

# Algèbres de cordes de type laura et conjecture de Skowronski

par

Julie Dionne

thèse présentée au Département de mathématiques  
en vue de l'obtention du grade de docteur es sciences (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, juin 2008

111 - 1810



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-42621-0*  
*Our file* *Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-42621-0*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

Le 20 juin 2008

*le jury a accepté la thèse de Mme Julie Dionne dans sa version finale.*

*Membres du jury*

M. Ibrahim Assem  
Directeur  
Département de mathématiques

M. Shiping Liu  
Membre  
Département de mathématiques

M. Patrick Le Meur  
Membre externe

M. Thomas Brüstle  
Président-rapporteur  
Département de mathématiques

# SOMMAIRE

Les algèbres de cordes et les algèbres bisérielles spéciales ont été le sujet d'étude de plusieurs articles depuis leur définition, entre autres parce qu'elles offrent l'intérêt d'avoir des modules indécomposables facilement calculables, et, pour les algèbres de cordes, des composantes du carquois d'Auslander-Reiten facilement classifiables.

Nous définissons un nouveau type de marche dans le carquois ordinaire d'une algèbre de cordes, que nous appelons le double zéro enlacé, et en déduisons un critère permettant de déterminer s'il s'agit d'une algèbre de type laura ou non. Nous généralisons ensuite ce résultat aux algèbres bisérielles spéciales. Nous obtenons conséquemment quelques résultats sur la structure d'algèbres bisérielles spéciales de type laura et démontrons pour ces algèbres une conjecture due à Skowroński voulant qu'une algèbre soit de type laura si et seulement si elle a un nombre fini de modules indécomposables de dimension projective et injective plus grande ou égale à deux.

Nous considérerons tout au long de cette thèse certaines connaissances comme étant acquises par le lecteur, essentiellement contenues dans les cours suivis par les étudiants des cycles supérieurs du groupe de théorie des représentations des algèbres à l'Université de Sherbrooke, le lecteur pourra rafraîchir ces notions en consultant [6]

# REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier premièrement mon directeur, Ibrahim Assem, pour la formation mathématique exemplaire qu'il m'a donnée, mais aussi pour m'avoir appuyée tout au long des quatre années de mon doctorat. Sa vision des mathématiques a profondément influencé la mienne, et je lui en suis reconnaissante. Des remerciements chaleureux à David Smith pour sa collaboration sans faille et son humour unique qui ont su ajouter beaucoup de plaisir à mon doctorat, à Jennifer Bélanger pour m'avoir posé des questions si pertinentes, à tout le groupe de recherche de théorie des représentations des algèbres pour leurs commentaires et suggestions mais surtout pour leur amitié qui m'a permis de devenir une mathématicienne et une personne accomplie ainsi qu'aux membres du jury pour leurs suggestions judicieuses. Merci à Marcelo Lanzilotta et François Huard avec qui j'ai travaillé lors de mon stage en Uruguay pour avoir entretenu chez moi cet intérêt envers mon sujet. J'aimerais aussi remercier l'ISM, l'Université de Sherbrooke et le Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke pour leur soutien financier. Je tiens à tirer bien bas mon chapeau à mon père et à ma mère, qui ont été des modèles irréprochables et surtout tellement humains, à mon frère, à ma soeur et à mes amis, pour leur support constant et leur amour. Finalement, je ne pourrais passer sous silence l'apport de mon conjoint, Sylvain, qui a su me soutenir lors des derniers milles de la rédaction, et celui de mon fils, qui m'a forcée par sa venue à mettre un point final à ce projet de thèse.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>SOMMAIRE</b>	<b>ii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>iii</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 — Rappels</b>	<b>4</b>
1.1 Carquois liés . . . . .	6
1.2 Catégorie de modules . . . . .	8
1.2.1 Représentations . . . . .	8
1.2.2 Carquois d'Auslander-Reiten . . . . .	10
1.3 Algèbres inclinées, quasi-inclinées et de type laura . . . . .	13
1.4 Algèbres de cordes . . . . .	18
<b>CHAPITRE 2 — Algèbres de cordes sans DOZE</b>	<b>25</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	25

2.2	Algèbres de cordes sans DOZE quasi-inclinées . . . . .	30
2.3	Algèbres de cordes sans DOZE de type laura . . . . .	34
2.3.1	Cycles sur une algèbre de cordes sans DOZE . . . . .	34
2.3.2	Catégorie de modules . . . . .	43
2.3.3	Algèbres de type laura . . . . .	51
<b>CHAPITRE 3 — Algèbres de corde de type laura</b>		<b>54</b>
3.1	Modules de corde DOZÉS . . . . .	54
3.2	Algèbres bisérielles spéciales de type laura et conjecture de Skowroński .	58
3.3	Exemples . . . . .	61
3.3.1	Algèbres de type laura . . . . .	61
3.3.2	Algèbres n'étant pas de type laura . . . . .	62
3.3.3	Algèbres n'étant pas de cordes . . . . .	63
<b>CONCLUSION</b>		<b>65</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>69</b>

# INTRODUCTION

Soit  $R$  une  $k$ -algèbre de dimension finie sur  $k$  un corps algébriquement clos. Elle est bisérielle si le radical de tout  $R$ -projectif (à droite ou à gauche) indécomposable est la somme de deux modules unisériels dont l'intersection est simple ou est nulle [14]. En 1983, Skowroński et Waschbüsch caractérisent les algèbres bisérielles de représentation finie par le nombre maximal de termes médians non projectifs contenus dans les suites presque scindées de modules sur ces algèbres (ce nombre étant égal ou inférieur à deux) [28]. Cette caractérisation a donné naissance aux algèbres bisérielles spéciales, qui sont définies dans le même article par des critères sur leur carquois ordinaire.

Les algèbres bisérielles spéciales dont le nombre total maximal de termes médians est au plus deux sont appelées algèbres de cordes et ont été définies formellement par Butler et Ringel en 1987 ([11]). Avant eux, Wald et Waschbüsch développaient une méthode permettant de calculer le carquois d'Auslander-Reiten de cette sous-classe des algèbres bisérielles spéciales ([29]).

Ces deux classes présentent plusieurs propriétés intéressantes, dont celle d'avoir des modules indécomposables facilement calculables (voir les travaux de Krause [22] et Crawley-Boevey [12] sur les modules de bande), d'être dociles (voir les travaux de Crawley-Boevey [13] sur les algèbres bisérielles) et, pour les algèbres de cordes, d'avoir des composantes du carquois d'Auslander-Reiten facilement classifiables (dans [11] on montre que les compo-



santes régulières ne peuvent prendre que certaines formes prédéterminées). Mentionnons de plus les travaux de Schröer sur le radical infini des algèbres bisérielles spéciales ([25]). On a de plus déjà obtenu des résultats caractérisant les algèbres de cordes de représentation finie ([11]), inclinées ([21]), quasi-inclinées ([20]) et de petite dimension homologique ([9]).

Les algèbres de type laura ont été définies indépendamment par Assem et Coelho ([3]) et Skowroński ([27]) en 2003. Il s'agit d'une généralisation des algèbres inclinées (introduites par Happel et Ringel en 1982 [19]) quant à la position des modules projectifs et injectifs dans le carquois d'Auslander-Reiten (les algèbres inclinées admettent toujours une tranche complète, ce qui correspond au fait qu'aucun projectif ne se trouve à droite des injectifs dans le carquois d'Auslander-Reiten, les algèbres de type laura sont celles dont les projectifs ne sont pas trop à droite des injectifs). Skowroński a conjecturé en 2003 qu'elles sont aussi une généralisation de ces dernières en ce qui a trait à la dimension homologique, c'est-à-dire qu'une algèbre  $R$  est laura si et seulement si le nombre des modules indécomposables de dimension projective et injective plus grande ou égale à deux sur  $R$  est fini (une algèbre inclinée n'en admet aucun, puisqu'elle est quasi-inclinée).

Notre objectif est de caractériser les algèbres de cordes de type laura et de démontrer la conjecture de Skowroński pour ces algèbres. Pour ce faire, nous définirons dans le Chapitre 2 la notion de double zéro enlacé et démontrerons que les algèbres de cordes n'en contenant aucun peuvent être divisées en trois classes, qui sont toutes des algèbres de type laura. Cette classification nous mènera à un résultat corollaire :

**Corollaire 0.0.1** *Soit  $R = kQ/I$  une algèbre de cordes qui n'admet pas de double zéro enlacé. Alors  $R$  est laura et si elle n'est pas quasi-inclinée, ses algèbres extrêmes à gauche et à droite sont inclinées de type  $\tilde{A}_n$ . Conséquemment, toute algèbre de cordes non quasi-inclinée ne contenant pas de double zéro enlacé est domestique.*

Dans le chapitre 3, nous construirons une famille infinie de modules de dimension projective et injective plus grande ou égale à deux pour les algèbres contenant un double zéro enlacé. Plus précisément nous démontrerons le résultat suivant :

**Théorème 0.0.2** *Soit  $R = kQ/I$  une algèbre de cordes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) *Il n'existe aucun double zéro enlacé sur  $(Q, I)$  ;*
- b)  *$R = kQ/I$  est de type laura ;*
- c)  *$R$  admet seulement un nombre fini de modules ayant une dimension projective et une dimension injective plus grande ou égale à 2.*

Les résultats caractérisant les algèbres de cordes de représentation finie, inclinées et quasi-inclinées ont été généralisés aux algèbres bisérielles spéciales. Nous démontrons donc le résultat suivant :

**Théorème 0.0.3** *Soient  $R = kQ/I$  une algèbre bisérielle spéciale et  $J$  l'idéal engendré par tous les chemins apparaissant dans une relation binomiale minimale de  $I$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  *$R = kQ/I$  est de type laura ;*
- b)  *$R/J$  est de type laura ;*
- c) *Il n'existe aucun double zéro enlacé sur  $(Q, I)$  ;*
- d)  *$R$  admet seulement un nombre fini de modules indécomposables ayant une dimension projective et une dimension injective plus grande ou égale à 2.*

Nous terminons en présentant quelques exemples d'algèbres pour lesquelles il est maintenant facile de déterminer s'il s'agit d'algèbres de type laura ou non.

# CHAPITRE 1

## Rappels

Tout au cours de ce chapitre, les notions nécessaires à la compréhension des résultats de ma thèse seront présentés. Comme nous ne pouvons prétendre à une revue exhaustive, nous référons le lecteur à [6], [8] et à [1] pour plus de détails.

Mentionnons tout d'abord que toutes les algèbres étudiées dans cette thèse sont des  $k$ -algèbres associatives, de dimension finie sur un corps algébriquement clos  $k$ , connexes et sobres, de manière à ce qu'il existe un carquois  $Q$  et un idéal admissible  $I$  de  $kQ$  tels que  $A = kQ/I$  (voir 1.1). Tous les  $A$ -modules seront objets de la catégorie  $\text{mod}A$  des  $A$ -modules à droite de type fini. On s'intéressera tout particulièrement aux modules indécomposables. Soit  $\text{ind}A$  une sous-catégorie pleine de  $\text{mod}A$  dont la classe d'objets est formée d'exactly un représentant de chaque classe d'isomorphisme de  $A$ -modules indécomposables. On définit de même  $\text{proj}A$  et  $\text{inj}A$ , les sous-catégories pleines de  $\text{ind}A$  contenant respectivement les modules projectifs de  $\text{ind}A$  et les modules injectifs de  $\text{ind}A$ .

Nous divisons les rappels en quatre sections : nous effectuons d'abord un bref rappel sur les carquois liés, nous abordons ensuite les notions liées à la catégorie des modules, nous rappelons quelques caractéristiques et résultats sur certaines classes d'algèbres nous

intéressant puis nous terminons en présentant la notion d'algèbre de cordes, sur laquelle porte l'essentiel de notre travail. Certaines notions pouvant être assimilées à des rappels seront plutôt présentées à même le corps de ce travail (comme par exemple la définition d'algèbre bisérielle spéciale), de manière à permettre un développement logique de la théorie.

## 1.1 Carquois liés

Nous présentons dans cette section un bref survol des notions relatives aux carquois liés. Cette notion est centrale dans la définition d'algèbre de cordes et nous nous permettons donc d'insister particulièrement sur cette section.

**Définition 1.1.1** *Un carquois est un quadruplet  $Q = (Q_0, Q_1, s : Q_1 \rightarrow Q_0, t : Q_1 \rightarrow Q_0)$  constitué de deux ensembles, à savoir  $Q_0$ , appelé l'ensemble des points, et  $Q_1$ , appelé l'ensemble des flèches, et de deux applications  $s : Q_1 \rightarrow Q_0$  et  $t : Q_1 \rightarrow Q_0$  associant à chaque flèche  $\alpha$  un point (respectivement appelés source et but de  $\alpha$ ).*

Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, on écrira seulement  $Q$ . Si  $Q_0$  et  $Q_1$  sont des ensembles finis, on dira que  $Q$  est un carquois fini. Si le graphe sous-jacent de  $Q = (Q_0, Q_1, s : Q_1 \rightarrow Q_0, t : Q_1 \rightarrow Q_0)$  est connexe, on dira que  $Q$  est connexe. Pour chacune des flèches  $\alpha$  de  $Q$ , on définira l'inverse formel  $\alpha^{-1}$  de cette flèche comme étant une nouvelle flèche telle que  $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$  et  $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ .

**Définition 1.1.2** *Soit  $Q$  un carquois. Un chemin  $\lambda$  de longueur  $n \geq 1$  de source  $a = s(\lambda)$  et de but  $b = t(\lambda)$  (on dira que  $\lambda$  est un chemin de  $a$  vers  $b$ ) est une suite de flèches  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  telle que  $s(\alpha_1) = a$  et  $t(\alpha_n) = b$ , et telle que  $s(\alpha_k) = t(\alpha_{k-1})$  pour  $k = 2, \dots, n$ . De façon plus concise, on notera ce chemin  $\lambda = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ . On définit pour chaque point  $x$  de  $Q_0$  un chemin stationnaire  $\varepsilon_x$  de longueur nulle.*

**Définition 1.1.3** *Soit  $Q$  un carquois. Une marche  $\omega = \alpha_1^{\varepsilon_1} \alpha_2^{\varepsilon_2} \dots \alpha_n^{\varepsilon_n}$  est une suite de flèches et d'inverses formels de flèches  $\alpha_1^{\varepsilon_1}, \alpha_2^{\varepsilon_2}, \dots, \alpha_i^{\varepsilon_i}, \dots, \alpha_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}, \alpha_n^{\varepsilon_n}$  avec  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  telle que  $s(\alpha_k^{\varepsilon_k}) = t(\alpha_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}})$  pour  $k = 2, \dots, n$ . On dira que la marche  $\omega = \alpha_1^{\varepsilon_1} \alpha_2^{\varepsilon_2} \dots \alpha_n^{\varepsilon_n}$  contient la sous-marche  $\omega'$  s'il existe un  $i$  et un  $j$  entiers avec  $1 \leq i \leq j \leq n$  tels que  $\omega' = \alpha_i^{\varepsilon_i} \alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \dots \alpha_j^{\varepsilon_j}$ .*

La multiplication de deux chemins  $\lambda = \alpha_1 \dots \alpha_n$  et  $\kappa = \beta_1 \dots \beta_m$  d'un carquois  $Q$  se définira comme suit : si  $t(\alpha_n) = s(\beta_1)$ , alors  $\lambda \cdot \kappa = \alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m$ . Sinon,  $\lambda \cdot \kappa = 0$ .

**Définition 1.1.4** *L'algèbre de chemins  $kQ$  d'un carquois  $Q$  est la  $k$ -algèbre formée par l'espace vectoriel ayant pour base la famille des chemins de  $Q$ , munis de la multiplication définie plus haut prolongée par distributivité. Remarquons que l'élément neutre de cette algèbre est la somme des chemins triviaux.*

On peut définir d'autres algèbres en factorisant l'algèbre de chemins  $kQ$  par un idéal  $I$ . Soit  $J$  l'idéal engendré par les flèches de  $Q$ , un idéal  $I$  est admissible s'il existe un  $n \geq 2$  tel que  $J^n \subseteq I \subseteq J^2$ . Si  $A \cong kQ/I$ , on dit que  $(Q, I)$  est une présentation de  $A$ . Mentionnons que selon Gabriel ([15]), toutes les algèbres de cette thèse admettent une telle présentation, et que pour une algèbre donnée, le carquois de sa présentation est uniquement déterminé. En considérant sa présentation,  $A$  peut donc aussi être considérée comme une catégorie dont les objets sont les points de  $Q$  et telle que l'ensemble des morphismes  $A(x, y)$  de  $x$  vers  $y$  est l'ensemble des combinaisons linéaires de chemins de  $x$  vers  $y$  factorisé par l'ensemble des éléments de l'idéal  $I$  qui sont des combinaisons linéaires allant de  $x$  vers  $y$ , c'est-à-dire que  $A(x, y) = kQ(x, y)/kQ(x, y) \cap I$ . On notera aussi  $A$  la catégorie ainsi définie.

