante. Soit  $w = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i \dots \alpha_n$  une bande et  $\phi$  un automorphisme indécomposable du  $k$ -espace vectoriel  $V$ . Pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$  on définit  $V(i) = V$ . Pour  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n-1$ , définissons  $f_{\alpha_i}$  comme étant le morphisme identité de  $V(i)$  vers  $V(i+1)$  si  $\alpha_i$  est une flèche et comme étant le morphisme identité de  $V(i+1)$  vers  $V(i)$  dans le cas des inverses formels de flèches. Posons finalement  $f_{\alpha_n} = \phi : V(n) \rightarrow V(1)$  si  $\alpha_n$  est une flèche et  $f_{\alpha_n} = \phi^{-1} : V(1) \rightarrow V(n)$  dans le cas où  $\alpha_n$  est un inverse formel. Le module de bande  $M(w, \phi)$  est défini comme suit.

(1) Pour un point  $a \in Q_0$ ,  $M(w, \phi)_a$  est la somme directe des espaces vectoriels  $V(i)$  tels que  $s(\alpha_i) = a$ . Si par contre le point  $a$  n'appartient pas à la corde  $w$ , alors  $M(w, \phi)_a = 0$ .



(2) Pour une flèche  $\alpha \in Q_1$  telle que  $\alpha$  appartient à  $w$ , alors  $M(w, \phi)_\alpha$  est la somme directe des morphismes  $f_{\alpha_i}$  tels que  $\alpha_i = \alpha$  ou  $\alpha_i = \alpha^{-1}$ . Autrement,  $M(w, \phi)_\alpha$  est le morphisme nul.

Deux cordes  $w_1$  et  $w_2$  sont dites équivalentes, ce qu'on note  $w_1 \sim w_2$ , si  $w_1 = w_2$ . Deux bandes  $B_1 = \beta_1\beta_2 \dots \beta_n$  et  $B_2 = \beta'_1\beta'_2 \dots \beta'_n$  sont quant à elles équivalentes, ce qu'on note  $B_1 \sim B_2$ , si  $B_1 = B_2$  ou  $B_2 = \beta_i \dots \beta_n \beta_1 \dots \beta_{i-1}$  pour un certain  $i$ ,  $2 \leq i \leq n$ . Nous avons le lemme suivant.

**Lemme 4.2 ([13])** *Soient  $w_1$  et  $w_2$  deux cordes et  $B_1$  et  $B_2$  deux bandes. Alors, nous avons les propriétés suivantes :*

- (1) *Les modules de corde  $M(w_1)$  et  $M(w_2)$  sont isomorphes si et seulement si  $w_1 \sim w_2$ .*
- (2) *Les modules de bande  $M(w_1, \phi_1)$  et  $M(w_2, \phi_2)$  sont isomorphes si et seulement si  $w_1 \sim w_2$ ,  $\phi_1 = \phi_2$ .*
- (3) *Aucun module de corde n'est isomorphe à un module de bande.*
- (4) *Les modules de corde et de bande sont indécomposables.*

En fait, non seulement les modules de corde et de bande sont indécomposables mais ce sont les seuls.

**Théorème 4.3 ([13])** *Soit  $\Lambda$  une algèbre de corde. Alors, les  $\Lambda$ -modules de corde et de bande forment un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphisme des  $\Lambda$ -modules indécomposables.*

**Exemple 4.4** *Les carquois suivants munis de leurs idéaux admissibles respectifs sont des exemples d'algèbres de corde.*

(1)  $Q_1$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & \longrightarrow & 3 \\
 & \nearrow & & & \searrow \\
 1 & & & & 6 \\
 & \searrow & & & \nearrow \\
 & & 5 & \longrightarrow & 4
 \end{array} \quad I_1 = 0,$$

(2)  $Q_2$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 5 & & & & \\
 & \nearrow^{\alpha} & & \searrow^{\beta} & & & \\
 3 & & & & 4 & \xrightarrow{\delta} & 2 \xrightarrow{\epsilon} 1 \\
 & \longleftarrow^{\gamma} & & & & & 
 \end{array} \quad I_2 = \langle \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha \rangle$$

## 4.2 Algèbres inclinées-amassées de type $\mathbb{A}_n$

Soit  $Q_\Lambda$  le carquois d'une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$ . C'est-à-dire, une algèbre de la forme  $\Lambda = \text{End}_{C_H}(T)^{op}$  où  $T$  est un objet inclinant de la catégorie amassée  $C_H$  d'une algèbre héréditaire  $H = kQ$  et où  $Q$  est un carquois de type Dynkin  $\mathbb{A}_n$ . Nous avons vu que toutes les algèbres de ce type peuvent être obtenues en appliquant une ou plusieurs mutations au carquois originel  $\mathbb{A}_n$ . Par exemple, si l'on applique une première mutation au point 1 et une seconde au point 3 du carquois  $Q$  de type  $\mathbb{A}_4$

$$Q : 4 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\gamma} 1$$

on obtient le carquois suivant associé à une algèbre inclinée-amassée

$$\mu(Q) : \begin{array}{ccccc}
 & & 3 & & \\
 & \swarrow^{\alpha^*} & & \nwarrow^{\beta^*} & \\
 4 & & & & 2 \xleftarrow{\gamma^*} 1 \\
 & \xrightarrow{\epsilon} & & & 
 \end{array}$$

lié par les relations  $\alpha^*\epsilon = \epsilon\beta^* = \beta^*\alpha^* = 0$ , donnant lieu à un 3-cycle. Nous avons les caractéristiques suivantes concernant les cycles de ces carquois de type  $\mathbb{A}_n$  ([12], [14], [27]).

- (1) Tous les cycles sont orientés.
- (2) Tous les cycles sont de longueur 3 et lorsque la combinaison de deux flèches d'un même cycle est possible, celle-ci est nulle.
- (3) Il n'existe pas deux cycles qui partagent une même flèche.

Les algèbres dites aimables forment une sous-classe des algèbres de corde grandement étudiée en théorie des représentations. D'autant plus que les algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  forment un exemple de telles algèbres. Leurs propriétés combinatoires et leurs définitions essentiellement restrictives sur leurs carquois associés, en font des algèbres contrôlables jusqu'à un certain point. Du moins, ces propriétés limitent le nombre de carquois à l'étude.

**Définition 4.5** *Une algèbre  $\Lambda$  de dimension finie est dite **aimable** si elle admet une présentation  $\Lambda = kQ/I$  satisfaisant à :*

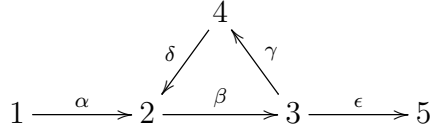
- (1) *Tout point de  $Q$  est la source d'au plus 2 flèches et le but d'au plus 2 flèches.*
- (2) *L'idéal  $I$  est engendré par des chemins de longueur 2.*
- (3) *Pour toute flèche  $\beta$ , il existe au plus une flèche  $\alpha$  et au plus une flèche  $\gamma$  telles que  $\alpha\beta \in I$  et  $\beta\gamma \in I$ .*
- (4) *Pour toute flèche  $\beta$ , il existe au plus une flèche  $\alpha$  et au plus une flèche  $\gamma$  telles que  $\alpha\beta \notin I$  et  $\beta\gamma \notin I$ .*

**Proposition 4.6 ([12])** *Une algèbre  $\Lambda$  est inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  précisément lorsque  $\Lambda$  est aimable et lorsqu'il existe une présentation  $\Lambda = kQ/I$  satisfaisant à :*

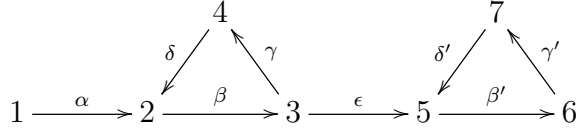
- (1) *Tous les cycles sont de longueur 3 avec radical carré égal à 0.*
- (2) *Les seules relations de  $I$  sont dans les 3-cycles.*

**Exemple 4.7** *Voici quelques exemples de carquois possibles associés aux algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$ .*

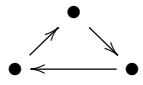
(1)  $Q$  :  $o\grave{u} \beta\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = 0.$



(2)  $Q$  :



$o\grave{u} \beta\gamma = \gamma\delta = \delta\beta$  et  $\beta'\gamma' = \gamma'\delta' = \delta'\beta' = 0.$

Il est à noter que toute représentation sous forme de carquois d'une algèbre de type  $\mathbb{A}_n$  est un carquois uniquement composé de 3-cycles de la forme  et de flèches

$\bullet \longrightarrow \bullet$  ou  $\bullet \longleftarrow \bullet$  mis bout à bout.

### 4.3 Algèbres inclinées-amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}_n$

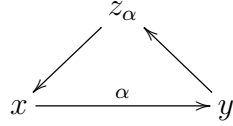
Il est possible, comme nous le verrons dans ce qui suit, de classer les algèbres inclinées-amassées de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  dans une classe de carquois respectant certaines propriétés combinatoires intéressantes. Ces mêmes propriétés nous permettront d'analyser le comportement de la fonction d'Igusa-Todorov sur ce type précis d'algèbres. Voici donc la définition de cette classe ainsi que ses principales caractéristiques combinatoires. La classification suivante, décrite par Bastian dans [6], permet entre autre de regrouper tous les carquois de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  ainsi que leurs mutations.

**Définition 4.8** Soit  $\mathcal{Q}_n$  la classe des carquois avec  $n + 1$  points satisfaisants :

(1) Il existe un unique sous-carquois plein qui soit un cycle non orienté de longueur plus

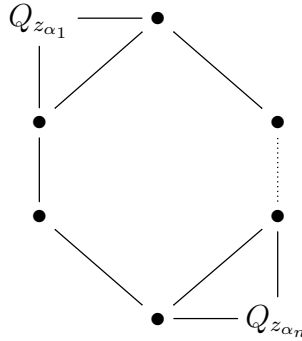
grande ou égale à 2. De plus, si sa longueur est 2, alors c'est une double flèche.

(2) Pour toute flèche  $\alpha : x \rightarrow y$  appartenant à ce cycle non orienté, il existe (ou pas) un point  $z_\alpha$  qui ne soit pas sur le cycle non orienté tel qu'il existe un 3-cycle de la forme :



De plus, outre les flèches provenant de 3-cycles, il n'y a pas d'autres flèches incidentes au cycle non orienté.

(3) Si l'on retire tous les points du cycle non orienté et leurs flèches incidentes, le résultat est une réunion disjointe de carquois  $Q_{z_{\alpha_1}}, Q_{z_{\alpha_2}}, \dots, Q_{z_{\alpha_i}}, \dots$ , c'est-à-dire un carquois pour chaque point  $z_\alpha$ . Ces carquois sont de type  $\mathbb{A}_{k_{\alpha_i}}$ ,  $k_{\alpha_i} \geq 1$  et les points  $z_\alpha$  ont au plus 2 flèches incidentes dans ces carquois. De plus, si  $z_\alpha$  est un point ayant 2 flèches incidentes dans un tel carquois, alors  $z_\alpha$  appartient à un 3-cycle de  $Q_{z_\alpha}$ .



Deux algèbres  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont dites dérivées-équivalentes si leurs catégories dérivées-bornées associées  $D^b(\text{mod } \Lambda_1)$  et  $D^b(\text{mod } \Lambda_2)$  sont équivalentes en tant que catégories triangulées. L'intérêt de cette classification résulte dans le lemme suivant.

**Lemme 4.9 ([6])** Soit  $\Lambda = KQ/I$  une algèbre inclinée-amassée de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Alors,  $\Lambda$  est dérivée-équivalente à une algèbre inclinée-amassée dont le carquois appartient à la classe  $\mathcal{Q}_n$ . De plus,  $\mathcal{Q}_n$  est stable en ce qui concerne les mutations de carquois.

## 4.4 Algèbres inclinées-amassées de type $\mathbb{A}_n$ et $\tilde{\mathbb{A}}_n$ issues de surfaces

Récemment, une nouvelle façon d'obtenir des algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  fut étudiée notamment par Caldero, Chapoton et Schiffler dans [14] ou encore, dans un contexte plus général, par Fomin, Shapiro et Thurston dans [17]. En faisant correspondre une triangulation de surface à un carquois, on obtenait différents types d'algèbres inclinées-amassées. À une surface orientée  $S$  sans ponction et un ensemble de points  $M$  sur sa frontière on associe à une triangulation  $\Gamma$  de la surface marquée  $(S, M)$  un carquois  $Q(\Gamma)$  qui donnera lieu à l'algèbre inclinée-amassée voulue  $A(\Gamma)$ .

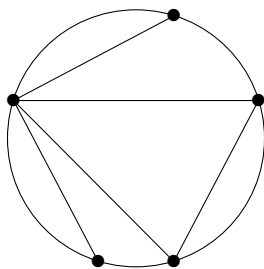
Soit  $S$  une surface de Riemann compacte, bornée et connexe de dimension 2, orientée et dont la frontière est notée  $\partial S$ . Soit également  $M$  un ensemble non vide de points sur la frontière  $\partial S$  intersectant chaque composante connexe de la frontière  $\partial S$ . La paire  $(S, M)$  fait donc référence à une surface bornée par une frontière, sans ponction et munie de l'ensemble des points marqués  $M$ . Un arc dans  $(S, M)$  est une courbe  $\gamma$  dans  $S$  telle que :

- (1) les extrémités de  $\gamma$  sont des points marqués appartenant à  $M$ ,
- (2)  $\gamma$  ne s'intersecte pas elle-même, sauf en ses extrémités qui peuvent correspondre,
- (3)  $\gamma$  intersecte la frontière  $\partial S$  seulement en ses extrémités,
- (4)  $\gamma$  n'est pas contractile en un point de  $M$ .

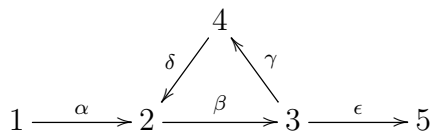
Dans la classe des courbes respectant ces propriétés, chaque arc  $\gamma$  est considéré à homotopie près. Une triangulation  $(S, M)$  est une collection maximale  $\Gamma$  d'arcs ne s'intersectant pas à l'intérieur de  $S$ . Cette triangulation donnée coupe la surface en ce que nous appelons des triangles. Considérons  $Q(\Gamma)$  le carquois médial des arcs internes de  $\Gamma$ , c'est-à-dire

le carquois dont l'ensemble des points est l'ensemble des arcs internes de  $\Gamma$ . Les flèches quant à elles sont définies comme suit : lorsqu'il y a un triangle  $T$  de  $\Gamma$  contenant deux arcs internes  $a$  et  $b$ , alors  $Q(\Gamma)$  contient une flèche  $a \rightarrow b$  si  $a$  est un prédécesseur de  $b$  (selon l'orientation horaire).

**Exemple 4.10** Voici une triangulation possible sur un disque où  $M$  est de cardinalité 5.



À cette surface triangulée, en associant à chaque arc interne un point du carquois médial et en suivant l'orientation horaire, nous obtenons le carquois interne suivant associé à une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_5$ .



où  $\beta\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = 0$ .