## 1.2 Catégorie de modules

### 1.2.1 Représentations

Soit  $R$  une algèbre. La catégorie des  $R$ -modules à droite est notée  $\text{Mod}R$ . La catégorie des  $R$ -modules à droite de type fini est notée  $\text{mod}R$ .

**Définition 1.2.1** [15] *Soit  $Q$  un carquois fini. Une représentation  $M$  de  $Q$  est définie par la donnée suivante :*

- (a) *À chaque point  $a$  de  $Q_0$  est associé un  $k$ -espace vectoriel  $M(a)$*
- (b) *À chaque flèche  $\alpha : a \rightarrow b$  de  $Q_1$  est associée une application  $k$ -linéaire  $M(\alpha) : M(b) \rightarrow M(a)$ .*

Les représentations d'un carquois (munies des morphismes adéquats) forment en fait une catégorie, notée  $\text{Rep}(Q)$ . Soit  $I$  un idéal admissible sur  $kQ$ . Les représentations dont les applications linéaires sont compatibles avec l'idéal  $I$  forment aussi une catégorie, notée  $\text{Rep}(Q, I)$ .

**Théorème 1.2.2** [6] *Soit  $R = kQ/I$  avec  $Q$  un carquois fini, et  $I$  un idéal admissible de  $kQ$ . Il existe une équivalence entre les catégories  $\text{Mod}R$  et  $\text{Rep}(Q, I)$ .*

Soit  $\text{rep}(Q, I)$  la catégorie des représentations de dimension finie, c'est-à-dire que chacun des espaces vectoriels associés aux points du carquois est de dimension finie. L'équivalence de 1.2.2 peut se restreindre à une équivalence entre  $\text{mod}R$  et  $\text{rep}(Q, I)$ .

On parlera dès maintenant indifféremment d'un module  $M$  et de sa représentation sur  $(Q, I)$ . Les notations  $M(x)$  et  $M(\alpha)$  désignent respectivement l'espace vectoriel associé au point  $x$  et l'application linéaire associée à la flèche  $\alpha$  dans la représentation  $M$ .

**Définition 1.2.3** Soit  $P$  un module. On dit que  $P$  est  $R$ -projectif si pour tout épimorphisme  $f : M \rightarrow N$  et pour un morphisme  $g$  allant de  $P$  vers  $N$  il existe un  $g'$  allant de  $P$  vers  $M$  avec  $fg' = g$ . On définit dualement les modules injectifs.

La connaissance des modules projectifs et injectifs est centrale en théorie des représentations. Le lecteur pourra trouver leurs diverses propriétés dans les ouvrages référés au début de ce chapitre. Mentionnons tout de même que les facteurs directs indécomposables de  $R$  composent l'ensemble des  $R$ -projectifs indécomposables.

Pour tout module  $M$ , on peut trouver un module projectif  $P$  et un épimorphisme  $f$  allant de  $P$  vers  $M$ . En répétant sur le noyau de  $f$  ce processus, on obtient une suite exacte longue, appelée résolution projective :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{f_2} & P_1 & \xrightarrow{f_1} & P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \\ & & \searrow & \nearrow \text{ker } f_2 & \searrow & \nearrow \text{ker } f_1 & \searrow & \nearrow \text{ker } f_0 \\ & & L_2 & & L_1 & & L_0 & \end{array}$$

On dira qu'elle est de longueur  $n$  si le dernier terme non nul est  $P_n$ . Si elle n'admet pas de dernier terme non nul, on dira qu'elle est de longueur infinie. La dimension projective de  $M$ , notée  $\text{dp}M$ , est égale au plus petit  $n$ , s'il existe, tel qu'il existe une résolution projective de longueur  $n$  terminant en  $M$ . Sinon la dimension projective de  $M$  est  $\infty$ . On définit dualement la dimension injective. La dimension globale de l'algèbre  $R$  est le maximum des dimensions projectives des  $R$ -modules indécomposables.

Nous terminons cette sous-section avec une dernière définition.

**Définition 1.2.4** Un  $R$ -module  $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$ , avec  $T_i$  indécomposable et  $T_i \not\cong T_j$  si  $i \neq j$ , est inclinant s'il satisfait aux trois conditions suivantes :

1.  $\text{dp}T \leq 1$  ;
2.  $\text{Ext}_R^1(T, T) = 0$  ;
3.  $n = |Q_0|$  où  $Q$  est le carquois ordinaire de  $R$ .



## 1.2.2 Carquois d'Auslander-Reiten

On définit  $J$  l'idéal de  $R = kQ/I$  engendré par les flèches de  $Q$ , appelé le radical de  $R$ . Un morphisme  $f : M \rightarrow N$  est irréductible si pour tous morphismes  $g : M \rightarrow X$  et  $h : X \rightarrow N$  tels que  $f = hg$ ,  $h$  est une rétraction ou  $g$  est une section, on notera  $\text{Irr}(M, N)$  le  $k$ -espace vectoriel formé des morphismes irréductibles allant de  $M$  vers  $N$ . On sait que tout module de type fini est une somme directe finie de modules indécomposables et que tout morphisme se trouvant dans une puissance finie du radical de  $\text{mod}A$  est la somme d'un morphisme de radical supérieur et de compositions de morphismes irréductibles, c'est-à-dire que si  $f \in \text{rad}^n \text{mod}A$ , alors il existe un morphisme  $g \in \text{rad}^{n+1} \text{mod}A$  tel que  $f - g$  est une combinaison de morphismes irréductibles (voir la proposition 7.4 du chapitre V de [8]). L'idée qui sous-tend la théorie du carquois d'Auslander-Reiten est de s'attarder simplement aux objets indécomposables et aux morphismes irréductibles. Commençons par exposer quelques notions préalables, définies par Bongartz et Gabriel dans [10] et adaptées par Ringel dans [24] :

**Définition 1.2.5** *Soit  $\Gamma$  un carquois non nécessairement fini. Une translation  $\tau$  est une bijection de  $\Gamma'_0$  vers  $\Gamma''_0$  où  $\Gamma'_0$  et  $\Gamma''_0$  sont des sous-ensembles de  $\Gamma_0$ .*

**Définition 1.2.6** *Soient  $\Gamma$  un carquois non nécessairement fini et  $\tau$  une translation. La paire  $(\Gamma, \tau)$  est appelée un carquois à translation si elle vérifie les conditions suivantes :*

1.  $\Gamma$  n'admet pas de flèche  $\alpha$  telle que  $s(\alpha) = b(\alpha)$  ;
2. Si  $x \in \Gamma'_0$ , il existe une bijection entre l'ensemble des flèches  $\alpha : y \rightarrow x$  et l'ensemble des flèches  $\beta : \tau x \rightarrow y$  et ces ensembles sont finis.

Nous avons besoin de définir quelques notions avant de passer à celle de carquois d'Auslander-Reiten.

Nous caractérisons ici les suites presque scindées, dont le lecteur pourra trouver la définition dans [6].

**Définition 1.2.7** *Soit*

$$\epsilon \quad 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

*une suite exacte courte. On dira que  $\epsilon$  est presque scindée si et seulement si les modules  $M$  et  $N$  sont indécomposables et les morphismes  $f$  et  $g$  sont irréductibles.*

**Notations 1.2.8** *On notera  $\Gamma'_0$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des  $A$ -modules indécomposables non projectifs et  $\Gamma''_0$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des  $A$ -modules indécomposables non injectifs.*

Pour la définition exacte de la translation  $\tau_A$ , nous renvoyons le lecteur à [6].

**Proposition 1.2.9** *L'application  $\tau_A : \Gamma'_0 \rightarrow \Gamma''_0$  envoie la classe d'isomorphisme  $[M]$  de  $M$  sur la classe d'isomorphisme  $[N]$  de  $N$  si, et seulement si, il existe une suite presque scindée commençant en  $N$  et se terminant en  $M$ .*

**Démonstration :** Selon Assem, Simson et Skowroński [6] Théorème 3.1 du chapitre III.  $\square$

**Définition 1.2.10** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre sobre, connexe et de  $k$ -dimension finie. Le carquois d'Auslander-Reiten  $\Gamma(\text{mod}A)$  de l'algèbre  $A$  est défini comme suit :*

1. *les points de  $\Gamma(\text{mod}A)$  sont les classes d'isomorphisme  $[M]$  des  $A$ -modules indécomposables ;*

2. Soient  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules indécomposables. Les flèches allant de  $[M]$  vers  $[N]$  dans  $\Gamma(\text{mod}A)$  sont en correspondance bijective avec les vecteurs d'une base du  $k$ -espace vectoriel  $\text{Irr}(M, N)$ .

**Proposition 1.2.11** Soit  $\Gamma(\text{mod}A)$  le carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre  $A$  et  $\tau_A$  la translation d'Auslander-Reiten associée. Alors  $(\Gamma(\text{mod}A), \tau_A)$  est un carquois à translation.

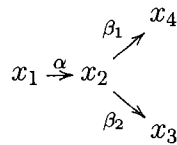
**Démonstration :** Selon Assem, Simson et Skowroński [6] p.22 du chapitre III, où  $\tau_A$  coïncide avec la translation d'Auslander-Reiten.  $\square$

### 1.3 Algèbres inclinées, quasi-inclinées et de type laura

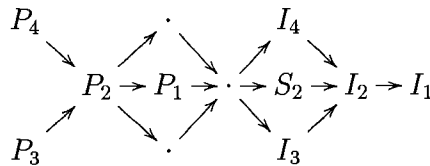
Dans cette section, nous rappelons plusieurs définitions caractérisant une algèbre selon certaines de ses propriétés homologiques. Ces définitions nous mèneront à la définition d'algèbre de type laura. De plus, elles tirent leur intérêt du fait qu'elles ont déjà donné lieu à d'intéressants théorèmes au sujet des algèbres de cordes. Nous nous servons de la connaissance que nous avons de ces algèbres tout au cours de cette thèse. Commençons par les définitions.

**Définition 1.3.1** Une algèbre  $R$  est de représentation finie si elle a seulement un nombre fini de classes d'isomorphisme de modules indécomposables de type fini.

**Exemple 1.3.2** Soit  $H = kQ'$  où  $Q'$  est :



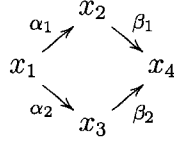
Alors  $H$  est de représentation finie puisque son carquois d'Auslander-Reiten est donné par :



Les algèbres inclinées ont été introduites par Happel et Ringel en 1980, voir [19].

**Définition 1.3.3** Une algèbre  $R$  est inclinée s'il existe une algèbre héréditaire  $H$  et un  $H$ -module inclinant  $T$  tels que  $R = \text{End}_H(T)$ .

**Exemple 1.3.4** Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est :



et  $I$  est engendré par  $\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$ . Alors  $R$  est inclinée. Effectivement, soit l'algèbre héréditaire  $H = kQ'$  donnée à l'exemple précédent. Alors  $P_1 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_1$  est un module inclinant et son algèbre d'endomorphisme est isomorphe à  $A$ .

Les algèbres inclinées furent généralisées par Happel, Reiten et Smalø en 1996, voir [18]. Soit une catégorie abélienne  $k$ -linéaire  $\mathcal{H}$  telle que, pour tous  $X, Y \in \mathcal{H}_0$ , on a que  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(X, Y)$  est de  $k$ -dimension finie. On dira qu'elle est héréditaire si  $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(M, N) = 0$  pour tous  $M$  et  $N$  objets de  $\mathcal{H}$ . Un objet  $T$  d'une catégorie héréditaire  $\mathcal{H}$  est dit inclinant si  $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T, T) = 0$  et, si  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(T, X) = 0 = \text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T, X)$ , alors  $X = 0$ .

**Définition 1.3.5** Une algèbre est quasi-inclinée s'il existe une catégorie abélienne héréditaire  $\mathcal{H}$  et un  $\mathcal{H}$ -objet inclinant  $T$  tels que  $R = \text{End}_{\mathcal{H}}(T)$ .

Ou de manière équivalente :

**Proposition 1.3.6** [18](II.2.3) Une algèbre est quasi-inclinée si et seulement si sa dimension globale est égale ou inférieure à 2 et, pour tout module indécomposable  $M$ , la dimension injective de  $M$  ou la dimension projective de  $M$  est inférieure à 2.

Toute algèbre inclinée est quasi-inclinée. Par contre, il existe des algèbres de représentation finie n'étant pas quasi-inclinées.

**Exemple 1.3.7** Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est :

$$x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2 \xrightarrow{\beta} x_3 \xrightarrow{\gamma} x_4$$

et  $I$  est engendré par  $\alpha\beta$  et  $\beta\gamma$ . Alors  $R$  n'est pas quasi-inclinée puisque  $S_1$  a une dimension projective égale à 3.

Nous définissons maintenant notre dernière classes d'algèbres, les algèbres de type laura, introduites simultanément par Assem et Coelho d'un côté ([3]), et Skowroński de l'autre ([27]).

Un chemin de  $L$  vers  $M$  est la donnée de  $n$ , un entier, et d'une suite de morphismes non-nuls  $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ , avec  $i$  allant de 0 à  $n$ ,  $X_0 = M$  et  $X_{n+1} = N$ .

On dira que  $M$  est un successeur de  $L$ , ou que  $L$  est un prédecesseur de  $M$  dans  $\text{mod}R$ , s'il existe un chemin allant de  $L$  vers  $M$ . On utilisera dans ce cas la notation  $L \rightsquigarrow M$ .

Un chemin de morphismes allant de  $L$  vers  $M$  est dit sectionnellement raffnable s'il existe des morphismes irréductibles  $g_{1,1}, \dots, g_{1,m_1}, \dots, g_{n,1}, \dots, g_{n,m_n}$  tels que  $f_i = g_{i,1} \cdot \dots \cdot g_{i,m_i}$  et si tout tel chemin est sectionnel, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun  $k$  tel que  $X_k = \tau X_{k+2}$ .

**Définition 1.3.8** Soit une algèbre  $A$ , sa partie de gauche est la sous-catégorie pleine de  $\text{ind} A$  définie comme suit :

$$\mathcal{L}_A = \{M \in \text{ind}A \mid \text{pour tout } L \rightsquigarrow M, \text{ dp}L \leq 1\}$$

Sa partie de droite est définie dualement et notée  $\mathcal{R}_A$ .

Nous rappelons les propositions suivantes qui nous seront utiles pour la suite.

**Proposition 1.3.9** [6] *Un module indécomposable  $M$  est de dimension projective plus grande ou égale à deux si et seulement s'il existe un injectif  $I$  et un morphisme non nul allant de  $I$  vers  $\tau M$*

Ceci nous apprend qu'un module indécomposable non projectif  $M$  est dans la partie de gauche de  $A$  si et seulement si  $\tau M$  n'admet pas de prédecesseur injectif.

**Proposition 1.3.10**  *$M$  appartient à  $\mathcal{L}_A$  s'il est tel que s'il existe un chemin d'un module injectif indécomposable vers  $M$  dans  $\text{ind}A$ , alors ce chemin est raffnable sectionnellement.*

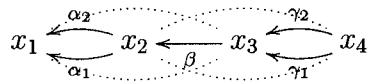
**Définition 1.3.11** *Une algèbre  $A$  est dite de type laura si  $\text{ind}A \setminus (\mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A)$  est un ensemble fini.*

La proposition suivante découle directement des propositions et définitions énoncées plus haut.

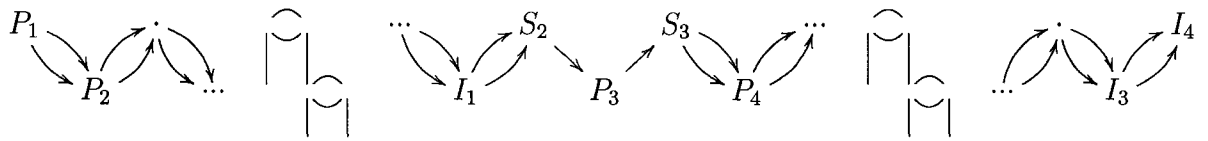
**Proposition 1.3.12** [4] *Une algèbre  $A$  est de type laura si et seulement s'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de modules indécomposables pouvant se trouver sur un chemin allant d'un injectif vers un projectif.*

Si une algèbre est quasi-inclinée, inclinée ou de représentation finie, elle est a fortiori de type laura.

**Exemple 1.3.13** *Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est :*



Avec l'idéal engendré par les chemins de longueur 2. Le carquois d'Auslander-Reiten est donné par :



Le premier injectif apparaissant est  $I_1$  et le dernier projectif est  $P_4$ . On a donc que les seuls modules se trouvant sur un chemin d'un injectif vers un projectif sont  $I_1, S_2, P_3, S_3$  et  $P_4$ . L'algèbre est donc de type laura.



## 1.4 Algèbres de cordes

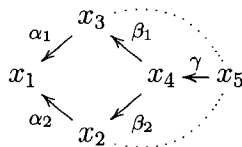
**Définition 1.4.1** Soit  $Q$  un carquois, une relation  $\rho$  de  $Q$  est une combinaison linéaire à coefficients dans  $k$  de  $m$  chemins de longueur au moins 2 ayant tous le même but et la même source. Si  $m = 1$ , la relation est dite monomiale, ou encore relation zéro. Si  $m = 2$ , la relation est dite binomiale.

**Définition 1.4.2 (Butler-Ringel [11])**  $R = kQ/I$  est une algèbre de cordes si :

1.  $I$  est monomial, c'est à dire qu'il existe un ensemble de relations monomiales engendrant  $I$  ;
2. Tout point admet au plus deux flèches entrantes et deux flèches sortantes ;
3. Toute flèche  $\alpha : x \rightarrow y$  admet au plus une flèche  $\beta : y \rightarrow z$  telle que  $\alpha\beta$  n'est pas un élément de  $I$  et au plus une flèche  $\gamma : z \rightarrow x$  telle que  $\gamma\alpha$  n'est pas un élément de  $I$ .

Si de plus, toute flèche  $\alpha : x \rightarrow y$  admet au plus une flèche  $\beta : y \rightarrow z$  telle que  $\alpha\beta$  est un élément de  $I$  et au plus une flèche  $\gamma : z \rightarrow x$  telle que  $\gamma\alpha$  est un élément de  $I$ , on dira que l'algèbre est aimable (cette définition sera utile dans la section 2.3)

**Exemple 1.4.3** Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est :



avec  $I$  l'idéal engendré par  $\gamma\beta_1$  et  $\gamma\beta_2$ . Alors  $R$  est une algèbre de cordes qui n'est pas aimable.

Pour la suite de cette thèse, on fixe un ensemble de plus petite cardinalité de relations monomiales engendrant  $I$ .

Lorsqu'on utilisera le terme cycle, on entendra un cycle non nécessairement orienté c'est-à-dire une marche non triviale dont le but et la source coïncident. Nous avons premièrement besoin de quelques définitions sur les marches.

**Définition 1.4.4** *On dira qu'une marche est réduite si elle ne contient aucune sous marche d'une des formes  $\alpha\alpha^{-1}$  ou  $\alpha^{-1}\alpha$ .*

**Définition 1.4.5** *Soit une marche  $\omega$  contenant deux chemins  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . On dira que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  pointent dans la même direction s'il existe des marches  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  et  $\omega_4$  telles que  $\omega = \omega_1\rho_1\omega_2$  et  $\omega = \omega_3\rho_2\omega_4$  ou  $\omega = \omega_1\rho_1^{-1}\omega_2$  et  $\omega = \omega_3\rho_2^{-1}\omega_4$ .*

On suppose maintenant que l'algèbre  $R$  est de cordes.

**Définition 1.4.6** *Une marche  $\omega$  est une corde si elle est réduite et ne contient aucune relation. Le module admettant une copie du corps  $k$  à  $x$  pour chaque passage de  $\omega$  en  $x$  et dont les morphismes sont calculés conséquemment est le module de corde sur  $\omega$ , noté  $M(\omega)$ , c'est-à-dire que :*

$M(\omega)(x) = k^n$  avec  $n$  le nombre de passages de  $\omega$  en  $x$

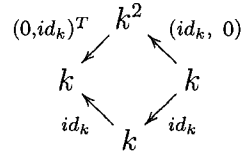
$$M(\omega)(\alpha : x \rightarrow y) = \begin{pmatrix} m_{(1,1)} & m_{(1,2)} & \dots & m_{(1,l)} \\ m_{(2,1)} & m_{(2,2)} & \dots & m_{(2,l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{(n,1)} & m_{(n,2)} & \dots & m_{(n,l)} \end{pmatrix}$$

avec  $n$  le nombre de passages de  $\omega$  en  $x$ ,  $l$  le nombre de passages de  $\omega$  en  $y$  et

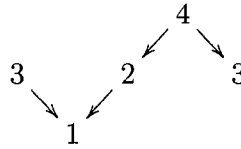
$m_{(i,j)} = id_k$  si  $\omega = \omega'\alpha\omega''$  et que  $\omega'\alpha$  passe exactement  $i$  fois en  $x$  et  $j$  fois en  $y$  ou  $\omega = \omega'\alpha^{-1}\omega''$  et que  $\omega'\alpha^{-1}$  passe exactement  $j$  fois en  $x$  et  $i$  fois en  $y$ ,

$m_{(i,j)} = 0$  sinon.

**Exemple 1.4.7** Dans l'exemple 1.4.3, la marche  $\alpha_1 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \beta_1$  est une corde et le module correspondant est :



Afin que le concept de module de corde soit le plus clair possible pour le lecteur, nous le noterons plutôt :



**Définition 1.4.8** Une marche  $\omega$  est une bande si elle est une corde cyclique qui n'est pas la puissance d'une corde cyclique de longueur inférieure et s'il n'existe aucun entier  $n$  tel que  $\omega^n$  est un élément de  $I$ . Le module admettant un espace vectoriel  $V$  à  $x_i$  si  $\omega$  passe par  $x_i$  et dont les morphismes sont calculés conséquemment (sauf pour la dernière flèche du cycle, sur laquelle on peut prendre n'importe quel automorphisme de  $V$ ) est un module de bande sur  $\omega$ , noté  $B(\omega)$  c'est-à-dire que, si  $\omega = \eta\beta$  :

$B(\omega)(x) = V^n$  avec  $n$  le nombre de passages de  $\eta$  en  $x$

$$B(\omega)(\alpha : x \rightarrow y) = \begin{pmatrix} m_{(1,1)} & m_{(1,2)} & \dots & m_{(1,l)} \\ m_{(2,1)} & m_{(2,2)} & \dots & m_{(2,l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{(n,1)} & m_{(n,2)} & \dots & m_{(n,l)} \end{pmatrix}$$

avec  $n$  le nombre de passages de  $\eta$  en  $x$ ,  $l$  le nombre de passages de  $\eta$  en  $y$  et

$m_{(i,j)} = id_V$  si  $\eta = \eta'\alpha\eta''$  et que  $\eta'\alpha$  passe exactement  $i$  fois en  $x$  et  $j$  fois en  $y$  et que  $\eta''$  est non triviale, ou si  $\eta = \eta'\alpha^{-1}\eta''$  et que  $\eta'\alpha^{-1}$  passe exactement  $j$  fois en  $x$  et  $i$  fois en  $y$  et que  $\eta''$  est non triviale,

$m_{(i,j)} = f$  si  $\alpha = \beta$ ,  $i = n$  et que  $j = 1$ , avec  $f$  un automorphisme de  $V$

$m_{(i,j)} = 0$  sinon.

et que si  $\omega = \eta\beta^{-1}$  :

$B(\omega)(x) = V^n$  avec  $n$  le nombre de passages de  $\eta$  en  $x$

$$B(\omega)(\alpha : x \rightarrow y) = \begin{pmatrix} m_{(1,1)} & m_{(1,2)} & \dots & m_{(1,l)} \\ m_{(2,1)} & m_{(2,2)} & \dots & m_{(2,l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{(n,1)} & m_{(n,2)} & \dots & m_{(n,l)} \end{pmatrix}$$

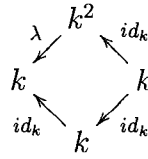
avec  $n$  le nombre de passages de  $\eta$  en  $x$ ,  $l$  le nombre de passages de  $\eta$  en  $y$  et

$m_{(i,j)} = id_V$  si  $\eta = \eta'\alpha\eta''$  et que  $\eta'\alpha$  passe exactement  $i$  fois en  $x$  et  $j$  fois en  $y$  et que  $\eta''$  est non triviale, ou si  $\eta = \eta'\alpha^{-1}\eta''$  et que  $\eta'\alpha^{-1}$  passe exactement  $j$  fois en  $x$  et  $i$  fois en  $y$  et que  $\eta''$  est non triviale,

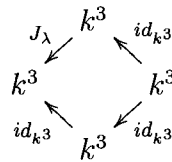
$m_{(i,j)} = f$  si  $\alpha = \beta$ ,  $i = 1$  et que  $j = l$ , avec  $f$  un automorphisme de  $V$

$m_{(i,j)} = 0$  sinon.

**Exemple 1.4.9** Dans l'exemple 1.4.3, le cycle  $\alpha_1\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\beta_1$  est une bande et les modules suivants sont des modules de bande :



où  $\lambda$  désigne la multiplication par le scalaire  $\lambda \in k^*$ , et :



où  $J_\lambda$  désigne la multiplication par la matrice de Jordan de paramètre  $\lambda \in k^*$ .

Ces deux définitions ont un intérêt tout particulier dans le cas des algèbres de cordes parce qu'elles définissent l'ensemble des modules sur  $A$ , comme l'énonce le théorème suivant (Gelfand-Ponomarev [16], Ringel [23], Butler-Ringel [11]) :

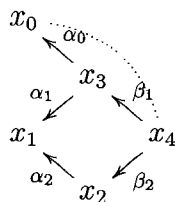
**Théorème 1.4.10** *Tout module indécomposable de type fini sur une algèbre de cordes est un module de corde ou un module de bande. Tout module de corde ou de bande est indécomposable.*

**Corollaire 1.4.11** *Il existe un module indécomposable admettant les points  $x_i$  et  $x_j$  dans son support si et seulement s'il existe une corde de  $x_i$  vers  $x_j$ .*

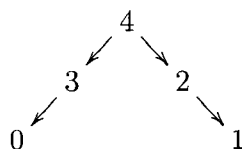
Nous pouvons dire encore plus sur la structure des modules d'une algèbre de cordes.

**Proposition 1.4.12** *Le module projectif indécomposable associé à  $x$ ,  $P_x$ , est un module de corde sur  $v^{-1}u$  avec  $u$  et  $v$  les deux chemins maximaux non contenus dans l'idéal  $I$  commençant en  $x$ . S'il existe un seul chemin maximal  $u$ ,  $P_x$  est le module de corde sur  $u$ .*

**Exemple 1.4.13** *Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est :*



avec  $I$  l'idéal engendré par  $\beta_1\alpha_1$ . Alors  $P_4$  est donné par :



On a la proposition duale de 1.4.12 :

**Proposition 1.4.14** *Le module injectif indécomposable associé à  $x$ ,  $I_x$ , est un module de corde sur  $uv^{-1}$  avec  $u$  et  $v$  les deux chemins maximaux n'étant pas dans l'idéal  $I$  finissant en  $x$ . S'il existe un seul chemin maximal  $u$ ,  $I_x$  est le module de corde sur  $u$ .*

**Définition 1.4.15 ([21]2.2)** *Soit  $\omega$  une marche, on dira que  $\omega$  est un double zéro si :*

1.  $\omega = \rho_1\omega_1\rho_2$  avec  $\rho_1 = \alpha_1\dots\alpha_n$  et  $\rho_2 = \beta_1\dots\beta_m$  des relations zéro et les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (a)  $\rho_1$  et  $\rho_2$  pointent dans la même direction ;
- (b)  $\alpha_2\dots\alpha_n\omega_1\beta_1\dots\beta_{m-1}$  ne contient pas de relation zéro et ;
- (c)  $\omega$  est réduite.

ou

2.  $\omega = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$  avec  $\alpha_1\dots\alpha_i$  et  $\alpha_j\dots\alpha_n$  deux relations zéro telles que  $1 \leq i \leq n-1$  et  $2 \leq j \leq n$ .

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes de classification pour trois des classes d'algèbres vues à la section précédente :

**Théorème 1.4.16 (Butler-Ringel [11])** *Une algèbre de corde est de représentation finie si et seulement si chacun de ses cycles réduits contient une relation zéro. En particulier, dans ce cas, tout module indécomposable est un module de corde.*

Soit  $\Theta$ , une bande sur  $R$ . On dira que  $\alpha$  est une flèche entrante de  $\Theta$  si elle n'est pas sur la bande  $\Theta$ , mais que son but l'est. Dualement,  $\alpha$  est une flèche sortante de  $\Theta$  si elle n'est pas sur la bande  $\Theta$ , mais que sa source l'est.

**Théorème 1.4.17 (Huard-Liu [21])** *Une algèbre de corde est inclinée si et seulement si son carquois lié ne contient pas de double zéro et que toute bande de son carquois n'admet que des flèches entrantes ou que des flèches sortantes.*

**Théorème 1.4.18 (Huard-Liu [21])** *Une algèbre de corde est quasi-inclinée si et seulement si son carquois lié ne contient pas de double zéro.*

# CHAPITRE 2

## Algèbres de cordes sans DOZE

### 2.1 Préliminaires

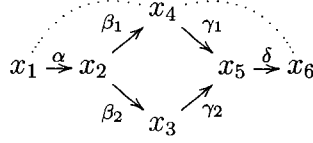
Notre objectif est de classifier les algèbres de cordes de type lura. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques définitions.

**Définition 2.1.1** *Soit  $R \cong kQ/I$  une algèbre de cordes, et soit  $\omega$  un double zéro sur  $Q$ , on dira qu'il forme un double-zéro enlacé, noté DOZE, s'il existe une bande  $\omega_2$  et deux marches  $\omega_1$  et  $\omega_3$  tels que  $\omega = \rho_1\omega_1\omega_2\omega_3\rho_2$*

On remarque que si la condition est satisfaite, alors  $\rho_1\omega_1\omega_2^n\omega_3\rho_2$  est un double zéro pour tout  $n \geq 0$ . Effectivement, dans ce cas  $\omega_2$  ne contient aucune relation et n'est donc pas un cycle orienté (puisque  $R$  est de dimension finie sur  $k$ ) et donc la composition  $\rho_1\omega_1\omega_2^n\omega_3\rho_2$  ne contient aucun nouveau chemin. Or  $\omega_2$  est une bande et donc  $\omega_2^2$  ne contient pas de relation zéro. Ainsi  $\rho_1\omega_1\omega_2^n\omega_3\rho_2$  est un double-zéro.



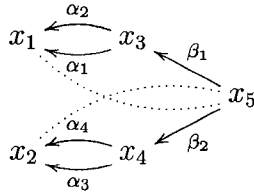
**Exemple 2.1.2** Soit  $R \cong kQ/I$  avec  $Q$  :



et  $I$  engendré par  $\alpha\beta_1$  et  $\gamma_1\delta$ . Alors  $(Q, I)$  contient le DOZE  $\alpha\beta_1\gamma_1\gamma_2^{-1}\beta_2^{-1}\beta_1\gamma_1\delta$ .

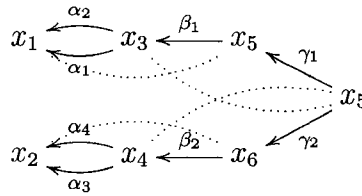
Par contre, si  $I$  est engendré par  $\alpha\beta_1$  et  $\gamma_2\delta$ , alors  $R$  n'admet aucun DOZE.

**Exemple 2.1.3** Soit  $R \cong kQ/I$  avec  $Q$  :



et  $I$  engendré par  $\beta_1\alpha_1$  et  $\beta_2\alpha_4$ . L'algèbre  $R$  contient le DOZE  $\beta_1\alpha_1\alpha_2^{-1}\beta_1^{-1}\beta_2\alpha_4$ .

**Exemple 2.1.4** Soit  $R \cong kQ/I$  avec  $Q$  :



et  $I$  engendré par  $\beta_1\alpha_1$ ,  $\beta_2\alpha_4$ ,  $\gamma_2\beta_2$  et  $\gamma_1\beta_1$ . Alors  $R$  ne contient aucun DOZE, mais deux double-zéros :  $\gamma_1\beta_1\alpha_1$  et  $\gamma_2\beta_2\alpha_4$ .

Notre objectif est d'étudier la structure des algèbres de cordes n'admettant pas de DOZE. Pour le restant de cette thèse et à moins d'avis contraire,  $R$  désignera une algèbre de cordes. On divisera l'étude de ces algèbres en trois cas :

1. Les cas où il n'y a aucune bande ;
2. Les cas où il y a au moins une bande qui a des flèches entrantes et des flèches sortantes ;
3. Les cas où toutes les bandes ont seulement des flèches entrantes ou seulement des flèches sortantes ;

Le premier cas est facilement classifiable, puisqu'il s'agit d'algèbres de représentation finie [11].