De cette théorie nous retenons un théorème mettant en relation les algèbres inclinées-amassées et les triangulations de surfaces. Notons qu'une extension par relations d'une algèbre  $\Lambda$  de dimension globale 2 est une extension triviale de la forme  $\tilde{\Lambda} = \Lambda \rtimes \text{Ext}_{\Lambda}^2(D\Lambda, \Lambda)$ .

**Théorème 4.11 ([3])** Soit  $A(\Gamma)$  l'algèbre associée à la triangulation  $\Gamma$  de la surface marquée et sans ponction  $(S, M)$ . Alors, les énoncés suivants sont équivalents.

- (1)  $A(\Gamma)$  est une algèbre inclinée-amassée.
- (2)  $A(\Gamma)$  est une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .
- (3)  $A(\Gamma)$  est une extension par relations d'une algèbre inclinée de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .
- (4) La surface  $S$  est un disque ou un disque troué.

De plus, toutes les algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  (respectivement  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ ) sont de la forme  $A(\Gamma)$  pour une triangulation quelconque d'un disque  $S$  (respectivement pour un disque troué  $S$ ).

## 4.5 Périodicité

### 4.5.1 Modules de corde

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un premier résultat concernant la périodicité des résolutions projectives des modules indécomposables sur une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  dont la dimension projective est infinie. Suivra un corollaire à cette périodicité fixant une borne pour la fonction  $\phi$  d'Igusa-Todorov sur de telles algèbres. Mais tout d'abord, voyons la périodicité en ce qui concerne les modules de corde.

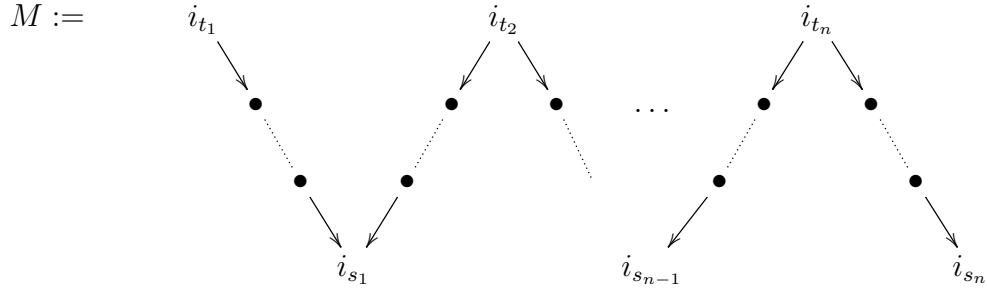
**Théorème 4.12** Tous les modules de corde de dimension projective infinie sur une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  ont un premier syzygie  $\Omega$ -périodique de périodicité 3 modulo leurs facteurs directs projectifs.

**Démonstration.** Soit  $\Lambda$  une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Soit de plus

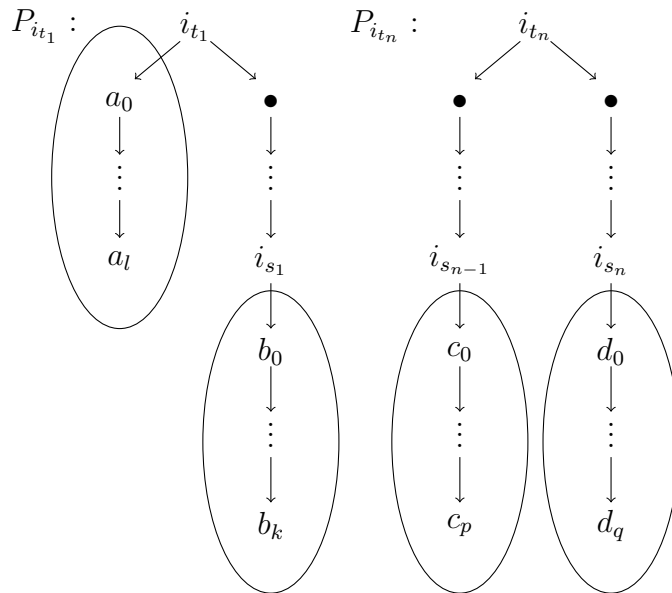
$$w := i_1 \xrightarrow{\alpha_1} i_2 \xrightarrow{\alpha_2} i_3 \xrightarrow{\alpha_3} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} i_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} i_n$$



une corde dans le carquois  $Q_\Lambda = \{Q_0, Q_1\}$ , associé à l'algèbre  $\Lambda$ , telle que le module associé  $M(w)$  soit de dimension projective infinie. Par abus de notation, nous noterons le module  $M(w)$  plus simplement  $M$ .



où les  $t_i, s_i$  sont des entiers. La couverture projective du module  $M$  est donnée par la somme directe des projectifs dont les coiffes sont les simples en  $i_{t_1}, \dots, i_{t_n}$ , soit  $P(M) = P_{i_{t_1}} \oplus P_{i_{t_2}} \oplus \dots \oplus P_{i_{t_n}}$ . Écrivons explicitement les projectifs  $P_{i_{t_1}}$  et  $P_{i_{t_n}}$  de la façon suivante.

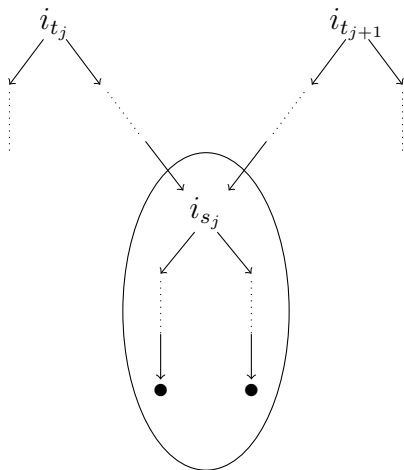


Dans le but, encore une fois, d'alléger la notation, associons à la corde  $w_{a_0} := a_0 - a_1 - \dots - a_l$  le module de corde  $A(w_{a_0})$  que l'on notera tout simplement  $A$ . De même, on notera  $B, C$  et  $D$  les modules de corde associés aux cordes  $w_{b_0}, w_{c_0}, w_{d_0}$ .

et  $w_{d_0}$  respectivement. Ces modules de corde, mis en évidence dans la figure ci-dessus, ne sont ni plus ni moins que l'excédent lorsque les projectifs  $P_{i_{t_1}}$  et  $P_{i_{t_n}}$  sont superposés au module  $M$ . L'idée est la même pour les projectifs  $P_{i_{t_2}}$  à  $P_{i_{t_{n-1}}}$ . Nous verrons par la suite que l'excédent de ces derniers projectifs permettent de former à nouveau des modules projectifs qui se résorberont tout au long de la résolution projective de  $M$ . Le lemme suivant permettra de nous concentrer uniquement sur l'incidence des extrémités de la couverture projective de  $M$ .

**Lemme 4.13** *Soit  $\Lambda$  une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  et  $M$  un module de corde sur  $\Lambda$ . Soit de plus  $\Omega^1(M) = A \oplus Q_1 \oplus \dots \oplus Q_{n-1} \oplus D$  la décomposition du premier syzygie de  $M$ . Alors, les modules  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , sont projectifs.*

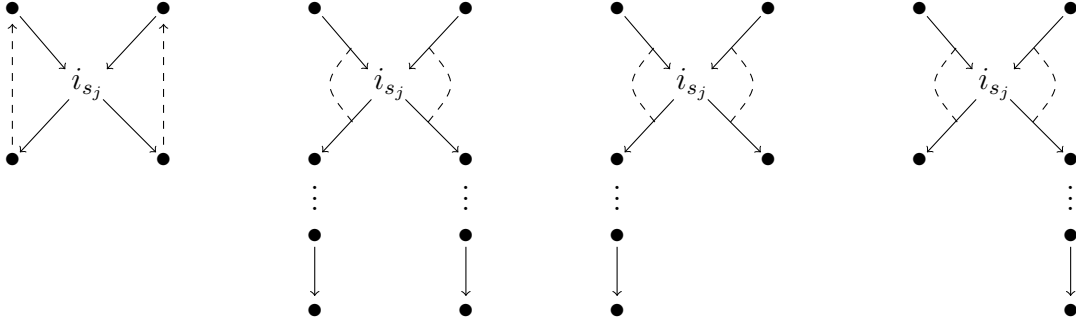
**Démonstration.** Lorsque deux projectifs  $P_{i_{t_j}}$  et  $P_{i_{t_{j+1}}}$ , pour  $1 \leq j \leq n - 1$ , se chevauchent, nous sommes dans la situation suivante :



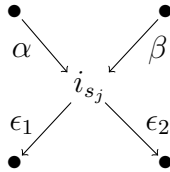
Montrons que le module mis en évidence dans la figure ci-dessus, c'est-à-dire le module dont la coiffe est le simple en  $i_{s_j}$ , est le projectif en  $i_{s_j}$ . En effet, dans ce cas, nous avons les possibilités suivantes.

(a) Si  $i_{s_j}$  est un puits, alors  $S_{i_{s_j}} = P_{i_{s_j}}$ .

(b) Si  $i_{s_j}$  n'est pas un puits, et puisque nous sommes dans le cadre d'une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ , nous avons l'une des quatre situations suivantes :



où toute combinaison de deux flèches dans un même 3-cycle est nulle. Il est à noter qu'aucune relation ne peut s'étendre à de plus longs chemins puisque pour une algèbre inclinée-amassée, seules sont admises les relations à l'intérieur des 3-cycles. De plus, le cas



où  $\alpha\epsilon_1 = \alpha\epsilon_2 = \beta\epsilon_1 = \beta\epsilon_2 = 0$  est à proscrire puisque nous sommes dans le cadre d'algèbres de corde et qu'il existe au plus une flèche  $\epsilon_3$  (respectivement  $\epsilon_4$ ) telle que  $\alpha\epsilon_3 \in I$  (respectivement  $\beta\epsilon_4 \in I$ ).

Dans les figures ci-haut, après avoir retiré les flèches entrant en  $i_{s_j}$ , nous obtenons tous les chemins possibles que l'on peut emprunter dans le carquois à partir du point  $i_{s_j}$ . Le module de corde ainsi formé correspond au module maximal au sens où toutes les flèches que l'on peut rejoindre et emprunter à partir de  $i_{s_j}$  ont été utilisées pour le construire. La même construction peut être itérée pour chacun des points de jonction entre deux

projectifs, c'est-à-dire pour  $i_{s_1}$  à  $i_{s_{n-1}}$ . Ainsi, dans tous les cas de relations spécifiques à la structure d'une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ , c'est-à-dire où les relations sont exclusivement dans des 3-cycles, si nous annulons les flèches appartenant à la fois au module  $M$  et aux projectifs  $P_{i_{t_j}}$  et  $P_{i_{t_{j+1}}}$  nous obtenons un module projectif en  $P_{i_{s_j}} = Q_i$  ainsi que deux modules quelconques  $A$  et  $D$ .  $\square$

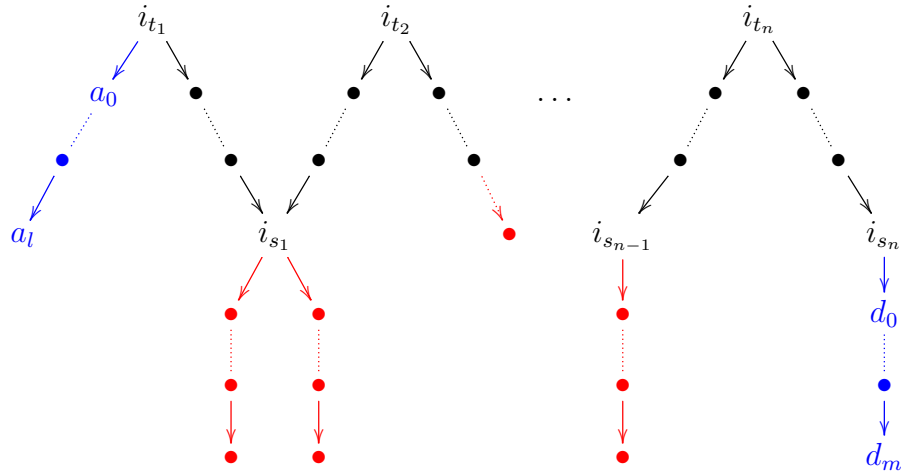
De par le raisonnement précédent, nous pouvons expliciter la résolution projective de  $M$  de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P(M) & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & \\
 & & \Omega^2(M) & & \Omega^1(M) & & 
 \end{array}$$

où les couvertures projectives des modules de corde  $A$  et  $D$  se retrouvent dans la décomposition en facteurs directs de  $P_1$ . Le premier syzygie ainsi que le deuxième se décomposent en facteurs directs respectivement par  $\Omega^1(M) = A \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus D$  et  $\Omega^2(M) = \Omega^1(A) \oplus \Omega^1(D)$ .

Pour bien illustrer la situation, nous avons représenté ici le module  $M$  et mis en couleur le premier syzygie. Le rouge représente les facteurs directs projectifs (les  $Q_j = P_{i_{s_j}}$  pour  $1 \leq j \leq n-1$ ) tandis que le bleu représente les facteurs directs qui nous restent à traiter

( $A$  et  $D$ ).



On remarque que concrètement, seuls les facteurs directs non projectifs du premier syzygie  $A$  et  $D$  auront une répercussion réelle dans la résolution projective de  $M$ . Voici donc la liste des cas possibles en ce qui concerne la résolution projective d'un module de corde. Le cas où  $M$  est un module de bande sera traité plus loin.

**Cas 1 :** Le module  $A$  est projectif et  $d_0 \neq d_m$ .

**Cas 2 :** Le module  $A$  est projectif et  $d_0 = d_m$ .

**Cas 3 :** Le module  $A$  est non projectif et  $d_0 \neq d_m$ . Nous avons les deux sous-cas suivants :

- a)  $A$  non projectif,  $d_0 \neq d_m$  et  $a_0 \neq a_l$ ,
- b)  $A$  non projectif,  $d_0 \neq d_m$  et  $a_0 = a_l$ .

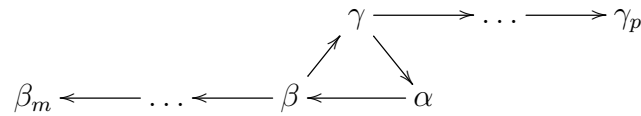
**Cas 4 :** Le module  $A$  est non projectif et  $d_0 = d_m$ . Nous avons les deux sous-cas suivants :

- a)  $A$  non projectif,  $d_0 = d_m$  et  $a_0 \neq a_l$ ,
- b)  $A$  non projectif,  $d_0 = d_m$  et  $a_0 = a_l$ .

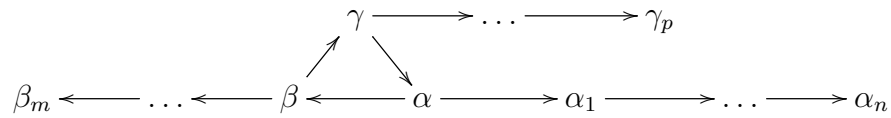
Les autres cas possibles, étant duals aux précédents, seront laissés au lecteur, soit les cas où  $D$  joue le rôle de  $A$  et *vice versa*. Nous montrerons que pour chacune de ces situations, le premier syzygie est de périodicité 3 dans la résolution projective de  $M$ . Énonçons tout d'abord un lemme qui permettra d'éviter la redondance de nos arguments combinatoires.