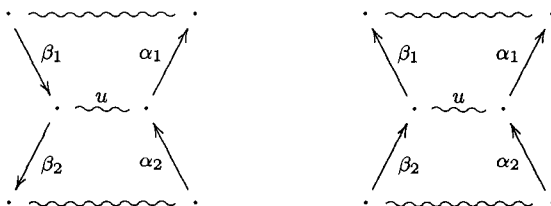
Avant d'aller plus loin, on démontrera les résultats suivants, qui nous serviront à classer les deux autres cas :

**Lemme 2.1.5** *Si  $R = kQ/I$  n'admet pas de DOZE, alors deux bandes de  $R$  ne peuvent avoir en commun un point au plus.*

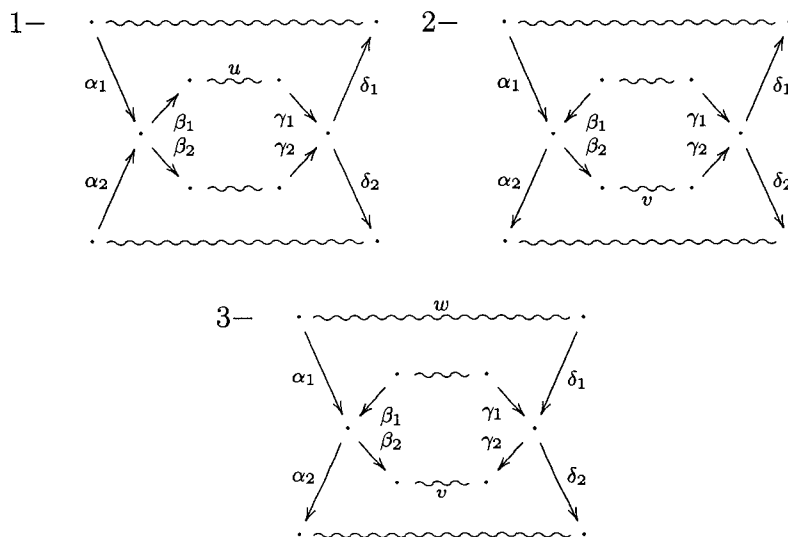
**Démonstration :** Soit  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux bandes admettant une sous-marche  $u$  non triviale allant de  $x$  vers  $y$  et telles que  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Supposons  $u$  maximale pour cette propriété. Posons  $\omega_1 = u\omega'_1$  et  $\omega_2 = u\omega'_2$ . Alors  $y$  est un point étant la source ou le but d'au moins trois flèches, et donc il doit y avoir deux de ces flèches dont la composition est dans l'idéal. Comme  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont des bandes, on peut considérer sans perte de généralité que  $\omega'_1$  commence par la flèche  $\alpha_1$  et  $\omega'_2$  commence par l'inverse formel de flèche  $\alpha_2^{-1}$  de manière à ce que  $\alpha_2\alpha_1 = 0$ .

De plus, un des deux cas suivants est vérifié :  $\omega'_1$  termine par la flèche  $\beta_1$  et  $\omega'_2$  termine par l'inverse formel de flèche  $\beta_2^{-1}$  de manière à ce que  $\beta_1\beta_2 = 0$  ou  $\omega'_2$  termine par la flèche  $\beta_2$  et  $\omega'_1$  termine par l'inverse formel de flèche  $\beta_1^{-1}$  de manière à ce que  $\beta_2\beta_1 = 0$ . Dans le premier cas,  $\alpha_2\omega'_1\beta_2$  est un DOZE. Dans le deuxième cas,  $\alpha_2\omega'_1u\omega'_2\beta_1$  est un

DOZE. On obtient la contradiction désirée.



Supposons maintenant que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  n'admettent aucune sous-marche non-triviale commune, mais ont deux points en commun, et soient  $x$  et  $y$  ces deux points. Alors  $x$  et  $y$  sont des points étant la source ou le but de quatre flèches, et donc il doit y avoir pour chaque point deux paires de deux flèches dont la composition est dans l'idéal. Notons  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les flèches dont le but est  $x$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  les flèches dont la source est  $x$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les flèches dont le but est  $y$  et  $\delta_1$  et  $\delta_2$  les flèches dont la source est  $y$ , avec  $\alpha_i\beta_i$  et  $\gamma_i\delta_i$  des relations pour  $i \in \{1, 2\}$ . Comme  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont des bandes, on peut considérer sans perte de généralité que  $\alpha_1, \beta_2, \gamma_2$  et  $\delta_1$  sont des flèches de  $\omega_1$  et les autres des flèches de  $\omega_2$ . Notons  $u$  la marche entre le but de  $\beta_1$  et la source de  $\gamma_1$ .



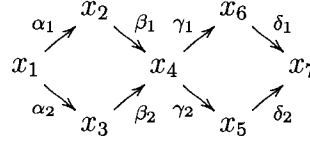
Alors

1.  $\alpha_1\beta_1u\gamma_1\delta_1$  est un DOZE ;
2.  $\beta_1\beta_2v\gamma_2\delta_2$  est un DOZE ;
3.  $\beta_1\beta_2v\gamma_2^{-1}\delta_1^{-1}w\alpha_1\alpha_2$  est un DOZE ;

□

Il est à noter que deux bandes peuvent avoir un point en commun, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 2.1.6**



où  $\beta_i\gamma_j = 0$  pour  $i = 1, 2, j = 1, 2$ , ne contient aucun DOZE.

**Lemme 2.1.7** *Si  $Q$  est le carquois d'une algèbre de cordes admettant au moins une flèche  $\beta : x \rightarrow y$  entrant dans une bande, alors il existe une flèche  $\beta^+$  sur la bande telle que  $\beta\beta^+ = 0$ .*

**Démonstration :** Dans ce cas  $y$  est un point étant la source ou le but d'au moins trois flèches, et donc il doit y avoir deux de ces flèches dont la composition est dans l'idéal, notons la relation  $\rho$ . Or, le cycle est sans relation et donc  $\rho$  doit passer par  $\beta$ , d'où la conclusion.

□

De manière duale s'il existe une flèche  $\alpha : x \rightarrow y$  sortant d'une bande, alors il existe une flèche  $\alpha^-$  sur la bande telle que  $\alpha^-\alpha = 0$ .

## 2.2 Algèbres de cordes sans DOZE quasi-inclinées

On considérera maintenant le deuxième cas, c'est-à-dire celui il y a au moins une bande qui a des flèches entrantes et des flèches sortantes.

**Lemme 2.2.1** *Soit  $R = kQ/I$  une algèbre de cordes sans DOZE et admettant une bande avec une flèche entrante  $\beta$  et une flèche sortante  $\alpha$ , et soit  $\beta^+$  une flèche de cette bande telle que  $\beta\beta^+$  est contenu dans l'idéal  $I$ . Alors il existe une corde  $\omega$  sur la bande, allant du but de  $\beta^+$  jusqu'à la source de  $\alpha$ , telle que  $\omega\alpha$  soit une corde.*

**Démonstration :** Il existe une marche  $\omega$  allant du but de  $\beta^+$  jusqu'à la source de  $\alpha$ , et on peut choisir cette marche de manière à ce que  $\beta^+\omega$  soit réduite. Alors  $\beta\beta^+\omega\alpha$  n'est pas un DOZE et donc  $\omega\alpha$  ne contient aucune relation.

□

**Proposition 2.2.2** *Soit  $Q$  un carquois admettant une bande avec au moins une flèche entrante  $\beta$  et au moins une flèche sortante  $\alpha$ , alors si  $R = kQ/I$  est une algèbre de cordes qui n'admet pas de DOZE, elle n'admet aucun double-zéro.*

**Démonstration :** Supposons qu'il existe un double-zéro  $\omega_1\omega_2\omega_3$  avec  $\omega_1\omega_2$  contenant au moins une relation et  $\omega_2\omega_3$  contenant au moins une relation. On choisit  $\omega_2$  de manière à ce qu'elle soit de longueur minimale.

Si  $\omega_1\omega_2 = \beta\beta^+$  alors  $\omega_1\omega_2\omega_3$  est un DOZE puisque  $\omega_2$  contient un point étant la source d'une bande et  $\omega_1\omega_2\omega_3$  est un double zéro.

Soit  $\rho : b(\beta^+) \rightsquigarrow x$  une marche telle que  $x$  soit un point de  $\omega_1\omega_2\omega_3$ , telle que  $\beta\beta^+\rho$  soit réduite (c'est possible puisque  $\Theta_i$  est une bande et que  $R$  ne contient pas de DOZE), telle que  $\rho\gamma$  soit réduite pour toute flèche  $\gamma : x \rightarrow y$  sur  $\omega_1\omega_2\omega_3$ , telle que  $\rho\gamma^{-1}$  soit réduite

pour toute flèche  $\gamma : y \rightarrow x$  sur  $\omega_1\omega_2\omega_3$  et de longueur minimale pour ces propriétés. S'il existe une flèche  $\gamma$  sur  $\omega_1\omega_2\omega_3$  telle que  $\rho\gamma$  ou  $\rho\gamma^{-1}$  contient une relation, alors si la première relation rencontrée en partant du but de  $\beta^+$  pointe dans la même direction que  $\beta\beta^+$ , on a un DOZE. Sinon soit  $\omega$  la marche allant de  $b(\beta)$  jusqu'à  $s(\alpha^-)$  telle que  $\beta\omega$  soit une corde (elle existe puisque  $\Theta_i$  est une bande et que  $R$  ne contient pas de DOZE), alors la marche  $\rho^{-1}\beta^{+^{-1}}\omega\alpha^-\alpha$  est réduite et est un DOZE.

$$\cdot \xleftarrow{\rho} \cdot \xleftarrow{\beta^+} \cdot \xrightarrow{\omega} \cdot \xrightarrow{\alpha^-} \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot$$

Supposons donc qu'il n'existe pas de flèche  $\gamma$  telle que  $\rho\gamma$  ou  $\rho\gamma^{-1}$  contienne une relation. Si  $x$  est avant la source de la deuxième relation, on a une relation pointant dans la même direction que  $\beta\beta^+$ , on a un DOZE. Si  $x$  est après la première relation, on a une relation pointant dans la même direction que  $\alpha^-\alpha$ , on a un DOZE. Sinon c'est que les deux relations se chevauchent, et donc  $\omega_1\omega_2\omega_3$  est un chemin, ce qui contredit qu'il n'existe pas de flèche  $\gamma$  telle que  $\rho\gamma$  ou  $\rho\gamma^{-1}$  contienne une relation.

$$\cdot \xrightarrow{\alpha_1} \cdot \xrightarrow{\alpha_2} \cdot \xrightarrow{\alpha_i} \cdot \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdot \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdot \xrightarrow{\alpha_n} \cdot$$

$\cdot$   
 $\left. \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \rho$

□

Une algèbre est quasi-inclinée de type canonique si sa catégorie dérivée est équivalente à la catégorie dérivée d'une catégorie de faisceaux cohérents sur la droite projective à poids  $\mathbb{X}$ .

Le théorème découle maintenant directement de [21] et [17].

**Théorème 2.2.3** *Soit  $Q$  un carquois admettant une bande avec au moins une flèche entrante et au moins une flèche sortante, alors si  $R = kQ/I$  n'admet pas de DOZE, elle est quasi-inclinée de type canonique.*

**Démonstration :** Selon les théorèmes 2.6 et 3.4 de [21],  $R$  est une algèbre quasi-inclinée non inclinée, et le théorème 3.1 de [17] nous apprend qu'elle est quasi-inclinée de type canonique.

□

**Exemple 2.2.4** Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est

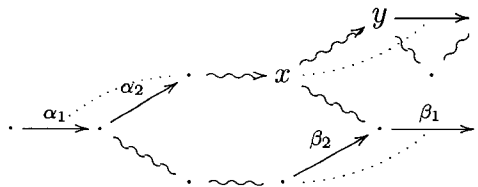
$$x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_1} \\ \xrightarrow{\beta_2} \end{array} x_3 \xrightarrow{\gamma} x_4$$

où  $\alpha\beta_1$  et  $\beta_2\gamma$  sont dans l'idéal  $I$ . Alors  $R$  est une algèbre quasi-inclinée de type canonique puisqu'elle ne contient aucun DOZE.

**Corollaire 2.2.5** Soit  $Q$  le carquois d'une algèbre de cordes admettant une bande avec au moins une flèche entrante et au moins une flèche sortante, alors si  $R = kQ/I$  n'admet pas de DOZE, elle admet une seule bande.

**Démonstration :** Dans ce cas,  $R$  est quasi-inclinée. S'il y a deux bandes, soient  $\alpha_1$  la flèche entrante et  $\beta_1$  la flèche sortante de la bande spécifiée,  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  telles que  $\alpha_1\alpha_2 = 0$  et  $\beta_2\beta_1 = 0$  (elles existent selon 2.1.7) et  $\omega$  une marche réduite allant d'un point  $x$  du premier cycle à un point  $y$  du deuxième cycle. La marche  $\omega$  ne peut pas avoir une composition sans relation avec tous les chemins des deux cycles puisque dans ce cas,  $\alpha_1\alpha_2$  et  $\beta_2\beta_1$  forment un double zéro. Donc il existe une marche réduite avec une relation, allant du premier cycle vers le deuxième. Cette relation n'est ni  $\alpha_1\alpha_2$ , ni  $\beta_2\beta_1$ . On peut choisir cette relation telle qu'il n'y a pas d'autres relations entre elle et  $x$ . Alors nous avons trois relations liées à un cycle, dont deux doivent pointer dans la même direction. Une

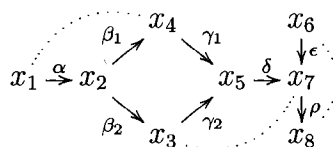
contradiction.



□

Remarquons qu'il est par contre possible que le carquois lié contienne trois relations, comme le montre cet exemple.

**Exemple 2.2.6** Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est



où  $\alpha\beta_1$ ,  $\gamma_2\delta$  et  $\epsilon\rho$  sont dans l'idéal  $I$ . Alors  $R$  ne contient aucun DOZE mais contient trois relations zéro.



## 2.3 Algèbres de cordes sans DOZE de type laura

### 2.3.1 Cycles sur une algèbre de cordes sans DOZE

Il nous reste seulement un cas à traiter, et donc pour la suite du chapitre on considèrera que :

1.  $R = kQ/I$  est une algèbre de cordes ne contenant pas de DOZE ;
2. Chacune des bandes de  $Q$  a seulement des flèches entrantes ou seulement des flèches sortantes.

On négligera le cas trivial où  $R$  admet une seule bande sans flèche entrante ni flèche sortante. Dans ce cas, l'algèbre est héréditaire.

L'objectif de la section est de mieux comprendre la structure des algèbres satisfaisant à ces conditions. On montrera qu'on peut les analyser à partir des bandes incluses dans le carquois. On s'intéressera ensuite aux propriétés combinatoires de ces bandes pour en déduire les propriétés algébriques nous intéressant.

On note  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$  les bandes (à permutation cyclique près) admettant des flèches sortantes seulement.

**Lemme 2.3.1** *Le cycle  $\Theta_i$  admet un point  $a_i$  tel qu'aucune flèche sauf celles de  $\Theta_i$  ne commence en  $a_i$ .*

**Démonstration :** Comme  $R$  est de dimension finie sur  $k$ , il existe un point  $a_i$  qui est la source de deux flèches dans  $\Theta_i$ , et ce point ne peut donc pas être la source d'une autre flèche.

□

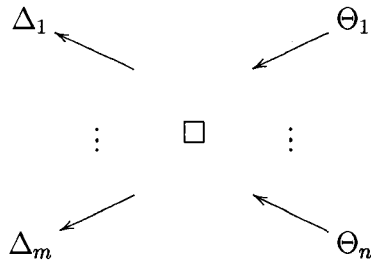
On choisit arbitrairement un tel point sur le cycle  $\Theta_i$  qu'on note  $a_i$ . Soit  $\alpha$  une flèche sortante de  $\Theta_i$ . On note  $\alpha^-$  la flèche de  $\Theta_i$  telle que  $\alpha^- \alpha = 0$  (elle existe selon 2.1.7). On note  $\rho'_{(i,\alpha)}$  la marche réduite minimale allant de  $a_i$  à  $b(\alpha)$  en passant par  $\alpha^- \alpha$ .

On note  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$  les bandes admettant des flèches entrantes seulement. Le lemme suivant est le dual de 2.3.1.

**Lemme 2.3.2**  $\Delta_j$  admet un point  $b_j$  tel que aucune flèche sauf celles de  $\Delta_j$  ne finisse en  $b_j$ .

On choisit arbitrairement un tel point sur le cycle  $\Delta_j$  qu'on notera  $b_j$ . Soit  $\beta$  une flèche entrante de  $\Delta_j$ , on note  $\beta^+$  la flèche de  $\Delta_j$  telle que  $\beta \beta^+ = 0$ . On note  $\sigma'_{(j,\beta)}$  la marche réduite minimale allant de  $s(\beta)$  à  $b_j$  en passant par  $\beta \beta^+$ .

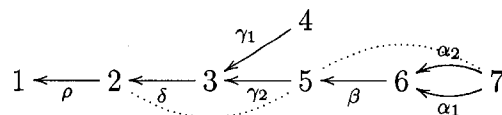
Voici un schéma donnant un aperçu de la forme générale des carquois définis plus haut :



Pour tous les énoncés suivants, nous omettrons de démontrer l'énoncé dual lorsqu'il se démontre de manière duale à l'énoncé initial.

**Définition 2.3.3** Pour  $\omega$  une corde de  $(Q_R, I_R)$ , on note  $W(\omega)$  l'ensemble des cordes  $\omega'$  sur  $(Q_R, I_R)$  telles que  $\omega' = \omega_1 \omega \omega_2$ . On note  $D(\omega)$  la sous-catégorie de  $(Q_R, I_R)$  composée de tous les points  $x$  pour lesquels il existe une corde de  $W(\omega)$  passant par  $x$  et dont les morphismes sont les compositions des flèches  $\alpha$  pour lesquelles il existe une corde de  $W(\omega)$  passant par  $\alpha$ .

**Exemple 2.3.4** Soit  $Q$  le carquois



avec  $I$  l'idéal engendré par  $\gamma_2\delta$  et  $\alpha_2\beta$ . Alors  $D(\varepsilon_7)$  est la sous catégorie pleine engendrée par  $\{3, 4, 5, 6, 7\}$  et  $D(\delta)$  est la sous catégorie pleine engendrée par  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

**Définition 2.3.5** Pour  $R = kQ/I$  une algèbre de cordes dont chacune des bandes admet des flèches entrantes seulement ou des flèches sortantes seulement, on définit la catégorie  $A_i$  la sous-catégorie de  $R$  formée des sommets de  $D(\varepsilon_{a_i})$  et des morphismes étant des combinaisons linéaires de chemins de flèches de  $D(\varepsilon_{a_i})$  et l'algèbre  $A_i$  comme étant le quotient de l'algèbre des chemins sur le carquois de  $D(\varepsilon_{a_i})$  par  $I \cap D(\varepsilon_{a_i})$ .

**Proposition 2.3.6** La catégorie  $A_i$  ne dépend pas du choix de  $a_i$ .

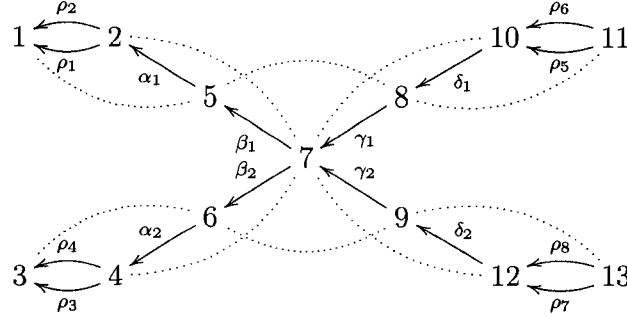
**Démonstration :** Soient  $a_i$  et  $a'_i$  deux sources de  $\Theta_i$  et supposons que  $x$  est un point de  $D(\varepsilon_{a_i})$ , alors il existe une corde  $\omega$  allant de  $a_i$  à  $x$  et il existe une corde  $\omega'$  allant de  $a'_i$  à  $a_i$  ne passant pas par les mêmes flèches (puisque  $\Theta_i$  est une bande). Or, comme  $a_i$  est une source, la dernière flèche de  $\omega'$  et la première flèche de  $\omega$  pointent dans des directions opposées et donc la marche réduite de  $\omega'\omega$  est une corde.

$$x \xleftarrow{\omega} \cdot \leftarrow a_i \xrightarrow{\omega'} \cdot \xrightarrow{\omega'} a'_i$$

□

Dualement, on définit la catégorie  $B_j$ , qui ne dépend pas non plus du choix du point  $b_j$  choisi et l'algèbre  $B_j$ .

**Exemple 2.3.7** Soit  $Q$  le carquois

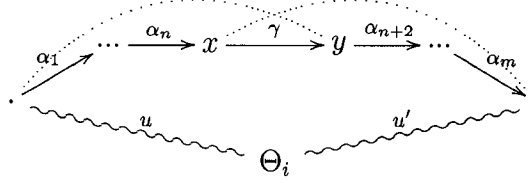


avec  $I$  l'idéal engendré par  $\alpha_1\rho_1 = 0$ ,  $\alpha_2\rho_4 = 0$ ,  $\rho_5\delta_1 = 0$ ,  $\rho_8\delta_2 = 0$ ,  $\beta_i\alpha_i = 0$  pour  $i$  tel que  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\gamma_i\beta_i = 0$  pour  $i$  tel que  $i \in \{1, 2\}$  et  $\delta_j\gamma_j = 0$  pour  $j$  tel que  $j \in \{1, 2\}$ . Alors  $(Q, I)$  ne contient aucun DOZE. On a  $B = B_1 \times B_2$  avec  $B_1$  la sous catégorie pleine engendrée par  $\{1, 2, 5\}$  et  $B_2$  la sous catégorie pleine engendrée par  $\{3, 4, 6\}$ . On a aussi  $A = A_1 \times A_2$  avec  $A_1$  la sous catégorie pleine engendrée par  $\{8, 10, 11\}$  et  $A_2$  la sous catégorie pleine engendrée par  $\{9, 12, 13\}$ .

**Lemme 2.3.8** Les catégories  $D(\varepsilon_{a_i})$  et  $D(\varepsilon_{b_j})$  sont pleines.

**Démonstration :** Par l'absurde. Supposons que  $x$  et  $y$  sont des objets de  $A_i$  et soit  $\gamma : x \rightarrow y$  une flèche qui n'est pas dans  $D(\varepsilon_{a_i})$ . Alors il existe des cordes  $\omega : a_i \rightsquigarrow x$  et  $\omega' : a_i \rightsquigarrow y$ , et comme  $\gamma$  n'est pas dans  $A_i$ , elles sont telles que  $\omega\gamma$  et  $\omega'\gamma^{-1}$  sont des marches réduites contenant une relation zéro. Mais alors la relation zéro doit contenir  $\gamma$  dans les deux cas, puisque  $\omega$  et  $\omega'$  sont des cordes, et donc  $\omega = u\alpha_1\dots\alpha_n$  et  $\omega' = u'\alpha_m^{-1}\dots\alpha_{n+2}^{-1}$  avec  $\alpha_1\dots\alpha_n\gamma$  et  $\gamma\alpha_{n+2}\dots\alpha_m$  des relations. Par conséquent,  $\gamma\omega'^{-1}\Theta_i\rho'_{(i,\alpha)}$  est un DOZE. On a montré que si  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $A_i$  alors  $\gamma : x \rightarrow y$  est une flèche de  $D(\varepsilon_{a_i})$ , on

a donc que tout morphisme dans la catégorie  $A_i$  satisfait à la même propriété.



□

**Lemme 2.3.9** *Soit  $x \in (Q_{A_i})_0$  et  $y \notin (Q_{A_i})_0$ , alors il n'existe aucune flèche  $\alpha : y \rightarrow x$ . Dualement, soit  $x \in (Q_{B_j})_0$  et  $y \notin (Q_{B_j})_0$ , alors il n'existe aucune flèche  $\alpha : x \rightarrow y$ .*

**Démonstration :** Supposons que ce soit le cas. Soit  $\omega$  une corde reliant  $a_i$  et  $x$ . Alors  $\omega\alpha^{-1}$  est soit non réduite, soit contient une relation zéro. Si elle n'est pas réduite, alors  $\omega = \omega'\alpha$ , et donc  $y \in Q_{A_i}$ , une contradiction. Si elle contient une relation zéro, alors  $\omega = \omega'\beta_n^{-1}\dots\beta_1^{-1}$  avec  $\alpha\beta_1\dots\beta_n$  dans l'idéal et donc  $\alpha\beta_1\dots\beta_n\omega'^{-1}\rho'_{i,\gamma}$  avec  $\gamma$  une flèche sortante de  $\Theta_i$  est un DOZE, une contradiction.

□

**Corollaire 2.3.10** *Les catégories  $D(\varepsilon_{a_i})$  et  $D(\varepsilon_{b_j})$  sont convexes.*

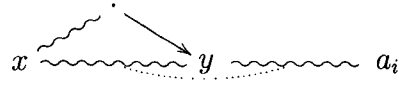
**Corollaire 2.3.11** *Les algèbres  $A_i$  et  $B_j$  sont des algèbres de cordes.*

**Lemme 2.3.12** *Chacune des catégories  $D(\varepsilon_{a_i})$  et  $D(\varepsilon_{b_j})$  ne contient qu'un seul cycle simple. En particulier, elle ne contient aucun cycle orienté.*

**Démonstration :** Soit  $\Theta$  un cycle de  $D(\varepsilon_{a_i})$  différent de  $\Theta_i$ , et soit  $x$  un point de  $\Theta$ . Si  $\Theta$  contient une relation  $\gamma_1\dots\gamma_n$ , puisque le but de  $\gamma_n$  est un point de  $A_i$ , il existe une corde  $\mu$  allant du but de  $\gamma_n$  à  $a_i$ . Puisque  $\Theta$  est un cycle, on peut choisir la relation et la

corde de manière à ce que  $\gamma_1 \dots \gamma_n \mu$  soit réduite. On a que  $\gamma_1 \dots \gamma_n \mu \rho'_{i,\alpha} \alpha$ , avec  $\alpha$  une flèche sortante de  $\Theta_i$ , est un DOZE.

Si  $\Theta$  ne contient aucune relation, comme  $x$  est un objet de  $A_i$ , il existe une corde  $\omega \omega'$  allant de  $x$  à  $a_i$  avec  $\omega : x \rightsquigarrow y$  sur  $\Theta$  et  $\omega' : y \rightsquigarrow a_i$  n'étant pas sur  $\Theta$ . De plus, il est possible de choisir  $x$  de manière à ce que  $\omega$  et  $\omega'$  ne soient pas triviales. Comme  $R$  est une algèbre de cordes et que  $\Theta$  est un cycle, il existe une autre marche  $\nu : x \rightsquigarrow y$  sur  $\Theta$  avec  $\nu \omega'$  contenant exactement une relation. Si elle pointe vers  $a_i$ , alors  $\nu \omega' \rho'_{i,\alpha} \alpha$ , avec  $\alpha$  une flèche sortante de  $\Theta_i$ , est un DOZE. Si elle pointe dans l'autre direction, alors  $\omega'^{-1} \nu^{-1} \omega \omega' \rho'_{i,\alpha} \alpha$ , avec  $\alpha$  une flèche sortante de  $\Theta_i$ , est un DOZE.



□

**Remarque 2.3.13** *Le lemme 2.3.9 implique qu'il n'existe aucune relation  $\rho$  dans  $I$  dont la source n'est pas dans  $(Q_{A_i})_0$  et le but est dans  $(Q_{A_i})_0$ . On déduit de ce fait et du lemme précédent qu'aucune relation  $\rho$  n'a un but dans  $(Q_{A_i})_0$  et une source qui n'est pas sur le cycle  $\Theta_i$ .*

On rappelle qu'une algèbre  $R$  est collée à gauche si elle est de représentation finie ou s'il existe des algèbres inclinées  $D_1, D_2, \dots, D_k$ , admettant des tranches complètes  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$  et une algèbre de représentation finie  $F$  qui sont des sous-catégories pleines et convexes de  $R$  telles que tout objet de  $R$  appartient à l'une d'elles, aucun injectif de  $R$  n'est un prédecesseur propre d'une des tranches complètes, considérées comme parties de  $R$ , et  $\text{ind} D_1 \times D_2 \times \dots \times D_k$  est cofini dans  $\text{ind} R$ . (voir [2])

**Proposition 2.3.14** *Pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq n$ , l'algèbre  $A_i$  est une algèbre inclinée contenant une tranche complète dans sa composante postprojective. En particulier, elle est*

collée à gauche et donc telle que tous sauf un nombre fini des  $A_i$ -modules indécomposables sont dans  $\mathcal{R}_{A_i}$ .

**Démonstration :** Soit  $\alpha$  une flèche allant de  $x$  vers  $y$  dans  $A_i$ . On veut montrer que  $P_x$  et  $P_y$ , les  $A_i$ -projectifs de coiffe  $S_x$  et  $S_y$ , sont dans la même composante du carquois d'Auslander-Reiten de  $A_i$ . On a que le radical de  $P_x$  est la somme directe d'au plus deux termes, dont un est un module unisériel de coiffe  $S_y$ , que nous noterons  $L$ . De plus, il existe un épimorphisme  $f$  allant de  $P_y$  vers  $L$ . Comme l'inclusion du radical d'un projectif dans ce projectif est toujours irréductible, il nous reste à montrer que  $f$  ne se factorise que par un nombre fini de modules indécomposables (puisque selon [26], tout morphisme du radical infini se factorise par un non isomorphisme et un morphisme du radical infini, ce qui revient à dire qu'il peut se factoriser par un nombre infini de modules indécomposables).

Supposons que  $f$  se factorise par les morphismes  $f_1 : M \rightarrow L$  et  $f_2 : P_y \rightarrow M$ , où  $M$  n'est en général pas un module indécomposable.

$$P_y \xrightarrow{f_2} M \xrightarrow{f_1} L \longrightarrow Px$$

Comme  $f$  est un épimorphisme,  $f_1$  l'est aussi, et donc  $L$  est un quotient de  $M$ . Soit une flèche  $\beta$  allant de  $z_1$  un point du support de  $L$ , vers  $z_2$ , un point du support de  $M$  n'étant pas dans le support de  $L$ . Puisque  $L$  est un facteur direct du radical de  $P_x$ , il existe une marche  $\omega'$  telle que  $\omega'\beta$  est dans le support de  $M$  mais  $\alpha\omega'\beta$  est dans l'idéal  $I$  ( $\omega'$  pouvant être triviale).

On a une relation de  $I$  commençant en  $x$  et donc  $x$  est sur la bande  $\Theta_i$  selon 2.3.13. Or, il n'existe pas de relation sur une bande, et donc  $\beta$  n'est pas sur  $\Theta_i$ , et puisque  $\Theta_i$  est le seul cycle de  $A_i$  selon 2.3.12, toute flèche se trouvant sur une marche réduite débutant par  $\alpha\omega'\beta$  et étant un successeur de  $\beta$  n'est pas sur la bande  $\Theta_i$ .

Donc toute flèche du support de  $M$  est soit contenue dans le support de  $L$  ou n'est pas

dans  $\Theta_i$ . Or,  $\Theta_i$  n'est pas entièrement incluse dans le support de  $L$ , et donc n'est pas non plus dans le support de  $M$ .

La dimension des facteurs directs de  $M$  sur  $k$  est donc bornée puisque  $M$  doit être un module de corde (puisque  $A_i$  est une algèbre de cordes et que le support de  $M$  ne contient pas de bande), et que la longueur des cordes est maintenant bornée puisqu'on ne peut emprunter chaque flèche qu'une fois.

On vient de montrer qu'il existe seulement un nombre fini de modules indécomposables qui sont facteurs directs d'un module par lequel  $f$  se factorise, et donc que  $P_y$  et  $P_x$  sont dans la même composante du carquois d'Auslander-Reiten de  $A_i$ . Comme le carquois est connexe, ceci s'applique à tous les projectifs.

Il suffit maintenant d'observer que  $A_i$  ne contient aucun double zéro. Supposons effectivement que  $A_i$  contienne un double-zéro, et soit  $x'$  la source de la première relation et  $y'$  le but de la seconde. Alors il existe une corde de  $a_i$  vers  $x'$  et une corde de  $a_i$  vers  $y'$ , ce qui crée un DOZE. Donc  $A_i$  est inclinée, et contient une composante postprojective qui contient tous les projectifs, ce qui démontre l'énoncé selon le théorème 3.4 de [21].

□

**Proposition 2.3.15** *Pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ , l'algèbre  $A_i$  est une algèbre inclinée de type  $\tilde{\mathbb{A}}_{p-1}$ , où  $p$  est le nombre de points du carquois ordinaire de  $A_i$ .*

**Démonstration :** L'algèbre est inclinée selon la proposition précédente, et donc en appliquant [7], il suffit de montrer que l'algèbre  $A_i$  est aimable, que son carquois sous-jacent contient un seul cycle  $C$  et que sur ce cycle  $C$ , le nombre de relations dans le sens horaire est égal au nombre de relations dans le sens anti-horaire. Les deux dernières conditions sont vérifiées selon 2.3.12 et parce que  $\Theta_i$  ne contient aucune relation.

On montre premièrement que  $A_i$  ne contient aucune relation  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  ne contenant aucun sous-chemin strict étant une relation et telle que  $n \geq 3$ . Si c'est le cas, comme  $\Theta_i$  est



une bande, le but de  $\alpha_n$  n'est pas sur  $\Theta_i$ . Si  $\alpha_n$  n'est pas sur le cycle  $\Theta_i$ , alors la marche allant de  $a_i$  au but de  $\alpha_n$  définit un cycle différent de  $\Theta_i$ , une contradiction. Ainsi,  $\alpha_1$  est une flèche de  $\Theta_i$  et donc selon 2.3.13 on a  $\alpha_1 \dots \alpha_n = u\alpha^- \alpha u'$  avec  $\alpha$  une flèche sortante de  $\Theta_i$ . La minimalité nous donne que  $\alpha_1 \dots \alpha_n = \alpha^- \alpha$ .

On montre que chaque flèche  $\alpha$  admet au plus une flèche  $\beta$  telle que  $\beta\alpha \in I$ .

Si  $\alpha$  est une flèche sortante du cycle  $\Theta_i$ , alors il existe une flèche  $\alpha^-$  du cycle telle que  $\alpha^- \alpha \in I$ . S'il y a une autre flèche  $\beta$  définissant un chemin  $\beta\alpha$ , alors  $\beta$  est dans  $\Theta_i$  puisque  $\Theta_i$  n'a que des flèches sortantes. Alors  $\alpha$  n'est pas dans  $A_i$  puisqu'il ne peut exister aucun autre cycle que  $\Theta_i$  et donc qu'il n'y a pas de corde de  $a_i$  vers  $b(\alpha)$ .