**Lemme 4.14** *Soit  $M$  un module de dimension projective infinie sur une algèbre inclinée-amassé de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  tel que  $M$  correspond à l'une des deux situations suivantes :*

1)  $M = S_\alpha$ , où  $\alpha$  appartient au 3-cycle suivant

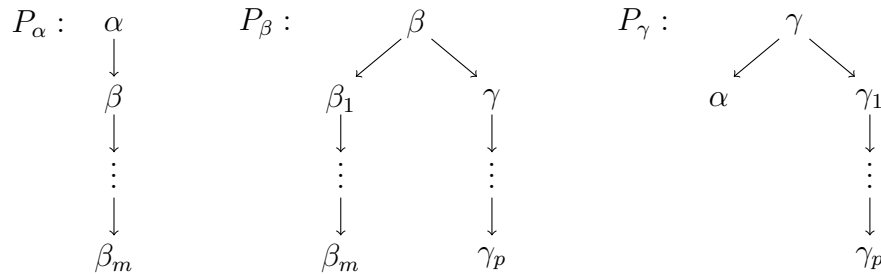


2)  $M = M(w_\alpha)$ , où  $w_\alpha$  est la corde  $w_\alpha := \alpha \text{ --- } \alpha_1 \text{ --- } \dots \text{ --- } \alpha_n$  dans le 3-cycle



Alors,  $\Omega^3(M) = M$ .

**Démonstration.** Dans le cadre des algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ , les seules relations sont à l'intérieur des 3-cycles. Nous avons, pour le premier cas, les modules projectifs suivants.

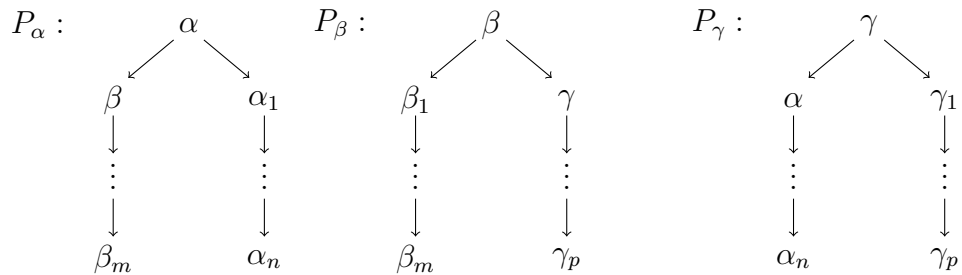


Posons  $M(\beta)$  le module de corde associé à  $w_\beta := \beta \text{ --- } \beta_1 \text{ --- } \dots \text{ --- } \beta_m$  et  $M(\gamma)$  le module associé à  $w_\gamma := \gamma \text{ --- } \gamma_1 \text{ --- } \dots \text{ --- } \gamma_p$ . Ainsi, la résolution projective de  $M$  est donnée par

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_\gamma & \longrightarrow & P_\beta & \longrightarrow & P_\alpha \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & S(\alpha) = M & & M(\gamma) & & M(\beta) \end{array}$$

telle que voulu.

Si  $M$  est plutôt du type  $M(w_\alpha)$  décrit dans le deuxième cas, nous avons alors les modules projectifs suivants.



Ces légers changements au niveau des modules projectifs n'affectent cependant pas la périodicité des syzygies. En effet, nous avons

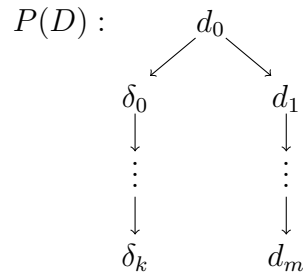
$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_\gamma & \longrightarrow & P_\beta & \longrightarrow & P_\alpha \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & M & & M(\gamma) & & M(\beta) \end{array}$$

Ainsi, dans les deux cas, nous avons bien  $\Omega^3(M) = M$ . □

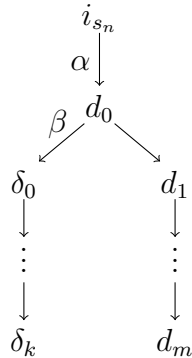
Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la périodicité du premier syzygie dans les résolutions projectives possibles d'un module de corde donné.

**Cas 1 :**  $A$  est projectif et  $d_0 \neq d_m$ .

Si  $d_0 \neq d_m$ , alors la couverture projective  $P(D)$  de  $D$  possède une coiffe correspondant au simple en  $d_0 \in Q_0$  ayant 2 flèches sortantes. En effet, si cela n'était pas le cas, la corde  $w_{d_0} := d_0 - d_1 - \dots - d_m$  correspondrait au module projectif en  $d_0$  puisque les seules relations des algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  sont dans les 3-cycles. Ce qui donnerait un premier syzygie projectif de la forme  $\Omega^1(M) = A \oplus Q_1 \oplus \dots \oplus Q_{n-1} \oplus D$  où  $A$  et  $D$  seraient de suite projectifs contredisant la dimension projective infinie de  $M$ . Ainsi,  $P(D)$  est de la forme

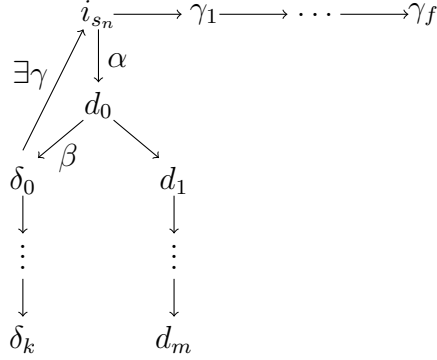


On reconnaît du côté droit de  $P(D)$  la corde qui forme le module  $D$ , nous noterons  $M(w_{\delta_0})$  le module correspondant à la corde  $w_{\delta_0} := \delta_0 - \delta_1 - \dots - \delta_k$ . Lorsque nous superposons les modules  $M$  et  $P(D)$  nous avons la situation suivante autour du point  $d_0$ .





Par définition de  $M$ , nous avons la relation  $\alpha\beta = 0$ . De plus, puisque les seules relations des algèbres inclinées-amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  sont dans les 3-cycles, nous avons l'existence d'une troisième flèche  $\gamma : \delta_0 \rightarrow i_{s_n}$  qui complète le 3-cycle amorcé par la relation  $\alpha\beta = 0$ .



En combinant cette information à la projectivité de  $A$ , nous obtenons la résolution projective de  $M$  suivante :

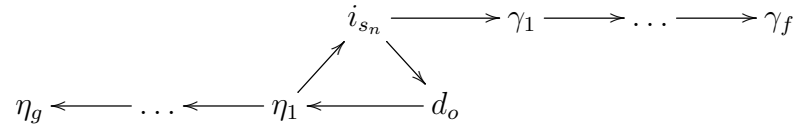
$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P(M) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & \Omega^2(M) & & \Omega^1(M) & & & & & & 
 \end{array}$$

$$\text{où } \begin{cases} \Omega^1(M) = A \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus D, \\ P_1 = A \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus P(D). \end{cases}$$

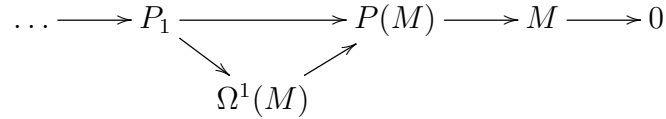
Nous remarquons que le module  $D$ , facteur direct de  $\Omega^1(M)$  est du type 2 dans le lemme 4.14. Ainsi,  $\Omega^4(M) = \Omega^3(D) = D$ . En effet, les modules projectifs  $A$  et  $\bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j$  de  $\Omega^1(M)$  se trouvant absorbés dans la résolution projective de  $M$ , nous laissent un  $\Omega^4(M)$  égal au module  $D$  qui, modulo les facteurs projectifs, correspond au premier syzygie de  $M$ .

**Cas 2 :** Le module  $A$  est projectif et  $d_0 = d_m$ .

Si  $d_0 = d_m$  alors  $d_0$  est un puits ou le point d'incidence d'une relation, c'est-à-dire appartenant à un 3-cycle. Si  $d_0$  est un puits, alors  $P(M(w_{d_0}))$  est le simple en  $d_0$  soit  $S_{d_0}$ . Ainsi,  $\Omega^1(M) = A \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus S_{d_0}$  est projectif, ce qui contredit le fait que  $M$  est de dimension projective infinie. Donc,  $d_0$  n'est pas un puits mais plutôt le point médian d'une relation appartenant à un 3-cycle.



Notons  $P_{d_0}$  le module projectif associé à la corde  $w_{d_0} := d_0 - \eta_1 - \dots - \eta_g$ . Nous avons la résolution projective suivante illustrant la situation.



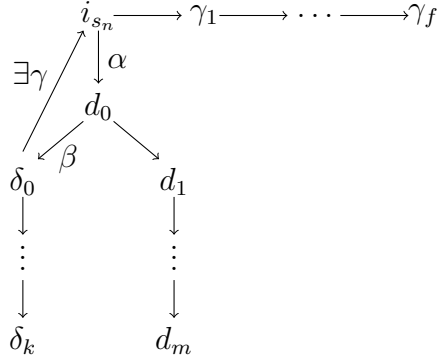
$$\text{où } \begin{cases} P_1 = A \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} \oplus P_{d_0}, \\ \Omega^1(M) = A \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus S_{d_0}. \end{cases}$$

Nous remarquons cette fois que le module  $S_{d_0}$  est du type 1 dans lemme 4.14. Ainsi,  $\Omega^4(M) = \Omega^3(S_{d_0}) = S_{d_0}$ . Ce qui est le premier syzygie de  $M$  si nous faisons abstraction des facteurs projectifs de celui-ci.

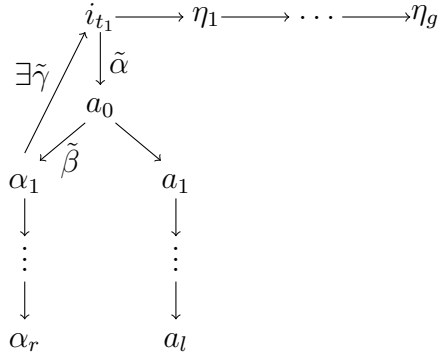
**Cas 3 a) :**  $A$  non projectif,  $d_0 \neq d_m$  et  $a_0 \neq a_l$ .

Si  $D := D(w_{d_0})$ , avec  $w_{d_0} := d_0 - d_1 - \dots - d_m$ , est projectif. Alors, on se réfère au dual du cas 1. Supposons donc que  $d_0 \neq d_m$  et que  $D$  est non projectif. Ceci implique que le point  $d_0$  est la source de 2 flèches (sinon  $D$  serait projectif). On a donc l'existence

d'une relation  $\alpha\beta = 0$ , c'est-à-dire l'existence d'une troisième flèche  $\gamma$ , qui complète le 3-cycle de cette même relation.



De même, puisque  $a_0 \neq a_l$  et que  $A$  n'est pas projectif, on a que  $a_0$  est la source de 2 flèches dont l'une, disons  $\tilde{\gamma}$ , complète un 3-cycle.



Posons  $A := A(w_{a_0})$  le module associé à la corde  $w_{a_0} := a_0 - a_1 - \dots - a_l$ . De cette description, nous avons la résolution projective suivante.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P(M) & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & & \searrow & \nearrow & & \\
 & & & & \Omega^1(M) & & 
 \end{array}$$

$$\text{où } \begin{cases} \Omega^1(M) = A \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus D, \\ P_1 = P_{a_0} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus P_{d_0}. \end{cases}$$

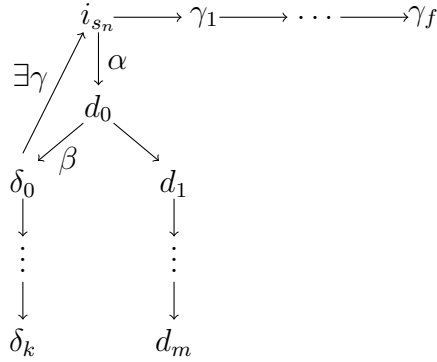
Puisque les modules  $A$  et  $D$  sont de type 2 dans le lemme 4.14, nous avons  $\Omega^3(A) = A$  et  $\Omega^3(D) = D$ . Ainsi,  $\Omega^4(M) = \Omega^3(A) \oplus \Omega^3(D) = A \oplus D$ . Nous obtenons, tel que voulu, une périodicité de 3 pour le premier syzygie, modulo les projectifs.

**Cas 3 b) :**  $A$  non projectif,  $d_0 \neq d_m$  et  $a_0 = a_l$ .

Puisque  $A$  est non projectif et que  $a_0 = a_l$ , cela implique que  $a_0$  n'est pas un puits, sinon  $A$  serait le projectif simple en  $a_0$ . Si par ailleurs  $D$  est projectif, on se réfère au dual du cas 1. Nous avons la situation suivante autour du point  $a_0$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & i_{t_1} & \longrightarrow & \eta_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \eta_g \\
 & \nearrow \exists \tilde{\gamma} & & & \downarrow \tilde{\alpha} & & & & \\
 & & a_0 & & & & & & \\
 & \searrow \tilde{\beta} & & & & & & & \\
 \alpha_1 & & & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & & & \\
 \alpha_r & & & & & & & & 
 \end{array}$$

De même, puisque  $d_0 \neq d_m$  et que  $D$  n'est pas projectif, il existe alors 2 flèches sortant de  $d_0$ . Ce qui nous donne un voisinage autour du point  $d_0$  semblable à celui-ci :



Suite à ces descriptions, nous avons la résolution projective suivante pour  $M$ .

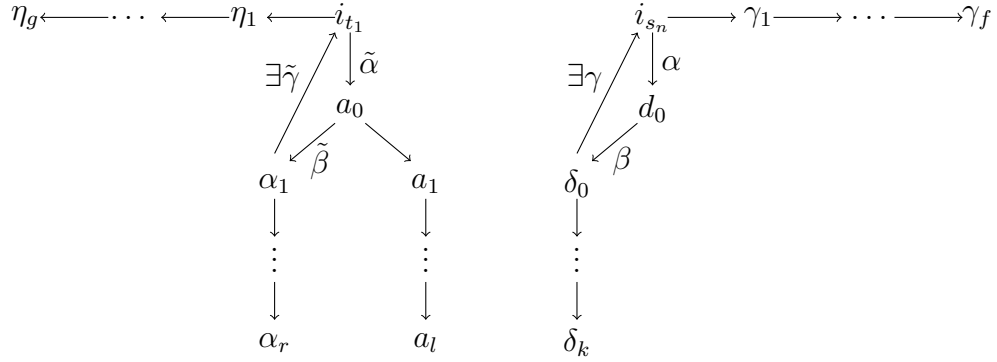
$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P(M) & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
& & & \searrow & \nearrow & & \\
& & & & \Omega^1(M) & & 
\end{array}$$

$$\text{où } \begin{cases} \Omega^1(M) = S_{a_0} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus D, \\ P_1 = P_{a_0} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus P_{d_0}. \end{cases}$$

De par le lemme 4.14 appliqué au module simple  $S_{a_0}$  et au module  $D$ , nous avons la périodicité recherchée pour le premier syzygie de  $M$ .