Si  $\alpha$  est une flèche du cycle  $\Theta_i$ , alors il existe une seule flèche  $\beta$  de  $\Theta_i$  dont le but est la source de  $\alpha$ .

Si la source de  $\alpha$  n'est pas sur  $\Theta_i$ , s'il existe une flèche  $\beta$  de  $A_i$  telle que  $\beta\alpha \in I$ , alors  $\alpha$  n'est pas dans  $A_i$ .

On montre que chaque flèche  $\alpha$  admet au plus une flèche  $\gamma$  telle que  $\alpha\gamma \in I$ .

Soit  $\alpha$  une flèche du cycle  $\Theta_i$ , et soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux flèches dont la source est le but de  $\alpha$ . Si une de ces deux flèches est dans le cycle, on a terminé. Sinon, notons  $\alpha'$  l'autre flèche du cycle dont le but est égal au but de  $\alpha$ . Si  $\alpha\gamma_1 \in I$  et  $\alpha\gamma_2 \in I$ , alors selon la démonstration plus haut,  $\alpha'\gamma_1 \notin I$  et  $\alpha'\gamma_2 \notin I$ , ce qui contredit le fait que  $A_i$  est une algèbre de cordes.

Supposons que le but de  $\alpha$  n'est pas dans  $\Theta_i$ . Supposons qu'il existe une flèche  $\gamma$  de  $A_i$  telle que  $\alpha\gamma \in I$ , alors la marche allant de  $a_i$  au but de  $\gamma$  forme un cycle distinct de  $\Theta_i$ , une contradiction à 2.3.12. Donc une telle flèche n'existe pas

On a montré que  $A_i$  est aimable et l'énoncé est par conséquent vérifié.

□

### 2.3.2 Catégorie de modules

Nous avons maintenant beaucoup d'informations sur les algèbres du côté gauche et du côté droit, la prochaine section s'intéressera à la manière dont elles s'insèrent et interagissent dans l'algèbre  $R$ .

Il nous reste à construire une sous-catégorie contenant les autres flèches du carquois.

**Définition 2.3.16** *Soit  $E$  l'ensemble des cordes n'appartenant à aucune sous-catégorie  $A_i$  ou  $B_j$ . On définit la partie du milieu  $C$  comme étant la sous-catégorie ayant pour classe d'objets  $\bigcup_{\omega \in E} (D(\omega))_0$  et pour morphismes de  $x$  vers  $y$  la somme  $\sum_{\omega \in E} (D(\omega))(x, y)$ . On définit l'algèbre  $C$  à partir de cette structure.*

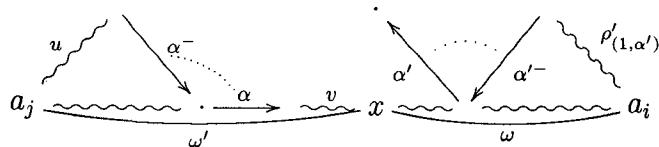
**Remarque 2.3.17** *L'algèbre  $C$  est de représentation finie puisqu'elle ne contient aucune bande et qu'elle est une algèbre de cordes.*

Maintenant que nous avons divisé le carquois ordinaire de l'algèbre  $R$ , nous entamons une étude de la catégorie des modules indécomposables de  $R$ , avec l'objectif d'arriver à prouver qu'il s'agit d'une algèbre de type laura.

**Lemme 2.3.18** *L'intersection de  $Q_{A_i}$  et  $Q_{A_j}$  est vide si  $i \neq j$ .*

**Démonstration :** Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  des flèches sortant respectivement de  $\Theta_j$  et  $\Theta_i$ . Supposons qu'il existe un point  $x$  élément de  $(Q_{A_i})_0 \cap (Q_{A_j})_0$ . Alors il existe des cordes  $\omega : x \rightsquigarrow a_i$  et  $\omega' : a_j \rightsquigarrow x$ . De plus,  $x$  n'est pas inclus dans  $\Theta_i$  ou  $x$  n'est pas inclus dans  $\Theta_j$  puisque les deux cycles sont distincts, selon 2.1.5 et puisque les deux cycles n'ont que des flèches sortantes. Supposons qu'il n'est pas dans  $\Theta_j$ , et donc qu'il existe une marche

réduite  $\omega''$  allant de  $a_j$  vers  $x$  telle que  $\omega'' = u\alpha^-\alpha v$  avec  $\alpha^-\alpha = 0$  et  $\nu$  un chemin de  $\Theta_j$ .



On peut supposer sans perte de généralité que  $\omega'\omega$  est une marche réduite.

Si  $\nu\omega$  est une corde, alors  $\alpha^-\alpha v \omega \rho'_{(1,\alpha')} \alpha'^-\alpha'$  est un DOZE.

Si  $\nu\omega$  n'est pas une corde, alors elle contient exactement une relation de longueur minimale. Posons sans perte de généralité  $\nu\omega = w'\alpha_1\dots\alpha_n w$  avec  $\alpha_1\dots\alpha_n = 0$  et  $n$  minimal pour cette propriété. Alors  $\nu\omega \rho'_{(1,\alpha')} \alpha'^-\alpha'$  est un DOZE.

□

On notera  $A = \prod_{i=1}^n A_i$  l'algèbre du côté droit de  $R$  et  $B = \prod_{j=1}^m B_j$  l'algèbre du côté gauche de  $R$ .

**Proposition 2.3.19**  $\text{ind}R = \text{ind}A \cup \text{ind}B \cup \text{ind}C$

**Démonstration :** Tout  $A_i$ -module ou  $B_j$ -module est un  $R$ -module puisque  $A_i$  et  $B_j$  sont des sous-catégories pleines et convexes et qu'on peut donc compléter une  $A_i$ -représentation par des zéros pour en faire une  $R$ -représentation [6]. Tout  $C$ -module est un module de corde et donc un  $R$ -module de corde.

Soit  $M$  un  $R$ -module indécomposable et  $\omega$  une corde du support de  $M$ , alors tout point et toute flèche du support sont éléments de  $D(\omega)$ . Donc, si la marche  $\omega$  n'est ni dans  $A$ , ni dans  $B$ , le  $R$ -module  $M$  est un  $C$ -module, c'est-à-dire que si un seul point du support de  $M$  n'est ni dans  $A$ , ni dans  $B$ , on a terminé.

Supposons au contraire que tous les points du support de  $M$  sont soit dans un des  $A_i$ , soit dans un des  $B_j$ , mais pas tous dans un des deux. Soit  $x$  un point de  $A_i$  qui n'est pas dans  $B_j$  et  $y$  un point de  $B_j$  qui n'est pas dans  $A_i$ , alors la corde  $\omega : x \rightsquigarrow y$  ne peut être

ni dans  $A_i$ , ni dans  $B_j$ , et donc par définition elle est dans  $C$ . On obtient que  $M$  est un  $C$ -module indécomposable.

□

**Lemme 2.3.20** *Soit  $M$  un  $R$ -module indécomposable, si le socle de  $M$  est un  $A_i$ -module, alors  $M$  est un  $A_i$ -module indécomposable.*

**Démonstration :** Découle du fait que  $M$  est un module de corde ou de bande et du fait que  $\Theta_i$  n'admet que des flèches sortantes.

□

Dualement, si la coiffe de  $M$  est un  $B_j$ -module, alors  $M$  est un  $B_j$ -module

**Proposition 2.3.21** *1. Soient  $M$  un  $A_i$ -module et  $N$  un  $A_j$ -module, alors  $\text{Hom}_R(M, N) = 0$  si  $i \neq j$  ;*  
*2. Soient  $M$  et  $N$  des  $A_i$ -modules, alors  $\text{Hom}_R(M, N) = \text{Hom}_{A_i}(M, N)$*   
*3. Soient  $M$  un  $B_i$ -module et  $N$  un  $B_j$ -module, alors  $\text{Hom}_R(M, N) = 0$  si  $i \neq j$  ;*  
*4. Soient  $M$  et  $N$  des  $B_j$ -modules, alors  $\text{Hom}_R(M, N) = \text{Hom}_{B_j}(M, N)$*

**Démonstration :** Les énoncés (1) et (3) découlent directement de 2.3.18. Les énoncés (2) et (4) découlent du fait que  $A_i$  ou  $B_j$ , respectivement, est une sous-catégorie pleine de  $R$ .

□

**Proposition 2.3.22**  $|\text{ind}A_i \cap \text{ind}B_j| \leq |\text{ind}(A_i \cap B_j)| < \infty$ .

**Démonstration :** Si  $A_i \cap B_j$  contient une bande, alors selon 2.3.12, le cycle  $\Theta_i$  est égal au cycle  $\Delta_j$  et donc la bande admet des flèches entrantes et des flèches sortantes

(puisque'on néglige le cas où  $\Theta_i = \Delta_j = Q_R$ ) une contradiction. Alors  $A_i \cap B_j$  ne contient aucune bande et est donc de représentation finie. Or, tout  $A_i$ - $B_j$ -module est un  $A_i \cap B_j$ -module.

□

**Proposition 2.3.23** *Soient  $M$  un  $A_i$ -module indécomposable,  $N$  un  $R$ -module indécomposable qui n'est pas un  $A_i$ -module et  $f : M \rightarrow N$  un morphisme non nul, alors  $M$  est un  $C$ -module ou  $M$  est un  $B$ -module.*

**Démonstration :** Supposons que  $M$  ne soit ni un  $B$ -module, ni un  $C$ -module, alors le support de  $M$  contient au moins un point  $z'$  qui n'est pas un objet de  $B \cup C$  et qui est donc un objet de  $A_i$ .

Or,  $\text{Im}f$  est un quotient strict de  $M$ , il existe donc une corde  $\omega$  allant de  $z'$  vers  $x$  et une flèche  $\alpha : x \rightarrow y$  avec  $x$  dans le support de  $\text{Im}f$  et  $y$  dans le support de  $M$  mais pas dans celui de  $\text{Im}f$ .

Comme  $N$  n'est pas un  $A$ -module, le support de  $N$  contient au moins un point  $z$  qui n'est pas un objet de  $A_i$ . Comme  $z$  et  $y$  font partie du support de  $N$  tous les deux, il existe une corde  $\nu$  allant de  $y$  vers  $z$ .

$$z' \overset{\omega}{\rightsquigarrow} x \xleftarrow{\alpha} y \overset{\nu}{\rightsquigarrow} z$$

Or,  $z'$  n'est pas dans  $B \cup C$  et  $z$  n'est pas dans  $A_i$ , alors aucune corde ne peut les relier, puisque si elle n'est ni dans  $A$ , ni dans  $B$ , une corde doit être dans  $C$ . Si  $\omega\alpha^{-1}\nu$  est réduite, elle doit contenir une relation et cette relation doit impliquer  $\alpha$ . Mais dans ce cas, on obtient une relation entrant dans  $A_i$ , une contradiction à 2.3.13.

Donc  $\omega\alpha^{-1}\nu$  n'est pas réduite et la relation entre  $z$  et  $z'$  pointe dans l'autre direction.

Notons la  $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$  allant de  $z'^*$  vers  $z^*$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 z'^* & \xrightarrow{\alpha_1} & \dots & \xrightarrow{\alpha_i} & \cdot & \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & \dots & \xrightarrow{\alpha_n} & z^* \\
 & & & & \downarrow \eta & & & & \\
 & & & & x & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & y & & & & 
 \end{array}$$

Or, comme  $\omega$  et  $\nu$  sont des cordes, on doit avoir  $\alpha_1\dots\alpha_i\eta$  sans relation et  $\eta^{-1}\alpha_{i+1}\dots\alpha_n$  sans relation. Comme  $R$  est une algèbre de cordes, cela implique que  $n = 2$ .

$$\begin{array}{ccc}
 z'^* & \xrightarrow{\alpha_1} & \cdot & \xrightarrow{\alpha_2} & z^* \\
 & & \downarrow \eta & & \\
 & & x & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & y & & 
 \end{array}$$

Or, le but de  $\alpha_1$  est sur  $\omega$  et sur  $\nu$  il fait donc partie de l'image de  $f$ . Or, comme  $\text{Im}f$  est un quotient de  $M$ , on a que  $z'^*$  est dans  $\text{Im}f$ . Comme  $\text{Im}f$  est un sous-module de  $N$ , on a que  $z^*$  est dans  $\text{Im}f$ . Une absurdité puisque  $\alpha_1\alpha_2$  est dans  $I$  et que selon 2.3.12, il n'y a aucun cycle contenant une relation dans  $A_i$ .

□

La dernière proposition et 2.3.22 nous apprennent qu'il existe un nombre fini de  $A_i$ -modules indécomposables qui admettent des successeurs qui ne sont pas des  $A_i$ -modules. Soit  $\mathcal{X}_i$  la sous-catégorie de  $\text{ind}A_i$  contenant les modules qui n'admettent pas de successeurs qui ne sont pas des  $A_i$ -modules ( $\mathcal{X}_i = \{X \in \text{ind}A_i \mid \text{pour tout } 0 \neq f : X \rightarrow Y \text{ dans } \text{ind}R, Y \in \text{ind}A_i\}$ ). On a que  $\mathcal{X}_i$  est telle que si  $M$  est un  $A_i$ -module dans  $\mathcal{X}_i$  et qu'il existe un morphisme  $f$  non nul de  $M$  vers  $M'$ , alors  $M'$  est dans  $\mathcal{X}_i$ . Effectivement, si  $M'$  est un module qui n'est pas dans  $\mathcal{X}_i$ , alors  $f$  se compose de manière non nulle avec le monomorphisme allant de  $M'$  vers un module qui n'est pas un  $A_i$ -module, et donc selon 2.3.23,  $M$  n'est pas dans  $\mathcal{X}_i$ . Dualement, on définit  $\mathcal{Y}_j$  la sous catégorie de  $\text{ind}B_j$  contenant les modules qui n'admettent pas de successeurs qui ne sont pas des  $B_j$ -modules et on montre que  $\mathcal{Y}_j$  est telle que si  $M$  est un  $A_i$ -module dans  $\mathcal{Y}_j$  et qu'il existe un morphisme  $f$  non nul de  $M'$  vers  $M$ , alors  $M'$  est dans  $\mathcal{Y}_j$ .

**Corollaire 2.3.24** *Soient  $M$  et  $N$  des objets de  $\mathcal{X}_i$  et  $f : M \rightarrow N$ . Alors  $f$  est irréductible dans  $A_i$  si et seulement si  $f$  est irréductible dans  $R$ .*

**Démonstration :** Si  $f$  n'est pas irréductible dans  $A_i$ , alors  $f = f_1 \circ f_2$ , avec  $f_1$  qui n'est pas une rétraction et  $f_2$  qui n'est pas une section. Mais alors  $f_1$  et  $f_2$  sont des morphismes de  $R$ -modules tels que  $f_1$  n'est pas une section et  $f_2$  n'est pas une rétraction, et donc  $f$  n'est pas  $R$ -irréductible.

Si  $f$  n'est pas irréductible dans  $R$ , alors  $f = f_1 \circ f_2$ , et l'image de  $f_1$  est un  $A_i$ -module qui est dans  $\mathcal{X}_i$  (selon 2.3.23). Donc  $f_1$  et  $f_2$  sont des morphismes de  $A_i$ -modules tels que  $f_1$  n'est pas une section et  $f_2$  n'est pas une rétraction et donc  $f$  n'est pas  $A_i$ -irréductible.  $\square$

**Corollaire 2.3.25** *Soient  $M$  un  $A_i$ -module dans  $\mathcal{X}_i$  alors  $\tau_{A_i}^{-1}M = \tau_R^{-1}M$ .*

**Démonstration :** Soit (\*) :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow {}_R I_0 \xrightarrow{i_1} {}_R I_1$$

une résolution injective de  $M$  dans  $R$  et soit  $\nu$  le foncteur de Nakayama. On sait que  $\tau_R^{-1}(M) = \text{Coker} \nu^{-1}(i_1)$ .

$$\nu^{-1}({}_R I_0) \xrightarrow{\nu^{-1}(i_1)} \nu^{-1}({}_R I_1) \longrightarrow \text{Coker} \nu^{-1}(i_1)$$

On reproduit le même processus pour calculer  $\tau_{A_i}^{-1}(M)$ . En général,  $\nu^{-1}({}_{A_i} I_0)$  est un quotient de  $\nu^{-1}({}_R I_0)$  et  $\nu^{-1}({}_{A_i} I_1)$  est un quotient de  $\nu^{-1}({}_R I_1)$ . Les noyaux des projections,  $K_0$  et  $K_1$ , sont par construction des modules dont le support ne contient aucun objet de  $A_i$ . Soit  $L$ , le conoyau du morphisme allant de  $K_0$  vers  $K_1$  (dédié par passage aux

noyaux)

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
K_0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\nu^{-1}(R I_0) & \xrightarrow{\nu^{-1}(i_1)} & \nu^{-1}(R I_1) & \longrightarrow & \tau_R^{-1}(M) & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g & \\
\nu^{-1}(A_i I_0) & \xrightarrow{\nu^{-1}(i_1)} & \nu^{-1}(A_i I_1) & \longrightarrow & \tau_{A_i}^{-1}(M) & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & & 0 & & & 
\end{array}$$

On a que  $L$  est aussi un module dont le support ne contient aucun objet de  $A_i$  (puisque'il est un quotient de  $K_1$ ). Or,  $\tau_R^{-1}(M)$  est un  $A_i$ -module puisque  $M$  est dans  $\mathcal{X}_i$  et par conséquent  $L$  est nul et  $g$  est un monomorphisme. Or, il s'agit aussi d'un épimorphisme (puisque le diagramme est commutatif). On obtient le résultat.