**Cas 4 a) :**  $A$  non projectif,  $d_0 = d_m$  et  $a_0 \neq a_l$ .

Si  $A$  est non projectif et que  $a_0 \neq a_l$ , alors  $a_0$  est la source de 2 flèches. Si de plus, le simple en  $d_0 = d_m$  est projectif, on se réfère au dual du cas 2. Puisque  $D$  n'est pas projectif, nous avons, comme pour les cas précédents, l'existence d'une troisième flèche  $\tilde{\gamma}$  et  $\gamma$  autour des voisinages de  $a_0$  et de  $d_0$  respectivement qui complète les 3-cycles, c'est-à-dire les situations suivantes.



Si  $A := A(w_{a_0})$  correspond au module associé à la corde  $w_{a_0} := a_0 - a_1 - \dots - a_l$  et si  $S_{d_0}$  est le simple en  $d_0$  alors, nous avons la résolution projective suivante.

$$\dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$\quad \searrow \quad \nearrow$$

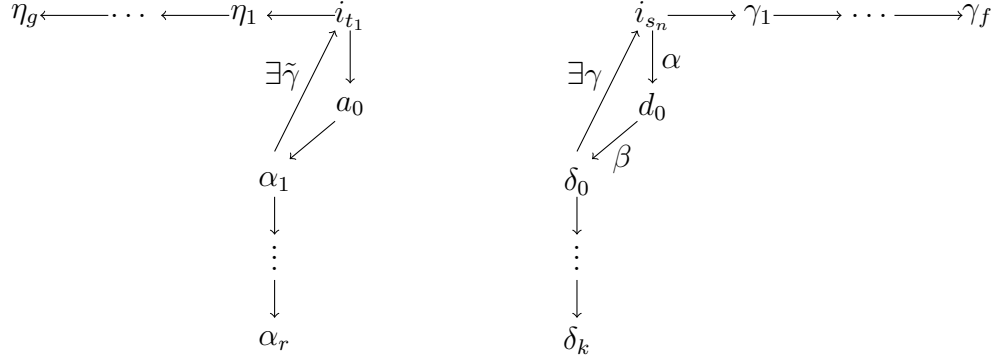
$$\quad \Omega^1(M)$$

$$\text{où } \begin{cases} \Omega^1(M) = A \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus S_{d_0}, \\ P_1 = P_{a_0} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus P_{d_0}. \end{cases}$$

Puisque les modules  $A$  et  $S_{d_0}$  sont respectivement de type 1 et 2, le lemme 4.14 induit la périodicité 3 de  $\Omega^1(M)$ .

**Cas 4 b) :**  $A$  non projectif,  $d_0 = d_m$  et  $a_0 = a_l$ .

Si  $A$  est non projectif et que  $a_0 = a_l$  alors  $a_0$  n'est pas un puits, sinon nous aurions contradiction avec la non-projectivité de  $A$ . Ainsi,  $a_0$  appartient à un 3-cycle. De plus, si  $d_0 = d_m$  est un puits alors  $D$  est projectif et ceci termine la démonstration de ce présent cas. Supposons donc que  $D$  ne soit pas projectif. Nous obtenons autour des voisinages de  $a_0$  et  $d_0$  les situations suivantes.



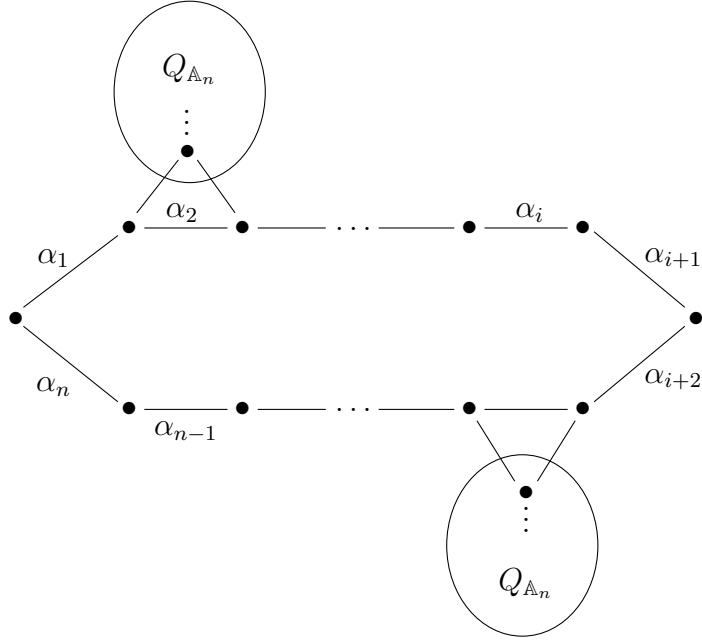
Si  $S_{a_0}$  et si  $S_{d_0}$  sont respectivement les simples en  $a_0$  et en  $d_0$  alors, nous avons la résolution projective suivante.

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P(M) & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
& & & \searrow & \nearrow & & \\
& & & & \Omega^1(M) & & 
\end{array}$$

$$\text{où } \begin{cases} \Omega^1(M) = S_{a_0} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus S_{d_0}, \\ P_1 = P_{a_0} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} Q_j \oplus P_{d_0}. \end{cases}$$

Puisque les modules  $S_{a_0}$  et  $S_{d_0}$  sont respectivement de type 2, le lemme 4.14 induit la périodicité 3 de  $\Omega^1(M)$ .

Nous avons traité jusqu'à maintenant la périodicité des premiers syzygies des modules de corde qui n'étaient pas des bandes sur une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Les modules de bande apparaissent toutefois dans l'étude des algèbres du deuxième type. Soit  $\Lambda$  une algèbre inclinée-amassée de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  sur un corps  $k$  et notons  $Q_\Lambda = \{Q_0, Q_1\}$  son carquois associé. Ce carquois contient un unique sous-carquois plein qui est un cycle non orienté de longueur plus grande ou égale à 2 auquel sont annexés des 3-cycles qui peuvent eux mêmes supporter un sous-carquois de type  $\mathbb{A}_n$ .

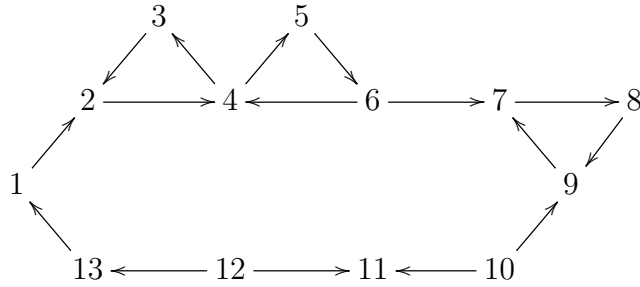


Il existe une unique bande  $b$  composée des mêmes flèches  $(\alpha_i)$  ou inverses de flèches  $(\alpha_i^{-1})$  qui forment le cycle non orienté du carquois  $Q_{\Lambda}$ . Conformément à l'illustration ci-haut, nous avons  $b = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n$ . Cette même bande  $b$  donne naissance à une famille de modules de bande notée  $M(b, \phi, n)$ , où  $n \in \mathbb{N}$  et  $\phi \in \text{Aut}(k^n)$  en remplaçant les points de  $b$  par une copie de l'espace vectoriel  $k^n$ .

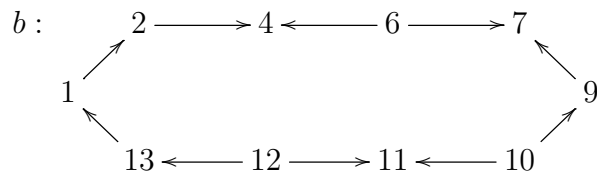
Considérons le cas  $M(b) := M(b, \phi, 1)$ . La couverture projective du module  $M(b)$  est donnée par  $P(M(b)) := \bigoplus_{i \in Q_0} P_{\alpha_i}$  où  $i$  est un point de la bande  $b$  source de deux flèches sortantes appartenant à  $b$ . Il est suffisant de considérer uniquement le cas où  $n = 1$  puisque pour tout autre module  $M(b)^m$  de la même famille que la bande  $b$ , la couverture projective sera simplement  $m$  fois la somme directe de  $P(M(b))$ . Soit un module de bande  $M(b)$  de dimension projective infinie. Étudions ce qu'il advient du premier syzygie.



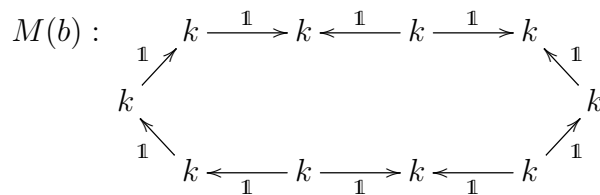
Prenons par exemple la situation suivante, où encore une fois, chaque combinaison de deux flèches internes à un 3-cycle est nulle.



La seule bande de cette algèbre est donnée par

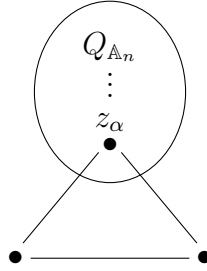


Prenons  $\phi$  comme étant l'automorphisme identité. Le module de bande associé est donc



Sa couverture projective est la somme directe  $P(M(b)) = P_6 \oplus P_{10} \oplus P_{12}$ .

Nous avons vu qu'au cycle non orienté d'une algèbre inclinée-amassée de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  pouvaient se juxtaposer des carquois de type  $\mathbb{A}_n$  (voir définition 4.8). Lorsqu'une flèche sort de la bande  $b$  pour compléter un 3-cycle  $\alpha$ , nous avons la situation suivante.



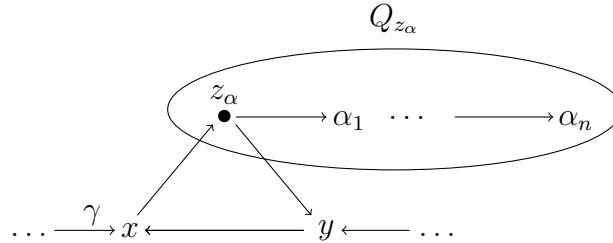
Le recouvrement de la bande  $b$  par sa couverture projective donne naissance à des points que nous nommerons **points d’enchèvement**. Ces points sont les endroits sur la bande où deux facteurs projectifs de la couverture  $P(M(b))$  se chevauchent. Dans l’exemple ci-haut, les projectifs  $P_6$ ,  $P_{10}$  et  $P_{12}$  se chevauchent aux points d’enchèvement 4, 7 et 11. Ces points seront critiques dans l’étude de la périodicité de  $M(b)$  puisqu’ils formeront la coiffe du premier syzygie de la résolution projective. Appelons **points dominants**, les points du carquois qui forment la coiffe des projectifs de la résolution projective de  $M(b)$ .

**Cas 1 :** Si aucune flèche ne sort de ces points d’enchèvement, alors  $\text{dp}M(b) \leq 1$ .

Clairement, les projectifs ayant pour coiffes des points dominants, auront pour socles des modules simples associés aux points d’enchèvement. Ces simples correspondent aux puits de la bande  $b$  et sont donc des simples projectifs. Ils apparaîtront dans le premier syzygie de  $M(b)$  mais seront éliminés de la résolution projective par la couverture projective de  $\Omega^1(M(b))$ .

**Cas 2 :** Si, pour un point d’enchèvement donné  $x$ , il existe une seule flèche sortante appartenant à un 3-cycle  $\alpha$ , alors  $\text{dp}M(b) \leq 1$ .

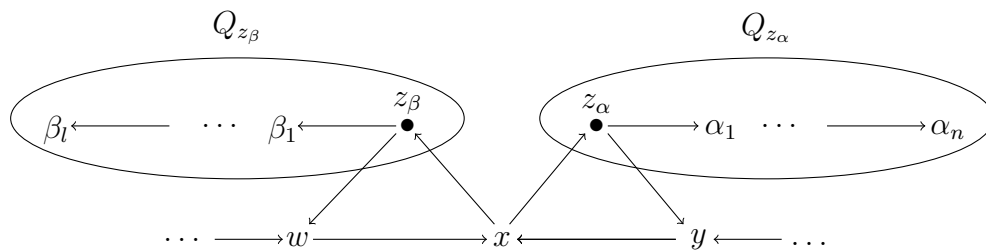
En effet, supposons également, en toute généralité, qu'à ce cycle  $\alpha$  est joint un carquois  $Q_{z_\alpha}$  de type  $\mathbb{A}_n$ . Il existe donc un projectif qui se voit prolonger hors de la bande  $b$ .



Nous aurons comme facteur direct de  $\Omega^1(M(b))$ , en plus des modules simples associés aux doublés des points d'enchevêtrement de la bande  $b$  sans flèche sortante, le module associé à la corde  $x \text{ --- } z_\alpha \text{ --- } \dots \text{ --- } \alpha_n$ . Or, le module associé à cette corde est le projectif en  $x$ . Puisque  $\Omega^1(M(b))$  n'est composé que de ce module et de simples projectifs, la dimension projective de  $M(b)$  est 1. Notons que si la flèche  $\gamma$  est de sens opposé, alors le 3-cycle n'influe pas sur la résolution projective du module de bande. Ce qui induit également une dimension projective finie.

**Cas 3 :** Si, pour un point d'enchevêtrement donné  $x$ , il existe deux flèches sortantes composant respectivement un cycle  $\alpha$  et un cycle  $\beta$ , alors la dimension projective de  $M(b)$  est infinie et  $\Omega^1(M(b))$  est de périodicité 3.

En effet, nous avons alors la situation suivante.

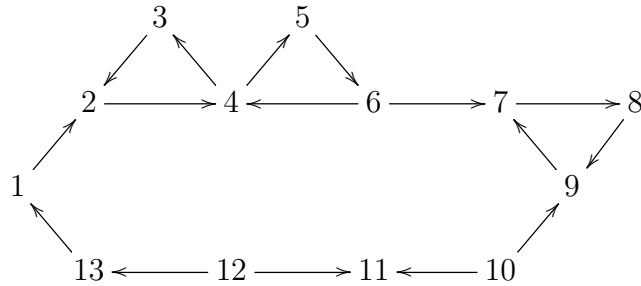


Ainsi, nous aurons entre autres dans la couverture projective de  $M(b)$ , deux modules projectifs associés respectivement à un chemin empruntant le point  $x$  et un chemin empruntant le point  $y$ . Sans perdre de généralité, nous aurons dans le premier syzygie un module associé à la corde  $x - z_\alpha - \dots - \alpha_n$  et un autre associé à la corde  $z_\beta - \beta_1 - \dots - \beta_l$ . En développant indépendamment les résolutions projectives de ces modules nous obtenons une dimension projective infinie et dont les premiers syzygies sont de périodicité 3.