□

**Corollaire 2.3.26** *Un chemin de  $\mathcal{X}_i$  est sectionnellement raffnable dans  $\mathcal{X}_i$  si et seulement s'il l'est aussi dans  $\text{ind}R$ .*

**Démonstration :** L'énoncé découle directement de 2.3.24 et 2.3.25.

□

**Proposition 2.3.27** *Soient  $P$  et  $I$  des  $A_i$ -modules qui sont dans  $\mathcal{X}_i$ . Si  $P$  est un  $R$ -projectif alors  $P$  est un  $A_i$ -projectif, et  $I$  est un  $R$ -injectif si et seulement si  $I$  est un  $A_i$ -injectif.*

**Démonstration :** Si  $P$  est un  $R$ -projectif, alors pour tout  $R$ -épimorphisme, et en particulier pour tout  $A_i$ -épimorphisme  $f : M \rightarrow N$  avec  $g : P \rightarrow N$ , il existe un  $R$ -morphisme  $h : P \rightarrow M$  tel que  $hf = g$ . Comme  $h$  est un morphisme entre deux  $A_i$ -modules, c'est un  $A_i$ -morphisme, selon 2.3.21.



L'énoncé pour les injectifs découle de 2.3.9 et de la construction des modules injectifs.

□

### 2.3.3 Algèbres de type laura

**Théorème 2.3.28** *Soit  $(Q, I)$  un carquois lié de cordes admettant un cycle sans relations et admettant seulement des flèches entrantes et seulement des flèches sortantes pour chacune de ses bandes, alors si  $R = kQ/I$  n'admet pas de DOZE, elle est de type laura non quasi-inclinée de type canonique.*

**Démonstration :** Soit  $R$  définie comme plus haut. On prétend que si le module  $M$  n'est pas dans  $\mathcal{L}_R \cup \mathcal{R}_R$ , alors une des conditions suivantes est vérifiée :

1. Le module  $M$  est dans  $\text{ind}C$  ;
2. Il existe  $i$  et  $j$  tels que  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$  et tels que le module  $M$  soit dans  $\text{ind}A_i \cap \text{ind}B_j$  ;
3. Le module  $M$  est dans  $\text{ind}A_i$  mais pas dans  $\mathcal{R}_{A_i}$  ;
4. Le module  $M$  est dans  $\text{ind}B_j$  mais pas dans  $\mathcal{L}_{B_j}$ .

Effectivement, si  $M$  ne satisfait pas aux deux premières conditions, alors selon 2.3.23 il existe un  $i$  tel que  $M$  est dans  $\mathcal{X}_i$  ou un  $j$  tel que  $M$  est dans  $\mathcal{Y}_j$ . Dans le premier cas, si  $M$  n'est pas dans  $\mathcal{R}_R$ , la partie de droite de  $R$ , alors il existe un chemin de  $R$ -morphisms non raffnable sectionnellement de  $M$  vers un  $R$ -projectif indécomposable. En appliquant 2.3.26 et 2.3.27, on obtient que  $M$  n'est pas dans  $\mathcal{R}_{A_i}$ , la partie de droite de  $A_i$ . De même, si  $M$  est dans  $\mathcal{Y}_j$  et n'est pas dans  $\mathcal{L}_R$ , la partie de gauche de  $R$ , il n'est pas dans  $\mathcal{L}_{B_j}$ , la partie de gauche de  $B_j$ .

Or, dans les quatre cas,  $M$  appartient à un ensemble fini (selon 2.3.17, 2.3.22 et 2.3.14). Et donc presque tous les  $R$ -modules indécomposables sont dans  $\mathcal{L}_R \cup \mathcal{R}_R$ , et l'algèbre  $R$  est de type laura.

De plus, elle ne peut pas être quasi-inclinée de type canonique puisqu'aucune de ses bandes n'admet des flèches entrantes et des flèches sortantes à la fois (voir théorèmes 2.6

et 3.4 de [21]).

□

Soit  $R$  une algèbre laura non quasi-inclinée de type canonique. Soient  $({}_i\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , les parties stables à gauche des composantes du carquois d'Auslander-Reiten de  $R$  qui contiennent un nombre infini d'éléments (comme  $R$  est de type laura,  $\Lambda$  est fini). Soient  $({}_i\Sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une tranche complète de chacune de ces parties stables (comme chaque composante a un nombre fini d'orbites, on peut prendre une telle tranche). Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on définit  ${}_\infty R_\lambda$  la sous-catégorie pleine générée par le support de  ${}_i\Sigma_\lambda$ . L'algèbre extrême à gauche de  $R$ ,  ${}_lR$ , est par définition le produit des  ${}_\infty R_\lambda$ .

**Corollaire 2.3.29** *Soit  $Q$  un carquois admettant au moins une bande et tel que chacune d'entre elles admet seulement des flèches entrantes ou seulement des flèches sortantes, alors si  $R = kQ/I$  est une algèbre de cordes qui n'admet pas de DOZE, elle est de type laura non quasi-inclinée ou inclinée et dans le premier cas, ses algèbres extrêmes à gauche et à droite sont inclinées de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . Conséquemment, toute algèbre de cordes non quasi-inclinée ne contenant pas de DOZE est domestique.*

**Démonstration :** Si  $R$  est quasi-inclinée, alors elle est inclinée puisqu'aucun cycle n'admet à la fois des flèches entrantes et des flèches sortantes ([20]).

Si  $R$  n'est pas quasi-inclinée, comme  $\mathcal{X}_i$  est tel que si  $M$  est dans  $\mathcal{X}_i$  et qu'il existe un morphisme non nul allant de  $M$  vers  $M'$ , alors  $M'$  est dans  $\mathcal{X}_i$ , et que seulement un nombre fini de  $A_i$ -modules ne sont pas dans  $\mathcal{X}_i$ , on a que  $\mathcal{X}_i$  contient une tranche complète de  $\text{mod}A_i$  et que cette tranche complète nous donne un facteur direct de l'algèbre extrême à droite de  $R$ . De plus, l'algèbre extrême à droite ne peut contenir aucun autre facteur que les  $A_i$  (dans ce cas, selon le raisonnement suivi en 2.3.28, on obtiendrait un nombre infini de  $R$ -modules qui ne sont pas dans  $\mathcal{L}_R \cup \mathcal{R}_R$ ). On obtient de la même manière que l'algèbre extrême à gauche de  $R$  est le produit des  $B_j$ , d'où le résultat. La domesticité de

$R$  suit de [3].

□

# CHAPITRE 3

## Algèbres de corde de type laura

### 3.1 Modules de corde DOZÉS

Dans cette section, nous étudions les algèbres de cordes contenant un double zéro enlacé. Nous démontrons que ces algèbres ne sont pas de type laura.

**Définition 3.1.1** *Pour  $R = kQ/I$  une algèbre de cordes, admettant un double zéro enlacé  $\alpha_1 \dots \alpha_l \omega_1 \omega_2^n \omega_3 \beta_m \dots \beta_1$ , le module de corde  $M_n = M(\sigma_n)$  associé à la corde  $\sigma_n = \alpha_3 \dots \alpha_l \omega_1 \omega_2^n \omega_3 \beta_m \dots \beta_3$  est appelé un module de corde dozé de puissance  $n$ . Par convention,  $\alpha_3 \dots \alpha_l$  représentera le chemin trivial si la relation  $\alpha_1 \dots \alpha_l$  est de longueur 2, et de même pour  $\beta_m \dots \beta_3$ .*

**Théorème 3.1.2** *Soit  $R$  une algèbre de cordes contenant un DOZE. Alors les modules de corde dozés ont une dimension projective et une dimension injective plus grande ou égale à deux. Par conséquent  $R$  n'est pas de type laura.*

**Démonstration :**

Soit  $\rho_1\omega_1\omega_2\omega_3\rho_2$  un DOZE où  $\omega_2$  est une bande non triviale,  $\rho_1 = \alpha_1\dots\alpha_l$  et  $\rho_2 = \beta_m\dots\beta_1$ . Soient  $M_n = M(\sigma_n)$  le module dozé et  $I$  la couverture injective de  $M_n$ .

Soit  $\alpha_1\dots\alpha_l\alpha_{l+1}\dots\alpha_k$  le plus long chemin étant une sous-marche à la gauche de  $\sigma_n$  et  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$  les points par lesquels il passe, alors  $x_{k+1}$  est un puits de  $\sigma_n$  et donc  $I_{x_{k+1}}$  est un facteur direct de  $I$ . Si  $\pi_1$  désigne la projection canonique sur la première composante et que  $M(x)$  et  $M(\alpha)$  désignent respectivement l'espace vectoriel associé au point  $x$  et l'application linéaire associée à la flèche  $\alpha$  dans la représentation  $M$ , alors on a les identités suivantes :

- $\pi_1 \circ M_n(\alpha_i) = \pi_1$  pour tout  $i$  tel que  $3 \leq i \leq k$ ;
- $\pi_1 \circ M_n(\alpha_2) = 0$  par définition de  $M_n$ ;
- $\pi_1 \circ I(\alpha_i) = \pi_1$  pour tout  $i$  tel que  $2 \leq i \leq k$ , puisque  $\alpha_i\dots\alpha_k$  est le premier chemin non nul se rendant à  $e(\alpha_k)$  qui est un puit de  $\sigma_n$ ;
- $\pi_1 \circ I(\alpha_1) = 0$  puisque  $\alpha_1\dots\alpha_l$  est une relation terminant en  $x_{l+1}$  et de longueur minimale pour cette propriété, et parce qu'on projette sur les deuxièmes coordonnées.

Soient  $\iota$  l'inclusion de  $M_n$  dans  $I$ ,  $\iota_x$  l'application linéaire induite par  $\iota$  entre  $M_n(x)$  et  $I(x)$ ,  $C = \text{Coker } \iota$  et  $c = \text{coker } \iota$ . Alors :

- $\pi_1 \circ \iota_{x_i} = \pi_1$  pour tout  $3 \leq i \leq k$ ;
- $\pi_1 \circ \iota_{x_2} = 0$ , en appliquant  $\pi_1$  sur l'identité  $\iota_{x_3} \circ M_n(\alpha_2) = I(\alpha_2) \circ \iota_{x_2}$ ;
- $\pi_1(C(x_2)) \cong k$  puisque  $\pi_1 \circ \iota_{x_2} = 0$  et que  $\pi_1(I(x_2)) \cong k$ ;
- $\pi_1 \circ c_{x_2} = \pi_1$ ;
- $\pi_1 \circ c_{x_3} = 0$ ;

En appliquant  $\pi_1$  sur l'identité  $C(\alpha_1) \circ c_{x_1} = c_{x_2} \circ I(\alpha_1)$ , on obtient que  $\pi_1 \circ C(\alpha_1) \circ c_{x_1} = \pi_1 \circ c_{x_2} \circ I(\alpha_1) = \pi_1 \circ I(\alpha_2) = 0$ . Or, comme  $c_{x_1}$  est un épimorphisme, on a que  $\pi_1 \circ C(\alpha_1) = 0$ . On démontre de la même manière que  $\pi_1 \circ C(\alpha_2) = 0$ , et que  $\pi_1 \circ C(\beta) = 0$  pour toute flèche  $\beta$  de source  $x_2$ .

Donc  $C$  admet un facteur direct indécomposable dont le support ne contient pas  $x_1$  et

admet  $x_2$  pour puits. Ainsi ce facteur direct (et donc  $C$ ) n'est pas un module injectif.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & id_k \\
 & & & & \longrightarrow & & \longrightarrow \\
 & \nearrow \pi_1 & & \nearrow \pi_1 & & \nearrow \pi_1 & \nearrow \pi_1 \\
 M_n(x_1) & \xrightarrow{M_n(\alpha_1)} & M_n(x_2) & \xrightarrow{M_n(\alpha_2)} & M_n(x_3) & \xrightarrow{M_n(\alpha_3)} & M_n(x_4) \\
 \downarrow \iota_{x_1} & & \downarrow 0 & \downarrow \iota_{x_2} & \downarrow id_k & \downarrow \iota_{x_3} & \downarrow id_k \\
 & \nearrow \pi_1 & & \nearrow \pi_1 & & \nearrow \pi_1 & \nearrow \pi_1 \\
 I(x_1) & \xrightarrow{I(\alpha_1)} & I(x_2) & \xrightarrow{I(\alpha_2)} & I(x_3) & \xrightarrow{I(\alpha_3)} & I(x_4) \\
 \downarrow c_{x_1} & & \downarrow 0 & \downarrow c_{x_2} & \downarrow 0 & \downarrow c_{x_3} & \downarrow c_{x_4} \\
 & \nearrow \pi_1 & & \nearrow \pi_1 & & \nearrow \pi_1 & \nearrow \pi_1 \\
 C(x_1) & \xrightarrow{C(\alpha_1)} & C(x_2) & \xrightarrow{C(\alpha_2)} & C(x_3) & \xrightarrow{C(\alpha_3)} & C(x_4)
 \end{array}$$

□

En 2003 Skowroński émit la conjecture suivante :

**Conjecture 3.1.3 (Skowroński)** *Une algèbre est laura si et seulement si elle n'admet qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de modules indécomposables ayant une dimension projective et une dimension injective plus grande ou égale à 2.*

Il est à noter que cette conjecture a été démontrée si on remplace le terme laura par algèbre collée à gauche ou algèbre collée à droite [2], mais n'a pas encore été prouvée pour les autres classes d'algèbres de type laura. Elle tire tout son intérêt du fait que si elle était vérifiée pour toutes les algèbres de type laura, ces dernières seraient maintenant conscrites à l'aide de propriétés homologiques.

**Théorème 3.1.4** *Soit  $R = kQ/I$  une algèbre de cordes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il n'existe aucun double zéro enlacé sur  $(Q, I)$  ;*

b)  $R = kQ/I$  est de type *laura* ;

c)  $R$  admet seulement un nombre fini de modules indécomposables ayant une dimension projective et une dimension injective plus grande ou égale à 2.

**Démonstration :** Démontrons premièrement que l'énoncé a) implique l'énoncé b) :

1. S'il n'y a aucune bande, l'algèbre est de représentation finie et c'est terminé ;
2. S'il y a une bande qui a des flèches entrantes et des flèches sortantes, 2.2.3 nous donne l'énoncé ;
3. Si chacune des bandes a seulement des flèches entrantes ou seulement des flèches sortantes, 2.3.28 s'applique.

L'énoncé b) implique trivialement le c). L'énoncé c) implique le a) selon 3.1.2.

□

Notre objectif est maintenant de généraliser ce résultat aux algèbres bisérielles spéciales.



## 3.2 Algèbres bisérielles spéciales de type laura et conjecture de Skowroński

Nos résultats peuvent s'étendre à une classe d'algèbre plus générale, celle des algèbres bisérielles spéciales.

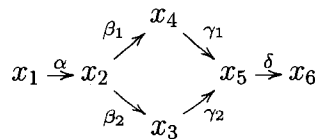
**Définition 3.2.1** Soit  $R$  une algèbre. Elle est bisérielle spéciale si elle admet une présentation  $R = kQ/I$  telle que :

1. Tout point admet au plus deux flèches entrantes et deux flèches sortantes ;
2. Toute flèche  $\alpha : x \rightarrow y$  admet au plus une flèche  $\beta : y \rightarrow z$  telle que  $\alpha\beta \neq 0$  et au plus une flèche  $\gamma : z \rightarrow x$  telle que  $\gamma\alpha \neq 0$ .

Pour toute algèbre bisérielle spéciale  $R$ , on notera  $J$  l'idéal engendré par les classes de chemins apparaissant dans une relation non monomiale de l'idéal  $I$  avec un coefficient non nul. Dans ce cas,  $R/J$  est toujours une algèbre de cordes. Effectivement, les deux premières conditions de la définition 3.2.1 sont trivialement satisfaites puisqu'on ne retire aucune relation zéro. De plus, l'idéal est monomial.

**Définition 3.2.2** Soient  $R = kQ/I$  une algèbre bisérielle spéciale et  $(\rho_1, \rho_2)$  deux relations zéro consécutives sur  $Q$ , on dira qu'elles forment un double zéro enlacé si elles forment un double zéro enlacé sur  $R/J$ .

### Exemple 3.2.3



où  $\alpha\beta_1 = 0$ ,  $\gamma_1\delta = 0$  et  $\beta_1\gamma_1 = \beta_2\gamma_2$  ne contient aucun DOZE.