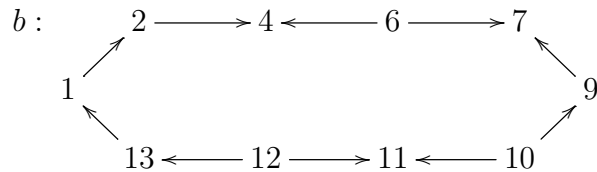
Ainsi, nous avons montré que seuls les points d'enchevêtrement ont une réelle importance sur la résolution projective d'un module de bande. Puisque tout carquois associé à une algèbre de type  $\tilde{A}_n$  (*a fortiori* toute bande sur une telle algèbre) est une combinaison de ces trois cas, nous pouvons conclure que pour tout module de bande  $M(b)$  de dimension projective infinie,  $\Omega^1(M(b))$  est de périodicité 3.

□

**Exemple 4.15** Prenons le carquois suivant où chaque combinaison de deux flèches internes à un 3-cycle est nulle.



La résolution projective du module  $M(b)$  associé à la bande



est donnée par

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{P}_5 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{P}_4 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{P}_3 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{P}_2 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{P}_1 & \rightarrow & M(b) & \rightarrow & 0 \\ & & & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & & \\ & & & & \Omega^4(M(b)) & & \Omega^3(M(b)) & & \Omega^2(M(b)) & & \Omega^1(M(b)) & & & & \end{array}$$

$$\text{où } \begin{cases} \tilde{P}_1 = P_6 \oplus P_{10} \oplus P_{12}, \\ \tilde{P}_2 = P_4 \oplus P_{11} \oplus P_3 \oplus P_7, \\ \tilde{P}_3 = P_3 \oplus P_2, \\ \tilde{P}_4 = P_2 \oplus P_4. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons respectivement les syzygies suivants.

$$\text{où } \begin{cases} \Omega^1(M(b)) = \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \oplus 11 \oplus \begin{matrix} 3 \\ 8 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 7 \\ 8 \end{matrix}, \\ \Omega^2(M(b)) = 3 \oplus 2, \\ \Omega^3(M(b)) = 2 \oplus \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}, \\ \Omega^4(M(b)) = \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \oplus 3. \end{cases}$$

On remarque alors, en plus de la dimension projective infinie du module  $M(b)$ , la périodicité 3 du premier syzygie modulo les facteurs projectifs.

## 4.6 Fonction d'Igusa-Todorov

Maintenant que nous avons démontré la périodicité des premiers syzygies pour tous les types de modules d'une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ , nous sommes en mesure de borner la  $\phi$ -dimension d'une telle algèbre dans le corollaire suivant.

**Corollaire 4.16** *Soit  $\Lambda$  une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Pour tous modules indécomposables  $M_1$  et  $M_2 \in \text{mod } \Lambda$ , on a  $\phi(M_1 \oplus M_2) \leq 1$ . Ainsi,  $\phi \dim(\Lambda) \leq 1$ .*

**Démonstration.** Par la proposition 2.13 du chapitre 2, nous avons que la dimension Gorenstein d'une algèbre inclinée-amassée est d'au plus 1. Ainsi, pour deux modules indécomposables donnés  $M_1$  et  $M_2$  la dimension projective est soit 0, 1 ou infinie. Si la dimension projective de  $M_1$  ou  $M_2$  est de 0 ou 1 alors, en vertu de la propriété 1 du lemme 3.1, on a  $\phi(M_1 \oplus M_2) = \sup\{\text{dp}M_1, \text{dp}M_2\} \leq 1$ . Ne reste plus qu'à considérer le cas où les dimensions projectives sont infinies.

Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux  $\Lambda$ -modules indécomposables, de dimension projective infinie et dont les résolutions projectives sont données par

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P(M_1) & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & & & & \\ & & & \Omega^4(M_1) & & \Omega^3(M_1) & & \Omega^2(M_1) & & \Omega^1(M_1) & & & & & \end{array}$$

et

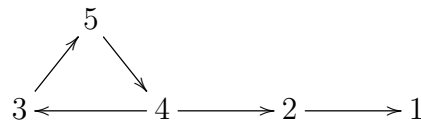
$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & Q_4 & \longrightarrow & Q_3 & \longrightarrow & Q_2 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & P(M_2) & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & & & & \\ & & & \Omega^4(M_2) & & \Omega^3(M_2) & & \Omega^2(M_2) & & \Omega^1(M_2) & & & & & \end{array}$$

Étudions la résolution projective du module  $M_1 \oplus M_2$  pour mieux comprendre  $\phi(M_1 \oplus M_2)$ . Supposons qu'il y ait chute de rang à partir du deuxième syzygie. Puisque les deux modules  $M_1$  et  $M_2$  sont indécomposables et de dimension projective infinie, cette chute fait passer le rang de 2 à 1. De plus, ce sera la seule chute de rang à se produire tout au long de la résolution projective de  $M_1 \oplus M_2$ . Autrement, nous aurions une chute de rang 1 à rang 0 ce qui contredirait la dimension projective infinie de  $M_1 \oplus M_2$ . Étant donnée une chute de rang au deuxième syzygie, c'est-à-dire que  $\phi(M_1 \oplus M_2) = 2$ , nous avons les décompositions en facteurs directs suivantes

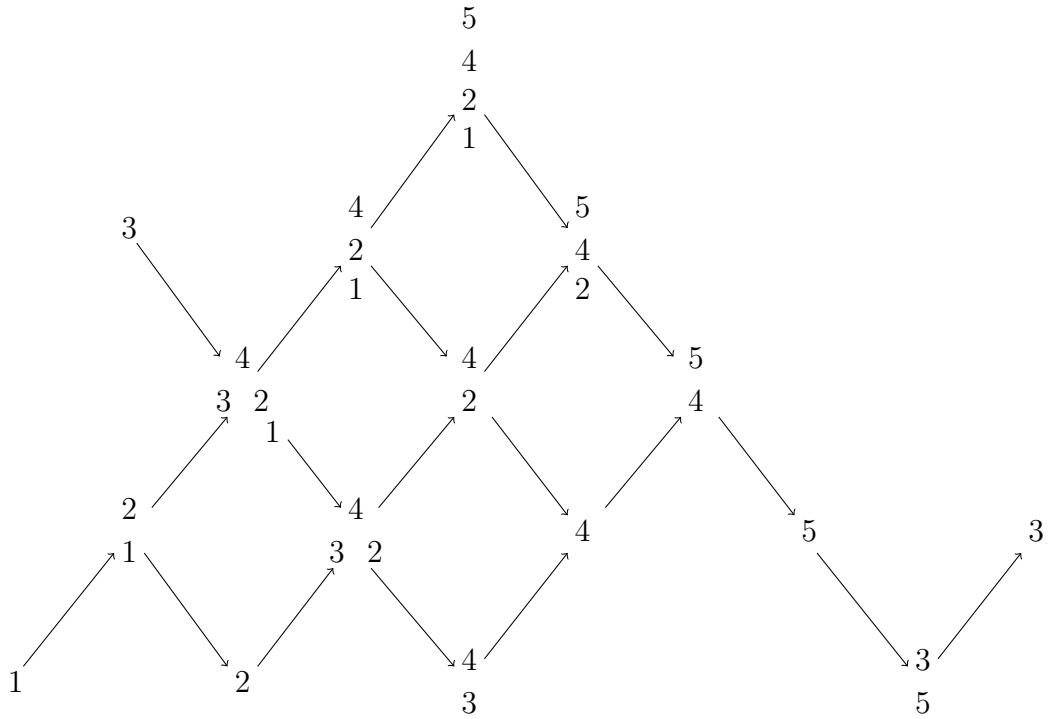
$$\Omega^2(M_1) = A_1^{\alpha_1} \oplus A_2^{\alpha_2} \oplus \dots \oplus A_l^{\alpha_l} \oplus P_{\Omega^2(M_1)} \quad \text{et} \quad \Omega^2(M_2) = A_1^{c\alpha_1} \oplus A_2^{c\alpha_2} \oplus \dots \oplus A_l^{c\alpha_l} \oplus P_{\Omega^2(M_2)}$$

pour une certaine constante  $c$ . Ainsi, les projectifs  $P_2$  et  $Q_2$  de la résolution projective de  $M_1$  et de  $M_2$  respectivement ont les mêmes facteurs directs,  $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_l)$ , à une constante  $c$  près. Tout comme  $\Omega^3(M_1)$  et  $\Omega^3(M_2)$  ainsi que  $P_4$  et  $Q_4$  toujours à une constante près. Le même phénomène se reproduit tout au long de la résolution en particulier pour  $\Omega^4(M_1)$  et  $\Omega^4(M_2)$ . Mais  $\Omega^4(M_1) = \Omega^1(M_1)$  et  $\Omega^4(M_2) = \Omega^1(M_2)$  en vertu de la périodicité 3 des premiers syzygies, impliquant une chute de rang antérieure soit au premier syzygie de  $M_1 \oplus M_2$ . Ainsi,  $\phi(M_1 \oplus M_2) = 1$  contredisant notre hypothèse. Si, d'un autre côté, nous n'avons aucune chute de rang, alors  $\phi(M_1 \oplus M_2) = 0$  tout simplement. Le raisonnement précédent s'applique à toute somme directe de plusieurs  $\Lambda$ -modules indécomposables.  $\square$

**Exemple 4.17** *Dans le cadre d'une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{A}_n$ , prenons l'algèbre des chemins  $\Lambda$  associée au carquois suivant où toute combinaison de deux flèches du 3-cycle est nulle.*



*Le carquois d'Auslander-Reiten est donné par*



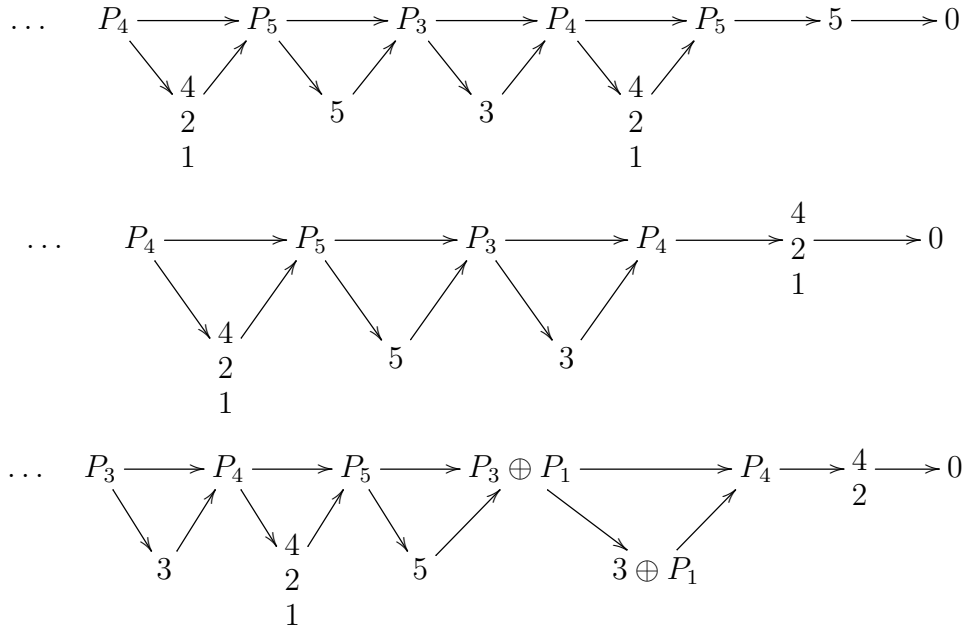
Les projectifs sont les modules  $P_1 = 1$ ,  $P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ ,  $P_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}$ ,  $P_4 = \begin{smallmatrix} 4 & 3 & 2 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$  et  $P_5 = \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ .

Les modules de dimension projective 1 sont  $2$ ,  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$  et  $\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$  et voici les résolutions projectives des modules de dimension projective infinie.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & P_3 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & P_5 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & & & \\
 & & 3 & & 4 & & 5 & & & & & \\
 & & & & 2 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & P_3 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & P_5 & \longrightarrow & P_3 \oplus P_2 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & & & \\
 & & 3 & & 4 & & 5 & & 3 \oplus P_2 & & & & & \\
 & & & & 2 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & & 
 \end{array}$$





Ainsi, la valeur de la fonction d'Igusa-Todorov sur l'ensemble des combinaisons en sommes directes des indécomposables de cette algèbre est 0 ou 1. Nous voyons bien que  $\phi\dim(\Lambda) = 1$ .

# CHAPITRE 5

## Modules de dimension projective infinie sur les algèbres inclinées-amassées

Dans ce chapitre, nous concentrerons nos efforts à caractériser les modules de dimension projective infinie sur une algèbre inclinée-amassée  $\text{End}_c(T)$ , pour un certain objet inclinant  $T$  d'une catégorie triangulée. Nous donnerons la définition de l'idéal  $I_M$  de  $\text{End}_c(T[1]) \cong \text{End}_c(T)$  formé de tous les endomorphismes se factorisant par  $M \in \text{mod}(\text{End}_c(T))$  et montrerons que les  $\text{End}_c(T)$ -modules  $\text{Hom}_c(T, M)$  sont de dimension projective infinie précisément lorsque cet idéal est non nul. Cette caractérisation segmentera le carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre inclinée-amassée en des "balançoires", semblables aux hamacs introduits et étudiés notamment par Brenner, Ringel et Vossieck ([7], [25], [26]), ce qui permettra une localisation quasi-instantanée des modules de dimension projective infinie.

## 5.1 Préliminaires

Bien que les catégories amassées et les objets inclinants serviront de support à nos exemples futurs, les résultats avancés ici sont tout aussi valables dans le cadre plus général des catégories triangulées. C'est pourquoi nous introduisons la définition suivante d'objet maximal 1-orthogonal.

**Définition 5.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée. Un objet  $T$  de  $\mathcal{C}$  est dit maximal 1-orthogonal si  $\text{add } T$  est approximante à droite et à gauche et si de plus, un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  appartient à  $\text{add } T$  si et seulement si  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, T) = 0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, X)$ .*

Tel que mentionné au chapitre 1, le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{C}/\text{add } T[1]$  et  $\text{mod}(\text{End}_{\mathcal{C}}(T))$ . Sous cette équivalence les  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ -modules projectifs sont de la forme  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T^0)$ , où  $T^0$  est un objet de  $\text{add } T$  et tout  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ -module indécomposable correspond à un objet indécomposable de  $\mathcal{C}$  n'appartenant pas à  $\text{add } T[1]$ . Pour un module  $M$ , notons  $I_M$  l'idéal de  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T[1])$  engendré par tous les endomorphismes se factorisant par  $M$ , appelé idéal de factorisation de  $M$ .

Dans le but d'alléger le texte nous noterons  $C$  l'algèbre d'endomorphisme  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ . Nous aurons également besoin dans ce qui suivra des deux lemmes suivants sur les catégories triangulées et ses triangles. Le premier est dû à Keller et Reiten et nous démontrerons le second.

**Lemme 5.2 ([23])** *Soit  $T$  un objet maximal 1-orthogonal d'une catégorie triangulée  $\mathcal{C}$  et soit*

$$Y[-1] \longrightarrow X \longrightarrow T^0 \xrightarrow{f} Y$$

*un triangle de  $\mathcal{C}$  où le morphisme  $f : T^0 \rightarrow Y$  est une  $\text{add } T$ -approximation à droite de  $Y$ . Alors,  $X$  appartient à  $\text{add } T$ .*

**Lemme 5.3** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée possédant un objet  $T$  maximal 1-orthogonal et  $g : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $\mathcal{C}$  appartenant au triangle suivant*

$$Z[-1] \xrightarrow{h} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z.$$

*Alors,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, g)$  est un monomorphisme de  $\text{mod } C$  si et seulement si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, h) = 0$ .*

**Démonstration.** En appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)$  au triangle

$$Z[-1] \xrightarrow{h} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

on obtient la suite exacte

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Z[-1]) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, h)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, g)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, f)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Z).$$

Puisque la suite est exacte,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, g)$  est un monomorphisme si et seulement si  $\text{Ker } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, g) = 0$  si et seulement si  $\text{Im } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, h) = 0$  si et seulement si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, h) = 0$ . □

Dans ce qui suit et lorsqu'il n'y aura aucune confusion possible, nous allégerons la notation d'un module quelconque  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$  par  $(T, M)$  et celle d'un morphisme  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, f)$  par  $(T, f)$ .

La proposition vue au chapitre 2 sur la dimension de Gorenstein d'une algèbre inclinée-amassée peut être reformulée dans le cadre plus général des catégories 2-Calabi-Yau.

**Théorème 5.4 ([24])** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée et  $T$  un objet maximal 1-orthogonal de  $\mathcal{C}$ . Alors, l'anneau des endomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  est Gorenstein de dimension de Gorenstein au plus 1.*

Ce résultat est une généralisation aux catégories triangulées par Koenig et Zhu du théorème sur la dimension Gorenstein des catégories 2-Calabi-Yau de Keller-Reiten. Rappelons également qu'être une algèbre de dimension Gorenstein au plus 1 implique que tout module sur cette même algèbre est soit de dimension projective 0, 1 ou infinie.

## 5.2 Théorème principal

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de prouver le théorème central de ce chapitre. Soit  $I_M$  l'idéal de  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T[1])$  donné par tous les endomorphismes se factorisant par  $M$ . Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 5.5** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée et  $T$  un objet maximal 1-orthogonal. Soit  $M$  un objet indécomposable de  $\mathcal{C}$  n'étant pas un facteur direct de  $T[1]$ . Alors, le  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$  est de dimension projective infinie précisément lorsque l'idéal de factorisation  $I_M$  est non nul.*

**Démonstration.** Soit  $M$  un objet indécomposable de  $\mathcal{C}$  n'appartenant pas à  $\text{add } T[1]$ . Montrons tout d'abord que l'idéal  $I_M$  de factorisation de  $M$  est non nul lorsque  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$  est de dimension projective infinie.

Supposons que  $\text{dpHom}_{\mathcal{C}}(T, M) = \infty$  et considérons la couverture projective

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T^0) \xrightarrow{(T, f)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M) \longrightarrow 0$$

dans  $\text{mod } \mathcal{C}$  définie par le morphisme  $f : T^0 \rightarrow M$  de  $\mathcal{C}$ . Ainsi, le morphisme  $f$  peut être relevé en un triangle

$$M[-1] \xrightarrow{\beta[-1]} T^1 \longrightarrow T^0 \xrightarrow{f} M$$

dont l'objet  $T^1$ , en vertu du lemme 5.2, appartient à  $\text{add } T$ . Lorsqu'on applique le foncteur  $\text{Hom}_c(T, -)$  à ce triangle, on obtient une suite exacte longue de  $\text{mod } C$  de la forme

$$(T, M[-1]) \xrightarrow{(T, \beta[-1])} (T, T^1) \longrightarrow (T, T^0) \longrightarrow (T, M) \longrightarrow (T, T^1[1])$$

où  $\text{Hom}_c(T, T^1[1]) = 0$  puisque  $T$  est un objet maximal 1-orthogonal. De plus, l'hypothèse  $\text{dpHom}_c(T, M) = \infty$  implique que le morphisme  $\text{Hom}_c(T, \beta[-1]) \neq 0$ . Sinon, nous aurions une dimension projective d'au plus 1. Nous pouvons donc choisir un morphisme  $\alpha[-1] \in \text{Hom}_c(T, M[-1])$  dont l'image sous  $\text{Hom}_c(T, \beta[-1])$  soit non nulle. C'est-à-dire, tel que la composition

$$T \xrightarrow{\alpha[-1]} M[-1] \xrightarrow{\beta[-1]} T^1$$

soit non nulle. En décalant le triangle, nous obtenons également la composition non nulle des morphismes suivants

$$T[1] \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} T^1[1].$$

Puisque  $T^1[1]$  est un facteur direct non nul de  $\text{add } T[1]$ , Nous pouvons conclure que l'idéal de factorisation  $I_M$  contient au moins le morphisme  $\beta\alpha$ , soit un élément non nul.

Montrons maintenant que l'idéal de factorisation  $I_M$  est non nul si seulement si  $\text{Hom}_c(T, M)$  est de dimension projective infinie. En vertu de la dimension de Gorenstein de l'algèbre  $C$ , nous savons que tout  $C$ -module  $\text{Hom}_c(T, M)$  de dimension projective finie est de dimension projective 0 ou 1. Montrons que dans chacun de ces deux cas, l'idéal de factorisation  $I_M$  se réduit à 0.

**Cas 1 :** Supposons que la dimension projective de  $\text{Hom}_c(T, M)$  est 0.

$M$  appartient donc à  $\text{add } T$  et toute composition de morphismes de la forme

$$T[1] \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} T[1]$$

doit être nulle puisque  $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T[1]) = 0$ , *a fortiori* tout morphisme  $\beta = 0$ . Dans ce cas nous avons bien  $I_M = 0$ .

**Cas 2 :** Supposons maintenant que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$  est de dimension projective 1.

Nous avons une résolution projective de la forme suivante dans  $\text{mod } \mathcal{C}$ .

$$0 \longrightarrow (T, T^1) \xrightarrow{(T,g)} (T, T^0) \longrightarrow (T, M) \longrightarrow 0 \quad (5.1)$$

Nous pouvons ainsi choisir, dans  $\mathcal{C}$ , un triangle en prolongeant le morphisme  $g$  ci-haut, soit

$$Z[-1] \xrightarrow{h} T^1 \xrightarrow{g} T^0 \xrightarrow{f} Z. \quad (5.2)$$

Par le lemme 5.3, nous avons que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, h) = 0$ . De plus, en gardant à l'esprit que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T[1]) = 0$  et en appliquant  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)$  au triangle (5.2), on obtient la suite exacte de  $\text{mod } \mathcal{C}$ .

$$0 \longrightarrow (T, T^1) \xrightarrow{(T,g)} (T, T^0) \xrightarrow{(T,f)} (T, Z) \longrightarrow 0 \quad (5.3)$$

Ainsi, de (5.1) et (5.3) nous obtenons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (T, T^1) & \xrightarrow{(T,g)} & (T, T^0) & \xrightarrow{(T,f)} & (T, Z) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \exists \cong \parallel \\ 0 & \longrightarrow & (T, T^1) & \xrightarrow{(T,g)} & (T, T^0) & \longrightarrow & (T, M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

d'où nous pouvons conclure l'isomorphisme entre les deux conoyaux  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Z)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$ . Ceci implique que l'objet  $M$  en tant que tel est isomorphe, dans la catégorie  $\mathcal{C}$ , à un facteur direct de  $Z \oplus Z'$  pour un  $Z' \in \text{add } T[1]$ . Mais nous avons choisi  $M$  indécomposable et non isomorphe à un objet de  $\text{add } T[1]$ . Ainsi,  $M$  est isomorphe à

un facteur direct de  $Z$ . Notons  $\iota : M \rightarrow Z$  la section correspondante et  $\rho : Z \rightarrow M$  sa rétraction. Soit la factorisation

$$T[1] \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} T[1].$$

Montrons que la composition  $\beta\alpha = 0$ , c'est-à-dire que l'idéal  $I_M = 0$ . Puisque  $M$  est isomorphe à un facteur direct de  $Z$  nous avons les combinaisons de morphismes suivantes

$$T[1] \xrightarrow{\iota\alpha} Z \xrightarrow{\beta\rho} T[1]$$

que nous pouvons insérer dans le diagramme commutatif construit à partir du triangle (5.2).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & T & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T[1] & \xrightarrow{\mathbb{I}} & T[1] & \\
 & \downarrow x & & \downarrow & & \downarrow \iota\alpha & & \downarrow x[1] & \\
 Z[-1] & \xrightarrow{h} & T^1 & \xrightarrow{g} & T^0 & \xrightarrow{f} & Z & \longrightarrow & T^1[1] \\
 & & \downarrow y & & \downarrow & & \downarrow \beta\rho & & \downarrow y[1] \\
 & & T & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T[1] & \xrightarrow{\mathbb{I}} & T[1]
 \end{array} \tag{5.4}$$

L'existence du morphisme  $x$  et  $y$  entre les deux triangles ci-haut étant assurée par les propriétés des triangles d'une catégorie triangulée et par la commutativité des deux carrés suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & T[1] \\
 \downarrow & & \downarrow \iota\alpha \\
 T^0 & \xrightarrow{f} & Z
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 T^0 & \xrightarrow{f} & Z \\
 \downarrow & & \downarrow \beta\rho \\
 0 & \longrightarrow & T[1]
 \end{array}$$



qui suit de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T^0, T[1]) = 0$ . Finalement, du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow x & & \downarrow \\ T^1 & \xrightarrow{g} & T^0 \end{array}$$

inclus dans (5.4) nous pouvons conclure que  $gx = 0$ , donc que  $x = 0$  puisque  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, g)$  est un monomorphisme. En particulier,  $x[1] = 0$  et par la commutativité de (5.4)

$$0 = y[1]x[1] = \beta\rho\alpha = \beta\alpha.$$

Ce qui nous permet de conclure que  $I_M = 0$ . □

**Remarque 5.6** *Nous pouvons obtenir, et ce de manière tout à fait analogue, le dual du précédent résultat. En effet, nous obtenons ainsi que le  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$  est de dimension injective infinie précisément lorsque l'idéal de factorisation  $I_M$  est non nul.*

Nous avons montré au cas 2 de la preuve précédente qu'il existe un triangle (5.2) de  $\mathcal{C}$  où l'objet  $M$  ne diffère de l'objet  $Z$  que d'un facteur direct appartenant à  $\text{add } T[1]$ , c'est-à-dire  $Z \cong M \oplus Z'$ , où  $Z' \in \text{add } T[1]$ . Par la suite, nous avons démontré au diagramme (5.4) qu'il n'existe aucun morphisme non nul de  $T[1]$  vers  $T[1]$  se factorisant à travers  $Z$  montrant ainsi que  $Z' = 0$ . Nous pouvons extraire de ces arguments le corollaire suivant.

**Corollaire 5.7** *Toute suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow (T, T^1) \xrightarrow{(T, g)} (T, T^0) \xrightarrow{(T, f)} (T, M) \longrightarrow 0$$

de  $\text{mod } \mathcal{C}$ , où  $T^0, T^1 \in \text{add } T$  peut être relevée en un triangle

$$M[-1] \xrightarrow{h} T^1 \xrightarrow{g} T^0 \xrightarrow{f} M$$

de  $\mathcal{C}$ .

### 5.3 Hamacs, balançoires et faisceaux

Le concept d'hamac dans le cadre d'un carquois à translation fut notamment étudié par Gabriel dans [19] et Brenner dans [6]. Il fut ensuite repris par Ringel et Vossieck dans [26] dans un cadre plus général. Nous pouvons définir sur un carquois à translation une fonction additive notée  $h$ , appelée fonction de hamac, de sorte que lorsque cette fonction, satisfaisant certaines conditions, est appliquée sur ledit carquois à translation, un certain nombre de modules est sélectionné pour former ce qu'on appelle un hamac, noté  $H_h$ . Les travaux de Ringel ([25]) définissent le concept pour les catégories amassées. Toutefois, pour obtenir les hamacs que nous souhaitons, c'est-à-dire ceux formés de modules de dimension projective infinie, il nous a fallu modifier légèrement la définition originale.

Dans ce qui suivra, prenons  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée et  $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$  un objet maximal 1-orthogonal de  $\mathcal{C}$  et  $C = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ . Notons de plus que pour un objet  $M \in \mathcal{C}$ , son idéal de factorisation  $I_M$  est non nul si et seulement si il existe des indices  $i$  et  $j$  tels qu'il existe un morphisme non nul entre les facteurs indécomposables  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$  de  $T[1]$  se factorisant par  $M$ . Notons  $\Gamma(\mathcal{C})$  le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie  $\mathcal{C}$ . Définissons le sous-carquois suivant

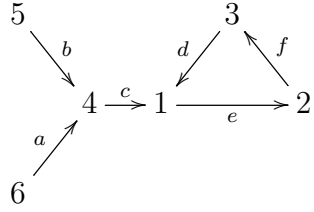
$$H(i, j) = \{X \in \mathcal{C} \mid \text{il existe } 0 \neq \lambda : T_i[1] \rightarrow T_j[1] \text{ se factorisant par } X\}.$$

Le théorème principal de la section précédente implique qu'il existe une bijection entre l'ensemble

$$\bigcup_{i,j} (H(i, j) \setminus T[1])$$

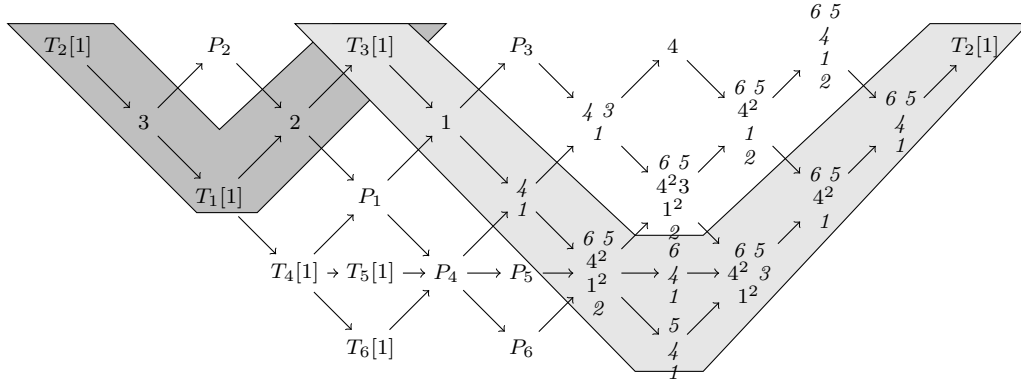
et les  $C$ -modules indécomposables de dimension projective infinie. Ainsi, en calculant tous les  $C$ -modules indécomposables appartenant aux sous-carquois  $H(i, j)$  de  $\Gamma(\mathcal{C})$ , nous obtenons tous les modules de dimension projective infinie. Illustrons par un exemple les calculs permettant d'obtenir quelques-uns des  $H(i, j)$  dans une algèbre inclinée-amassée.