Selon [29], on a que tout  $R$ -module qui n'est pas projectif-injectif est aussi un  $R/J$ -module, ce qui implique que tout  $R$ -module qui n'est pas projectif-injectif est de corde ou de bande. De plus, le foncteur  $\text{mod}R/J \rightarrow \text{mod}R$  de restriction des scalaires est plein, fidèle et transforme un morphisme irréductible dans  $\text{mod}R/J$  en un morphisme irréductible dans  $\text{mod}R$  (cela découle du fait que si un monomorphisme ou un épimorphisme se factorise par un projectif-injectif, il scinde).

Nous sommes maintenant prêts à démontrer notre résultat.

**Théorème 3.2.4** *Soit  $R = kQ/I$  une algèbre bisérielle spéciale. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $R = kQ/I$  est de type laura ;
- b)  $R/J$  est de type laura ;
- c) Il n'existe aucun double zéro enlacé sur  $(Q, I)$  ;
- d)  $R$  admet un nombre fini de modules indécomposables ayant une dimension projective et une dimension injective plus grande ou égale à 2.

**Démonstration :** La démonstration de (a) implique (d) découle de la définition d'algèbre de type laura.

Supposons qu'il existe un DOZE sur  $(Q, I)$  et soit  $M_n$  un module dozé sur  $R/J$ , alors  $M_n$  est un  $R$ -module aussi. On a montré que la dimension injective sur  $R/J$  de  $M_n$  est plus grande ou égale à deux en s'appuyant sur la construction de l'injectif  $I_{x_{i+1}}$  et du conoyau  $C$ . Remarquons qu'un DOZE sur  $R$  ne contient aucun chemin impliqué dans une relation binomiale. En appliquant la même technique de démonstration qu'en 3.1.2 à  $R$ , on montre que la dimension injective sur  $R$  de  $M_n$  est plus grande ou égale à deux. On obtient un nombre infini de modules indécomposables ayant une dimension projective et une dimension injective plus grande ou égale à 2, ce qui démontre que d) implique c).

La démonstration de c) implique b) découle de 3.1.2.

Pour la dernière implication, soit  $R$  une algèbre bisérielle spéciale telle que  $R/J$  est laura. Soit  $M$  un  $R$ -module non projectif-injectif qui n'est pas dans  $\mathcal{L}_R \cup \mathcal{R}_R$ . Alors il existe un chemin non sectionnellement raffnable (\*) allant de  $M$  vers un  $R$ -projectif  $P$  et un chemin non sectionnellement raffnable (\*\*) allant d'un  $R$ -injectif  $I$  vers  $M$ .

$$(*) \quad M \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \tau^{-1}M \rightsquigarrow P \quad (**) \quad I \rightsquigarrow \tau M \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} M$$

La non sectionnalité de (\*) et de (\*\*) est préservée dans  $R/J$  puisqu'une suite presque scindée admettant un projectif-injectif comme terme médian admet toujours au moins un autre terme [6]. De plus, si  $P$  et  $I$  ne sont pas projectif-injectifs, alors ils sont  $R/J$ -projectif et  $R/J$ -injectif respectivement. Si  $P$  l'est, alors  $P/\text{soc}P$  est un  $R/J$ -projectif et donc en composant (\*) et le morphisme minimal presque scindé à gauche allant de  $P$  vers  $P/\text{soc}P$ , on obtient un chemin non sectionnellement raffnable de  $M$  vers un  $R/J$ -projectif.

$$M \rightsquigarrow P \rightarrow P/\text{soc}P$$

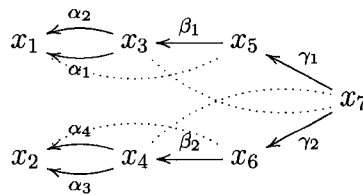
On procède de même avec  $I$ ,  $\text{rad}I$  et (\*\*) si  $I$  est un projectif-injectif. Dans tous les cas, si  $M$  est un  $R$ -module non projectif-injectif qui n'est pas dans  $\mathcal{L}_R \cup \mathcal{R}_R$ , alors il n'est pas élément de  $\mathcal{L}_{R/J} \cup \mathcal{R}_{R/J}$ , et donc l'ensemble des  $R$ -modules indécomposables qui ne sont pas dans  $\mathcal{L}_R \cup \mathcal{R}_R$  est fini.

□

### 3.3 Exemples

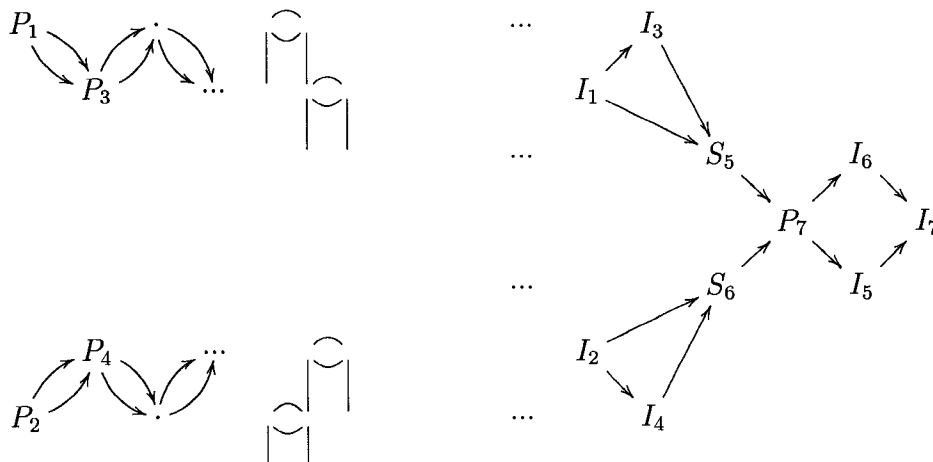
#### 3.3.1 Algèbres de type laura

**Exemple 3.3.1** On revient à l'exemple donné plus haut, où  $R = kQ/I$  avec  $Q$  :



et  $I$  engendré par les relations  $\beta_1\alpha_1$ ,  $\beta_2\alpha_4$ ,  $\gamma_2\beta_2$  et  $\gamma_1\beta_1$ .

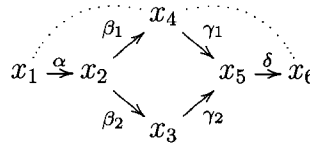
Selon les résultats du chapitre 3,  $R$  est une algèbre de type laura et son carquois d'Auslander-Reiten est obtenu en calculant celui des algèbres inclinées le composant, sauf pour un nombre fini de modules. On obtient le carquois d'Auslander-Reiten suivant



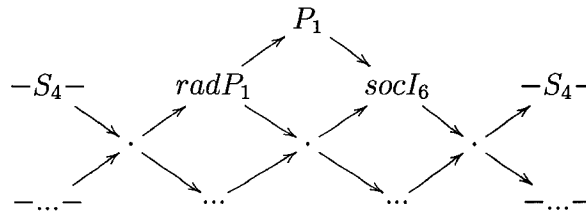
Les modules n'étant pas dans  $\mathcal{L}_R$  sont les quatre modules à l'extrême droite.

### 3.3.2 Algèbres n'étant pas de type laura

**Exemple 3.3.2** Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est :

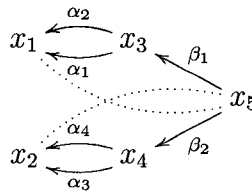


et  $I$  est engendré par  $\alpha\beta_1$  et  $\gamma_1\delta$ . Cette algèbre de corde contient le DOZE  $\alpha\beta_1\gamma_1\delta$ . L'algèbre n'est par conséquent pas de type laura. Effectivement, la construction du carquois d'Auslander-Reiten nous montre que le projectif-injectif  $P_1 = I_6$  n'est ni dans la composante postprojective, ni dans la composante préinjective. La composante contenant  $P_1$  est construite comme suit :



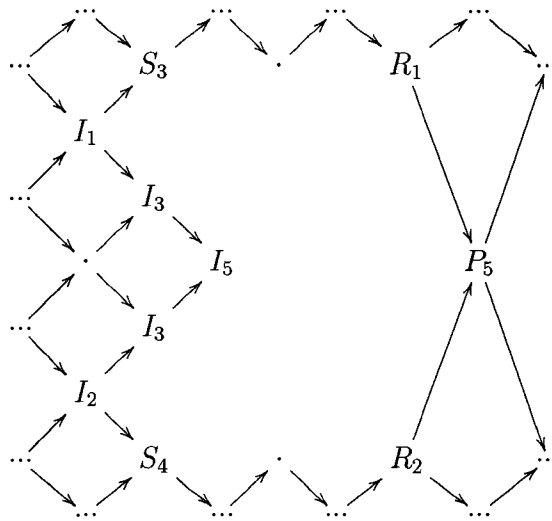
Il s'agit d'un tube qui contient un nombre infini de modules de dimensions projective et injective plus grande ou égale à deux. Remarquons que nos modules dozés se trouvent justement dans cette composante.

**Exemple 3.3.3** Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est :



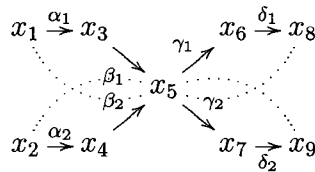
et  $I$  est engendré par  $\beta_1\alpha_1$  et  $\beta_2\alpha_4$ . Alors  $R$  contient le DOZE  $\beta_1\alpha_1\alpha_2^{-1}\beta_1^{-1}\beta_2\alpha_4$ . Cette algèbre nous offre plus de difficultés pour être classifiée. Il suit du calcul direct de la composante contenant les injectifs que  $R$  n'a pas de composante préinjective, et donc qu'elle n'est pas de type laura. Ce calcul est long et fastidieux, notre critère démontre donc toute son utilité dans ce cas-ci.

**Composante contenant les injectifs :**



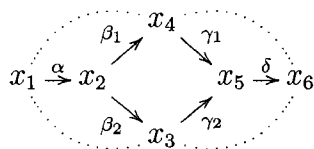
### 3.3.3 Algèbres n'étant pas de cordes

**Exemple 3.3.4** Soit  $R = kQ/I$  où  $Q$  est :



et  $I$  est engendré par  $\alpha_i\beta_i$  et  $\gamma_i\delta_i$ . Cette algèbre n'est pas une algèbre de cordes. Par contre, en appliquant l'action évidente du groupe  $\mathbb{Z}_2$ , on obtient l'algèbre de groupe gauche  $A[G]$

donnée par le carquois suivant :



où  $I$  est engendré par  $\alpha\beta_1$ ,  $\alpha\beta_2$ ,  $\gamma_2\delta$  et  $\gamma_1\delta$ . C'est une algèbre de cordes qui contient le DOZE  $\alpha\beta_1\gamma_1\delta$ , l'algèbre initiale n'est donc pas de type lura selon [5].

# CONCLUSION

Nous avons défini un nouveau critère sur les carquois liés servant à déterminer si une algèbre bisérielle spéciale est de type laura ou non. Nous avons premièrement étudié la structure des algèbres ne contenant pas de double-zéro enlacé et avons conclu qu'elles pouvaient être classées selon trois types : Les algèbres ne contenant pas de cycle sans relations, qui sont de représentation finie, les algèbres dont au moins un cycle sans relation admet des flèches entrantes et des flèches sortantes, qui sont quasi-inclinées, et les algèbres dont tous les cycles admettent seulement des flèches entrantes ou seulement des flèches sortantes, qui de type laura et non quasi-inclinée de type canonique. L'étude de la dernière classe a par le fait même mené à une meilleure compréhension de la structure des algèbres extrêmes à droite et à gauche des algèbres de cordes. Nous avons ensuite défini une famille infinie de modules de dimension projective et injective plus grande ou égale à deux pour les algèbres contenant un double zéro enlacé. Nous avons par le fait même démontré la conjecture de Skowroński pour ce type d'algèbre.

Cette thèse vise à élargir les critères sur le carquois ordinaire permettant de déterminer si une algèbre est de type laura ou non. La démonstration de la conjecture de Skowroński renforce l'intérêt que nous portons à cette classe d'algèbre. En s'appuyant sur le travail fait pour les algèbres inclinées, on pourrait en connaître beaucoup plus sur les algèbres de type laura.



Les résultats de cette thèse pourront certainement être étendus à des algèbres qui en sont pas bisérielles spéciales. Il semble raisonnable de penser que la notion de double zéro peut être étendue au moins aux algèbres monomiales, si on accepte de la modifier légèrement. Cette notion semble mener à une notion de double zéro enlacé généralisé, qui permettrait d'étendre notre théorème. La difficulté dans ce cas-ci consiste à traiter les cas comme le dernier exemple du chapitre 3. L'algèbre comprise entre les relations zéro ne contient aucun cycle mais admet un nombre infini de représentations ayant le bon socle et la bonne coiffe. La poursuite de nos travaux devrait nous permettre de surmonter cette difficulté et d'en arriver à un résultat plus général.

Ces travaux trouvent déjà une application indirecte (par les méthodes de calcul développées) dans un article conjoint avec Castonguay, Huard et Lanzilotta sur les algèbres toupies. Ils devraient de plus alimenter la poursuite de nos travaux dans d'autres champs : algèbres de groupe gauches, homologie et cohomologie.

# Bibliographie

- [1] I. Assem. *Algèbres et modules : cours et exercices*. Enseignement des mathématiques. Les Presses de l'Université d'Ottawa–Masson, Ottawa–Paris, 1997.
- [2] I. Assem and F. Coelho. Glueings of tilted algebras. *J. Pure and Appl. Algebra*, 96(3) :225–243, 1994.
- [3] I. Assem and F. Coelho. Two-sided gluings of tilted algebras. *J. Algebra*, 269(2) :456–479, 2003.
- [4] I. Assem, F. Coelho, M. Lanzilotta, D. Smith, and S. Trepode. Algebras determined by their left and right parts. *Contemp. Math*, 376 :13–47, 2005.
- [5] I. Assem, M. Lanzilotta, and M.J. Redondo. Laura skew group algebras. *Comm. Algebra*, 35(7) :2241–2257, 2007.
- [6] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of Representation Theory of Associative Algebras*. London Math. Soc. students Texts. Cambridge University Press.
- [7] I. Assem and A. Skowroński. Iterated tilted algebras of type  $A_n^\infty$ . *Math. Z.*, (195) :269–290, 1987.
- [8] M. Auslander, I. Reiten, and S.O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Number 36 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [9] J. Bélanger and C. Tosar. Shod string algebras. *Comm. Algebra*, 33(8) :2465–2487, 2005.
- [10] K Bongartz and P. Gabriel. Covering spaces in representation theory. *Invent. Math.*, 65(3) :361–378, 1982.
- [11] M.C.R. Butler and C.M. Ringel. Auslander-Reiten Sequences With Few Middle Terms ; Applications to String Algebras. *Comm. Algebra*, 15(1-2) :145–179, 1987.
- [12] W. W. Crawley-Boevey. Maps between representations of zero-relations algebras. *J. Algebra*, 126(2) :259–263, 1989.
- [13] W. W. Crawley-Boevey. Tameness of biserial algebras. *Arch. Math.*, 65(5) :399–407, 1995.
- [14] K. Fuller. Biserial rings. *Lecture Notes in Math.*
- [15] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Math.*, 6 :71–103, 1972.
- [16] I.M. Gelfand and V.A. Ponomarev. Indecomposable representations of the Lorentz group. *Uspehi Math. Nauk*, 23(2) :3–60, 1968.
- [17] D. Happel. A characterization of hereditary categories with tilting object. *Invent. Math.*, 144(2) :381–398, 2001.
- [18] D. Happel, I. Reiten, and S.O. Smalø. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 120(575) :vii + 88 pp., 1996.
- [19] D. Happel and C.M. Ringel. Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2) :399–443, 1982.
- [20] F. Huard and S. Liu. Tilted Special Biserial Algebras. *J. Algebra*, 217(2) :679–700, 1999.
- [21] F. Huard and S. Liu. Tilted String Algebras. *J. Pure ; Appl. Algebra*, 153 :151–164, 2000.
- [22] H. Krause. Maps between tree and band modules. *J. Algebra*, (1) :186–194, 1991.

- [23] C.M. Ringel. The indecomposable representations of dihedral 2-groups. *Math. Ann.*, 214 :19–34, 1975.
- [24] C.M. Ringel. *Tame Algebras; Integral Quadratic Forms*. Number 1099 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.
- [25] J. Schröer. On the infinite radical of a module category. *Proc. London Math. Soc.*, 3(3) :651–674, 2000.
- [26] A. Skowroński. Minimal representation infinite artin algebras. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (116) :229–243, 1994.
- [27] A. Skowroński. On Artin algebras with almost all indecomposable modules of projective or injective dimension at most one. *Cent. Eur. J. Math.*, 1(1) :108–122, 2003.
- [28] A. Skowroński and J. Waschbüsch. Representation-finite biserial algebras. *J. Reine Angew. Math.*, (345) :172–181, 1983.
- [29] B. Wald and I. Waschbüsch. Tame biserial algebras. *J. Algebra*, 95 :480–500, 1985.