**Exemple 5.8** Soit  $C$  l'algèbre inclinée-amassée donnée par l'algèbre des chemins du carquois suivant



lié par les relations  $de = ef = fd = 0$ . L'algèbre inclinée-amassée  $C$  est de type  $\mathbb{D}_6$ , obtenue à partir de l'anneau des endomorphismes d'un objet inclinant  $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_6$  de la catégorie amassée  $\mathcal{C}$  de type  $\mathbb{D}_6$ . Les sous-carquois pleins  $H(i, j)$  de  $\Gamma(\mathcal{C})$  peuvent être calculés simplement à l'aide des relations de mailles classiques des carquois d'Auslander-Reiten. En effet, partant d'un  $T_i[1]$  donné et en suivant un chemin du carquois dont les relations de mailles sont non nulles, et ce jusqu'au prochain  $T_j[1]$ , nous obtenons un sous-carquois  $H(i, j)$  ne contenant que des objets  $X \in \mathcal{C}$  tels que les modules associés  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \in C$  soient de dimension projective infinie.

Dans le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée  $\mathcal{C}$ , nous observons que seules les paires  $(i, j)$  correspondant à  $(2, 1)$ ,  $(1, 3)$  et  $(3, 2)$  représentent des ensembles  $H(i, j) \setminus T[1]$  non vides. Les modules de  $H(2, 1)$  et de  $H(1, 3)$  sont contenus dans les sous-carquois en gris foncé dans la figure ci-dessous. Tandis que ceux de  $H(3, 2)$  dans le sous-carquois gris pâle.



### 5.3.1 Hamacs sur les catégories amassées

Rappelons ici les définitions classiques des travaux de Ringel, détaillées dans [25], où la notion originale d'hamac fut adaptée aux catégories amassées. Soit  $\mathbb{Z}\Delta$  un carquois à translation, où  $\Delta$  est un carquois orienté fini. Tout d'abord, définissons ce qu'est une fonction amassée-additive.

Une fonction de hamac à gauche  $h_\omega$ , pour un point  $\omega \in \mathbb{Z}\Delta$ , est définie comme suit.

**Définition 5.9** (1)  $h_\omega(\omega) = 1$ .

(2) Si  $z$  n'est pas un successeur de  $\omega$ , alors  $h_\omega(z) = 0$ .

(3) Si  $h_\omega(y)$  est définie pour tous les prédécesseurs propres de  $z$  et s'il existe une flèche  $\alpha : y \rightarrow z$  telle que  $h_\omega(y) \geq 0$ , alors

$$h_\omega(z) = \sum_y m_{yz} h_\omega(y) - h_\omega(\tau z)$$

où  $m_{yz}$  est le nombre de flèches de  $y \rightarrow z$ . Sinon  $h_\omega(z) = 0$ .

Le support de  $h_\omega$ , noté  $H_\omega$ , est appelé le hamac associé à la fonction  $h_\omega$ .

Il est bien connu que les valeurs prises par la fonction  $h_\omega$  sont non négatives. De plus, si

$\Delta$  est un carquois de Dynkin, alors  $H_\omega$  est fini. Par exemple, on peut définir des fonctions de hamacs sur  $\mathbb{Z}\Delta = D^b(\text{mod } A)$ , où  $A$  est l'algèbre des chemins de  $\Delta$ .

Pour tout point  $x \in \mathbb{Z}\Delta$ , définissons la fonction amassée-additive  $h_x$  de la façon suivante. Soit  $\mathcal{S}$  toute tranche contenant  $x$ . Posons  $h_x(x) = -1$  et  $h_x(y) = 0$  pour tout  $y \neq x \in \mathcal{S}$ . En vertu d'un théorème de Ringel (voir [25]),  $h_x$  s'étend de manière unique, et indépendamment du choix de la tranche  $\mathcal{S}$ , à une fonction amassée-additive à tout  $\mathbb{Z}\Delta$ . Cette fonction  $h_x$  est appelée fonction amassée de hamac par rapport au point  $x$ . Rappelons ici que  $F := \tau^{-1}[1]$ . Nous avons le lemme suivant.

**Lemme 5.10 ([25])** *Soit  $\mathbb{Z}\Delta$ , où  $\Delta$  est un carquois de type Dynkin. Alors,  $h_x$  est  $F$ -invariante, c'est-à-dire  $h_x(y) = h_x(Fy)$  pour tout  $y \in \mathbb{Z}\Delta$ .*

### 5.3.2 Hamacs sur les catégories triangulées

Étudions ici les hamacs dans le cadre d'une catégorie triangulée  $\mathcal{C}$  possédant un objet maximal 1-orthogonal. Pour chaque  $1 \leq i \leq n$  définissons le hamac à gauche  $H_i$  comme étant le sous-carquois plein du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  donné par

$$H_i = \text{supp Hom}_{\mathcal{C}}(T_i[1], -).$$

De la même manière, définissons comme hamac à droite  ${}_iH$  le sous-carquois plein du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  donné par

$${}_iH = \text{supp Hom}_{\mathcal{C}}(-, T_i[1]).$$

En pratique, il est aisé de calculer les hamacs  ${}_iH$  et  $H_i$  à l'aide des relations de mailles du carquois d'Auslander-Reiten de  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Dans le contexte des catégories amassées, c'est-à-dire celui de Ringel dans [25], les hamacs  $H_i$  sont donnés par l'ensemble des points

où les fonctions amassées de hamacs  $h_{T_i[2]}$  prennent des valeurs positives. Tandis que les hamacs  ${}_iH$  coïncident, lorsque  $\mathcal{C}$  est de type Dynkin, avec l'ensemble des points où les fonctions amassées de hamacs  $h_{T_i}$  prennent des valeurs négatives.

Remarquons qu'il suit de la définition que, lorsque le sous-carquois  $H(i, j) \neq \emptyset$ , l'objet  $T_i[1]$  appartient au hamac à gauche  $H_i$  et l'objet  $T_j[1]$  appartient au hamac à droite  ${}_jH$ . Bien que nous ayons l'inclusion suivante

$$H(i, j) \subseteq (H_i \cap {}_jH),$$

il n'est pas clair quand cette inclusion est stricte. Les prochaines lignes seront consacrées à l'étude des sous-carquois  $H(i, j)$  du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  lorsque  $\mathcal{C}$  est de type Dynkin. Plus précisément aux positions possibles des objets  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$ . Nous avons, puisque  $T$  est un objet maximal 1-orthogonal, que  $\text{Ext}^1(T_i[1], T_j[1]) = 0$ . Ainsi,  $T_j[1] \notin \text{supp Ext}_{\mathcal{C}}^1(T_i[1], -) = H_i[-1]$ , le hamac décalé de 1 à l'aide du foncteur de décalage. On a donc  $T_i[1] \in H_i \setminus H_i[-1]$ . Situés à l'extrémité gauche de  $H_i$ , les objets de  $H_i \setminus H_i[-1]$  sont appelés les points projectifs du carquois à translation  $H_i$ . Rappelons qu'un chemin  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  d'un carquois à translation est dit sectionnel si  $\tau \alpha_{i+1} \neq \alpha_{i-1}$  pour tout  $0 < i < n$ . Ainsi, tous les points d'un chemin sectionnel débutant en  $T_i[1]$  est un point projectif du carquois à translation  $H_i$ . Nous avons le lemme suivant.

**Lemme 5.11** *Soit  $\mathcal{C}$  de type Dynkin. Supposons qu'il existe un chemin sectionnel  $\sigma : T_i[1] \rightarrow \dots \rightarrow T_j[1]$  dans le carquois d'Auslander-Reiten de  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Alors le sous-carquois  $H(i, j)$  est formé de tous les points de  $\sigma$  et*

$$H(i, j) = (H_i \cap {}_jH).$$

**Démonstration.** Supposons qu'il existe un chemin sectionnel

$$\sigma : T_i[1] \rightarrow \dots \rightarrow X \rightarrow \dots \rightarrow T_j[1]$$

dans le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Puisque ce chemin correspond à une succession de morphismes irréductibles non nuls de  $\Gamma(\mathcal{C})$ , un point ou un module  $X$  sur  $\sigma$  appartient au sous carquois  $H(i, j)$ .

Supposons maintenant que  $X \in (H_i \cap_j H)$ , c'est-à-dire qu'il existe un chemin de la forme

$$\gamma : T_i[1] \rightarrow \cdots \rightarrow X \rightarrow \cdots \rightarrow T_j[1]$$

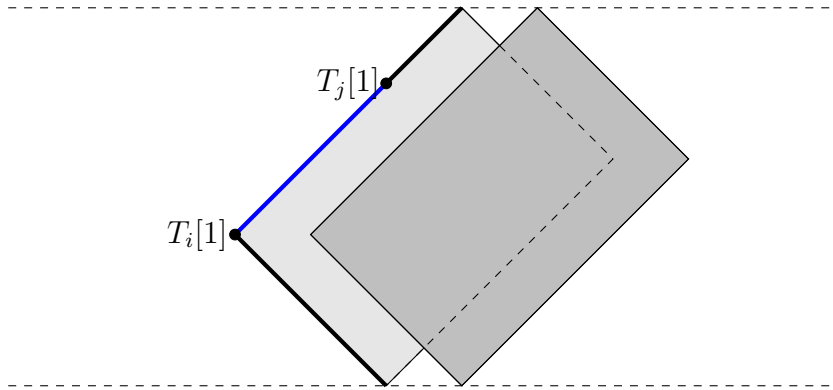
dans  $\Gamma(\mathcal{C})$ . De plus, le chemin de  $T_i[1]$  à  $T_j[1]$  est sectionnel, il n'est donc pas possible que le chemin  $\sigma$  diffère de  $\gamma$  par une ou des relations de mailles et puisque  $\Gamma(\mathcal{C})$  est de type Dynkin, il n'y a qu'un seul chemin sectionnel de  $T_i[1]$  à  $T_j[1]$ . Ainsi,  $\gamma = \sigma$  et  $H(i, j) = (H_i \cap_j H)$ .  $\square$

### 5.3.3 Catégories amassées de type $\mathbb{A}$

Supposons que la catégorie amassée étudiée soit de type  $\mathbb{A}$ . Le hamac à gauche  $H_i = \text{supp Hom}_{\mathcal{C}}(T_i[1], -)$  prendra la forme rectangulaire illustrée dans la figure suivante et le support de  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T_i[1], -)$  le rectangle en gris foncé. Ainsi, puisque  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_i[1], T_j[1]) \neq 0$  et que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T_i[1], T_j[1]) = 0$ ,  $T_j[1]$  appartient à un chemin sectionnel

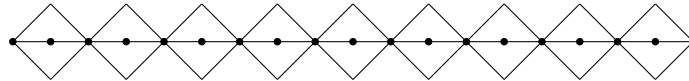
$$T_i[1] \rightarrow \cdots \rightarrow T_j[1]$$

lorsque  $H(i, j)$  est non vide.



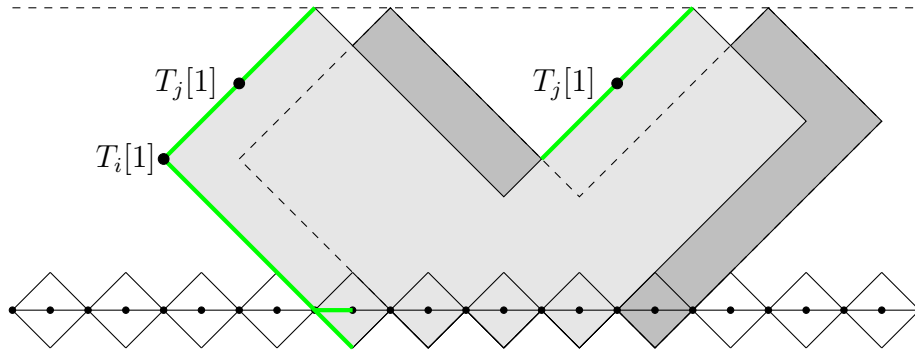
### 5.3.4 Catégories amassées de type $\mathbb{D}$

Dans cette sous-section, nous supposons que la catégorie amassée étudiée soit plutôt de type  $\mathbb{D}$ . La différence principale entre le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  d'une telle catégorie et celle du type  $\mathbb{A}$  est essentiellement une chaîne de mailles à trois termes. En effet, une chaîne d'objets de la forme

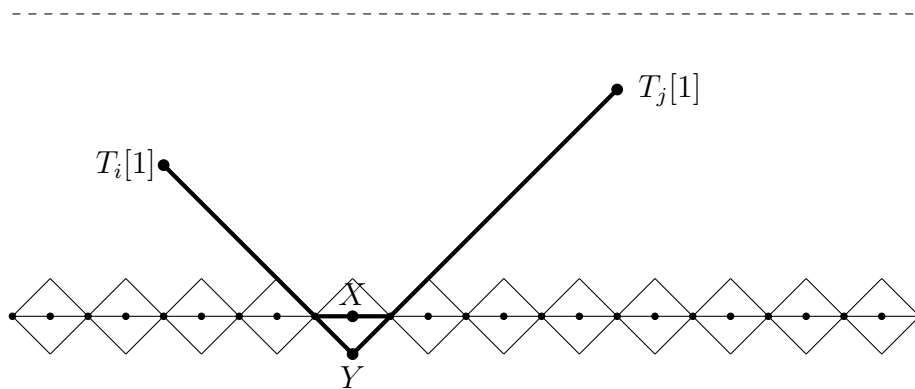


se trouve tout en bas du carquois en question. Dans un premier temps, considérons le cas où les  $T_i[1]$  ne sont pas situés sur une  $\tau$ -orbite extrême, c'est-à-dire ni complètement au bas, ni complètement au haut du carquois  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Les points projectifs du hamac à gauche  $H_i$ , indiqué en vert sur la figure ci-dessous, se trouvent sur deux composantes. Ce qui implique deux positions possibles pour l'objet  $T_j[1]$  telles que représentées. La première composante est donnée par l'ensemble des points du chemin sectionnel débutant en  $T_i[1]$  et si  $T_j[1]$  est un de ces points, alors  $H(i, j)$  est décrit dans le lemme 5.11.





Supposons plutôt que l'objet  $T_j[1]$  n'appartient pas à un chemin sectionnel partant de l'objet  $T_i[1]$  et tâchons de décrire  $H(i, j)$ . D'après la figure ci-haut, il existe deux objets, disons  $X$  et  $Y$ , du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  qui sont les termes centraux d'une relation de mailles à trois termes. Ainsi, le chemin de  $T_i[1]$  à  $T_j[1]$  peut être découpé en deux chemins sectionnels soit un de  $T_i[1]$  à  $X$  et  $Y$  et un de  $X$  et  $Y$  à  $T_j[1]$ . Nous appellerons la collection des points appartenant à un de ces deux chemins sectionnels une balançoire aux points fixes  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$ , notée  $S(T_i[1], T_j[1])$ . La figure suivante en illustre un exemple.



**Proposition 5.12** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie amassée de type  $\mathbb{D}$ . Supposons que  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$  sont deux objets du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  situés de telle façon que  $H(i, j) \neq \emptyset$ ,  $\text{Hom}(T_i[1], T_i) \neq 0$  et qu'il n'y ait pas de chemin sectionnel de  $T_i[1]$  à  $T_j[1]$ . Alors,  $H(i, j)$*

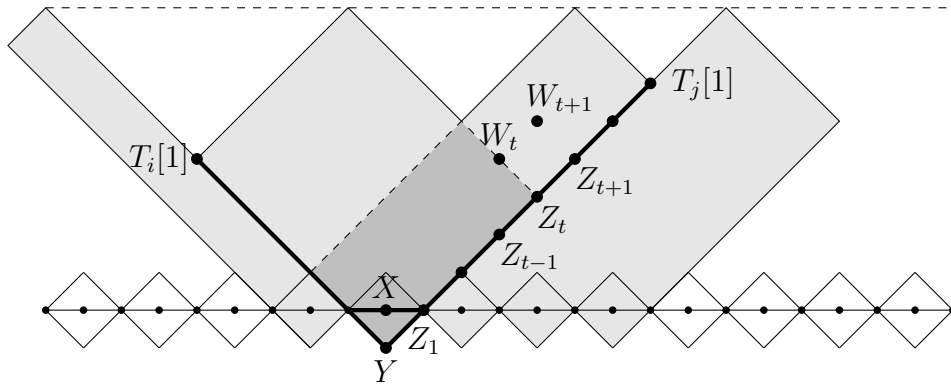
est une balançoire aux points fixes  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$  telle que décrite à la figure précédente.

De plus,

$$H(i, j) \neq (H_i \cap_j H)$$

dans le cas où  $S(T_i[1], T_j[1]) \neq (H_i \cap_j H)$ .

**Démonstration.** Il est clair, d'après les relations induites du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$ , que tous les points appartenant à la balançoire  $S(T_i[1], T_j[1])$  appartiennent également à  $H(i, j)$ . Puisque  $H(i, j) \subseteq (H_i \cap_j H)$ , nous montrerons que tout point de  $(H_i \cap_j H) \setminus S(T_i[1], T_j[1])$  n'appartient pas à  $H(i, j)$ . Dans la figure ci-bas, nous avons illustré en gris pâle l'ensemble  $H_i \cup_j H$  et l'intersection  $H_i \cap_j H$  en gris foncé. Nous avons également noté  $Z_1, Z_2, \dots$  les points appartenant au chemin sectionnel de  $X, Y$  vers  $T_j[1]$ . Il est à noter que  $\dim \text{Hom}(T_i[1], Z_1) = 2$ , mais que  $\dim \text{Hom}(T_i[1], T_j[1]) = 1$ . Il y a donc eu chute de rang tout au long du chemin sectionnel. Notons  $Z_t$  ce point critique, c'est-à-dire, le point où  $\dim \text{Hom}(T_i[1], Z_t) = 2$  mais  $\dim \text{Hom}(T_i[1], Z_{t+1}) = 1$ .



Le point  $Z_t$  a deux prédécesseurs immédiats dans le carquois d'Auslander-Reiten, soit  $Z_{t-1}$  et  $W_t$ . Supposons que  $W_t \in (H_i \cap_j H)$ . Ainsi  $\dim \text{Hom}(T_i[1], W_t) = 1 = \dim \text{Hom}(W_t, T_j[1])$ . Notons par  $\alpha : T_i[1] \rightarrow W_t$  et  $\beta : W_t \rightarrow T_j[1]$  les morphismes non nuls du carquois  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Par les relations de mailles de ce carquois, chaque morphisme de  $W_t$  à  $T_j[1]$  se factorise

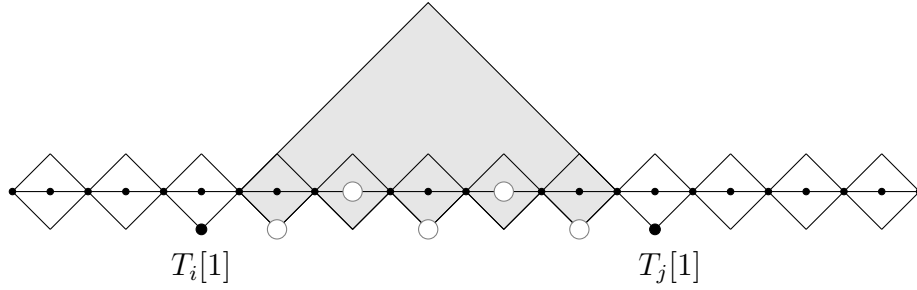
par l'objet  $W_{t+1}$  illustré dans la figure. Ainsi,  $\beta$  peut se décomposer en  $\beta = \gamma \circ \delta$ , où  $\delta$  est un morphisme de  $W_t$  à  $W_{t+1}$  et  $\gamma$  un morphisme de  $W_{t+1}$  à  $T_j[1]$ . Mais, par définition de l'objet  $Z_t$ , nous savons que  $W_{t+1} \notin H_i$  et  $\delta \circ \alpha = 0$ . De cette façon,  $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \delta \circ \alpha = 0$  et qu'ainsi  $W_t \notin H(i, j)$ . Un argument semblable montre qu'aucun des prédécesseurs de  $W_t$ , sauf pour ceux de la balançoire  $S(T_i[1], T_j[1])$ , n'appartient à  $H(i, j)$ .  $\square$

Finalement, il ne nous reste plus qu'à considérer le cas où  $T_i[1]$  est situé sur une  $\tau$ -orbite extrême, c'est-à-dire tout en haut ou tout en bas du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Nous avons dans ce cas  $\text{Hom}(T_i[1], T_i) = 0$  et idem, par symétrie, pour  $T_j[1]$ .

**Proposition 5.13** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie amassée de type  $\mathbb{D}$ . Supposons que  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$  sont deux objets du carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\mathcal{C})$  situés de telle façon que  $H(i, j) \neq \emptyset$ ,  $\text{Hom}(T_i[1], T_i) \neq 0$  et  $\text{Hom}(T_j[1], T_j) \neq 0$ . Alors,*

$$H(i, j) = (H_i \cap {}_jH).$$

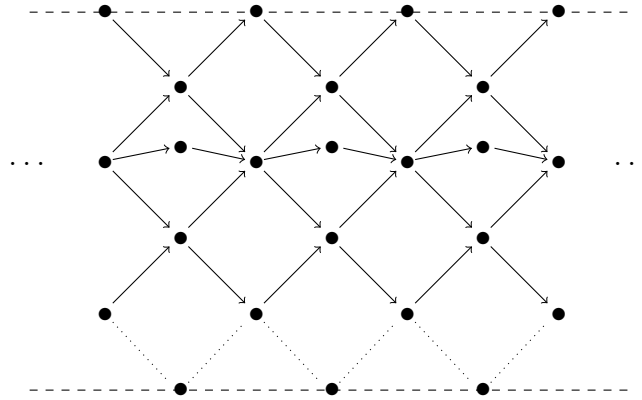
**Démonstration.** Dans le cas où  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$  seraient situés sur la plus haute  $\tau$ -orbite, il est facile de voir que  $H(i, j)$  est une balançoire aux points fixes  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$  et que nous avons l'égalité  $H(i, j) = H_i = {}_jH$ . Si toutefois, nous avons un des deux objets  $T_i[1]$  ou  $T_j[1]$  se situant sur une des deux plus basses  $\tau$ -orbites et l'autre sur la plus haute, alors il doit exister un chemin sectionnel de  $T_i[1]$  vers  $T_j[1]$  et cette situation est expliquée par le lemme 5.11. Il ne nous reste plus qu'à considérer la situation où les deux objets  $T_i[1]$  et  $T_j[1]$  se trouvent sur l'une des deux plus basses  $\tau$ -orbites de  $\Gamma(\mathcal{C})$ . La situation est décrite schématiquement par la figure ci-dessus. Les points vides indiquent les objets  $X$  tels que  $\text{Hom}(T_i[1], X) = 0$ . Ainsi, l'objet  $T_j[1]$  en tant que point projectif du hamac  $H_i$  doit se situer sur un point  $X[1]$ . Les points  $X$  apparaissent une fois dans toutes les mailles à 3 termes, ce qui transforme la maille en une relation de commutativité. Nous pouvons donc, comme nous l'avons fait pour le cas  $\mathbb{A}$ , calculer le hamac troué  $H(i, j)$  et constater l'égalité avec  $H_i \cap {}_jH$ , soit la région ombragée de la figure suivante.  $\square$



# CONCLUSION

L'étude de la  $\phi$ -dimension sur une algèbre inclinée-amassée  $\Lambda$  de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  serait d'autant plus complète si nous avons pu élaborer sur l'inégalité, à prime abord, entre la  $\phi$ -dimension projective et la  $\phi$ -dimension injective d'une telle algèbre. Nous croyons qu'avec un raisonnement combinatoire tout à fait analogue il est raisonnable de penser que la  $\phi$ -dimension injective de  $\Lambda$  est également plus petite ou égale à 1. En fait, l'analyse combinatoire d'un tel problème s'avère relativement longue et fastidieuse lorsque vient le temps de borner la  $\phi$ -dimension projective d'une algèbre inclinée-amassée d'un type Dynkin autre que  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Suite à plusieurs calculs, nous avons des raisons de croire que dans le cadre d'une algèbre inclinée-amassée de type  $\mathbb{D}_n$  la  $\phi$ -dimension se borne également à un, mais ce n'est là que conjecture. Nous croyons également qu'une technique de preuve différente de celle utilisée (non combinatoire) serait essentielle pour qui désire borner la  $\phi$ -dimension d'une algèbre inclinée-amassée de type Dynkin en général.

L'extrapolation des concepts étudiés sur des types d'algèbres précis se prête également à la localisation des objets associés aux modules de dimension projective infinie d'une catégorie amassée de type  $\mathbb{E}$ . En effet, la représentation du carquois d'Auslander-Reiten d'une catégorie amassée de type  $\mathbb{E}_n$  se généralise à la forme répétitive suivante.



Forme sur laquelle il serait intéressant de définir de nouveaux ensembles, semblables aux hamacs et aux balançoires des types  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{D}$ , afin d'avoir une idée générale sur la localisation des modules de dimension projective infinie sur des catégories amassées de type Dynkin.

# Bibliographie

- [1] I. Assem, T. Brüstle and R. Schiffler, Cluster-tilted algebras as trivial extensions, *Bull. Lond. Math. Soc.* **40** (2008), pp. 151-162.
- [2] I. Assem, T. Brüstle and R. Schiffler, Cluster-tilted algebras and slices, *J. Algebra* **319** (2008), pp. 3464-3479.
- [3] I. Assem, T. Brüstle, G. Charbonneau-Jodoin, P.-G. Plamondon, Gentle algebras arising from surface triangulations, *Algebra and Number Theory*, Vol 4 no. 2 (2010), pp. 201-229.
- [4] I. Assem, T. Brüstle and R. Schiffler, On the Galois coverings of a cluster-tilted algebra, *J. Pure Appl. Alg.* **213** (7) (2009), pp. 1450-1463.
- [5] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, *London Mathematical Society*, Student texts **65** (2006).
- [6] J. Bastian, Mutation classes of  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ -quivers and derived equivalence classification of cluster tilted algebras of type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  (2009), arXiv :[math.RT]/0901.1515v5.
- [7] S. Brenner, A combinatorial characterisation of finite Auslander-Reiten quivers. In : Representation Theory I. Finite Dimensional Algebras (ed. V. Dlab, P. Gabriel, G. Michler). Springer LNM 1177 (1986), pp. 13-49.
- [8] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov, Tilting theory and cluster combinatorics, *Adv. Math.* **204** no. 2 (2006), pp. 572-618.

- [9] A. B. Buan, R. Marsh, I. Reiten, Cluster-tilted algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** no. 1 (2007), pp. 323-332 (electronic).
- [10] A. B. Buan, R. Marsh, I. Reiten, Cluster-tilted algebras of finite representation type, *J. Algebra* **306** no. 2 (2006), pp. 412-431.
- [11] A. B. Buan, I. Reiten, A. I. Seven, Tame concealed algebras and cluster algebras of minimal infinite type, (2005), arXiv :math.RT/0512137.
- [12] A.B. Buan, D.F. Vatne, Derived equivalence classification for cluster-tilted algebras of type  $A_n$ , (2007), arXiv :math/0701612.
- [13] M.C.R Butler and C.M. Ringel, Auslander-Reiten sequences with few middle terms, *Comm. in algebra* **15** (1987), pp. 145-179.
- [14] P. Caldero, F. Chapoton, R. Schiffler, Quivers with relations arising from clusters ( $A_n$  case), *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** no. 3 (2006), pp. 1347-1364.
- [15] P. Caldero, F. Chapoton, R. Schiffler, Quivers with relations and cluster tilted algebras, *Algebr. and Represent. Theory* **9** no. 4 (2006), pp. 359-376.
- [16] S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebras I. Foundations, *J. Amer. Math. Soc.* **15**(2) (2002), pp. 497-529 (electronic).
- [17] S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston, Cluster algebras and triangulated surfaces, I. Cluster complexes, *Acta Math.*, **201**(1) (2008), pp. 83-146.
- [18] S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebras II. Finite type classification, *Inventiones Mathematicae* **154**(1) (2003), pp. 63-121.
- [19] P. Gabriel. Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. *Representation Theory I*, Springer LNM 831 (1980), pp. 1-71.
- [20] D. Happel, Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras, Cambridge University press, *London Mathematical Society, Lecture note series* **119** (1998).



- [21] F. Huard, Marcelo Lanzilotta, Self-injective right artinian rings and Igusa Todorov functions, (2011), arXiv :[math.RT]/1101.1936.
- [22] K. Igusa and G. Todorov, On the finitistic global dimension conjecture for artin algebras, Representations of algebras and related topics, Fields Inst. Commun. **45**, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, (2005), pp. 201-204.
- [23] B. Keller, I. Reiten, Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau, *Adv. Math.* **211** (2007), pp. 123-151.
- [24] S. Koenig and B. Zhu, From triangulated categories to abelian categories : cluster tilting in a general framework, *Math. Z.* **258** no. 1 (2008), pp. 143-160.
- [25] C.M. Ringel, Cluster-additive functions on stable translation quivers, *Journal of Algebraic Combinatorics* DOI 10.1007/s10801-012-0346-4.
- [26] C.M. Ringel, D. Vossieck, Hammocks. *Proc. London Math. Soc.* **54**(3) (1987), pp. 216-246.
- [27] A. Seven, Recognizing cluster algebras of finite type, *Electron. J. Combin.* **14**, no. 1, Research Paper 3 (2007).
- [28] D. Smith, On tilting modules over cluster-tilted algebras, *Illinois J. Math.* **52** no. 4 (2008), pp. 1223-1247.
- [29] J.-L. Verdier, Des catégories dérivées des catégories abéliennes, *Astérisque*, no. 239, MR MR1453167 (98c :18007), (1996).
- [30] B. Wald, J. Waschbüsch, Tame biserial algebras, *J. Algebra*, **15** no. 2 (1985), pp. 480-500.