

# Algèbres inclinées amassées aimables

Pierre-Guy Plamondon

18 juillet 2008

mémoire présenté au Département de mathématiques en vue de  
l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada

III-1863



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-49565-0*  
*Our file    Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-49565-0*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

Le 17 juillet 2008

*le jury a accepté le mémoire de M. Pierre-Guy Plamondon dans sa version finale.*

*Membres du jury*

M. Ibrahim Assem  
Directeur  
Département de mathématiques

Mme Virginie Charette  
Membre  
Département de mathématiques

M. Ralf Schiffler  
Membre externe  
Mathematics and Statistics Department - University of Massachusetts

M. Thomas Brüstle  
Président-rapporteur  
Département de mathématiques

# SOMMAIRE

Dans ce mémoire, les algèbres inclinées amassées aimables sont classifiées. Celles-ci sont précisément de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . La démonstration décrit explicitement le carquois lié de ces algèbres et fait usage de l'*extension par relations* définie par Assem, Brüstle et Schiffler. Il est également prouvé que celles-ci s'apparentent aux algèbres obtenues à partir de triangulations du disque et du cylindre.

# REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord remercier mon directeur Ibrahim Assem pour tous les enseignements et encouragements qu'il m'a procurés au cours de mes études à la maîtrise. Merci également à Thomas Brüstle, qui m'a fait connaître les aspects géométriques contenus dans ce travail, et avec qui il est toujours édifiant mathématiquement et personnellement de discuter. Enfin, de grandes et petites discussions avec Virginie Charette, Ralf Schiffler et Daniel Labardini-Fragoso m'ont permis de mieux comprendre les algèbres de triangulation. Je les en remercie.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>SOMMAIRE</b>	<b>ii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>iii</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>1 Algèbres, modules et catégories</b>	<b>3</b>
1.1 Notions de base . . . . .	3
1.2 Carquois et représentations . . . . .	8
1.3 Modules projectifs et résolutions . . . . .	11
1.4 Algèbres aimables . . . . .	16
1.5 Notes bibliographiques . . . . .	20
<b>2 Extensions</b>	<b>22</b>
2.1 Première définition : suites exactes . . . . .	22
2.1.1 Suites exactes courtes . . . . .	24

2.1.2	Le cas général . . . . .	28
2.1.3	La structure de $k$ -module . . . . .	30
2.2	Seconde définition : Hom . . . . .	35
2.3	Équivalence des deux définitions . . . . .	35
2.4	Notes bibliographiques . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Algèbres inclinées et inclinées amassées</b>	<b>42</b>
3.1	Algèbres inclinées . . . . .	42
3.2	Algèbres inclinées amassées . . . . .	43
3.3	Le lien : extensions par relations . . . . .	45
3.4	Notes bibliographiques . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Le théorème principal</b>	<b>49</b>
4.1	Premières implications . . . . .	50
4.2	Extension par relations d'une algèbre inclinée de type $\mathbb{A}_n$ ou $\tilde{\mathbb{A}}_n$	51
4.2.1	Suites exactes nulles . . . . .	52
4.2.2	Flèches . . . . .	54
4.2.3	Relations . . . . .	60
4.3	Preuve du théorème principal . . . . .	65
4.4	Notes bibliographiques . . . . .	65

<b>5 Algèbres et triangulations</b>	<b>67</b>
5.1 Surfaces et triangulations . . . . .	67
5.2 Algèbre de triangulation . . . . .	71
5.3 Mutations . . . . .	74
5.4 Disques et cylindres . . . . .	77
5.5 Notes bibliographiques . . . . .	79
<b>CONCLUSION</b>	<b>81</b>



# INTRODUCTION

Depuis leur introduction en 2002 par Fomin et Zelevinsky (voir [FZ]), les algèbres amassées ont attiré les chercheurs de nombreux domaines des mathématiques. Certains en cherchent des applications, d'autres tentent de mettre au jour leurs propriétés.

L'un des outils employés à cette fin est la catégorie amassée introduite par Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov (voir [BMRRT]). Des catégories amassées sont nées les algèbres inclinées amassées (voir [BMR]). Le nom de ces algèbres rappelle la ressemblance de leur construction avec celle des algèbres inclinées (voir, par exemple, [ASS]).

Parmi les facettes de l'étude de ces structures se trouve celle de la théorie des représentations. L'une des questions à laquelle ce travail cherche à répondre, dans un cas bien particulier, concerne le carquois lié des algèbres inclinées amassées.

Un autre aspect de l'étude des algèbres amassées est d'ordre géométrique. Fomin, Shapiro et Thurston (voir [FST]) ont établi un lien avec les triangulations de surfaces avec bords. En définissant des relations pour des carquois provenant de telles triangulations, il est possible d'obtenir une algèbre. Ceci

avait été fait par Caldero, Chapoton et Schiffler dans le cas du disque (voir [CCS]). Une autre question traitée par ce mémoire concerne les algèbres inclinées amassées obtenues à partir de triangulations.

Le mémoire est organisé comme suit.

Le chapitre 1 sert à fixer les notations et rappeler les résultats essentiels de la théorie.

Le chapitre 2 introduit les modules d'extensions de deux façons différentes et démontre l'équivalence des deux définitions.

Le chapitre 3 rappelle les notions nécessaires de la théorie des algèbres inclinées et inclinées amassées. Un lien entre les deux, développé dans [ABS], y est également énoncé.

Le chapitre 4 contient la démonstration du résultat principal de ce mémoire.

Enfin, le chapitre 5 développe un lien entre les algèbres traitées au chapitre 4 et les triangulations du disque et du cylindre.

# CHAPITRE 1

## Algèbres, modules et catégories

Les objets d'étude principaux de ce mémoire sont les algèbres et leurs modules. Ce chapitre ne prétend pas servir de référence sur ces sujets ; les définitions et les résultats importants de la théorie sont supposés connus du lecteur. L'objectif est plutôt de fixer les notations.

### 1.1 Notions de base

Dans ce travail, le mot *anneau* signifie toujours *anneau commutatif et unifié*. De même, le terme *k-algèbre* désigne toujours une *k-algèbre associative et unifiée*.

Soit  $k$  un anneau. Soient  $A$  et  $B$  deux  $k$ -algèbres. Les notations  $f : A \longrightarrow B$  et  $A \xrightarrow{f} B$  désignent toutes deux un morphisme de  $k$ -algèbres  $f$  allant de  $A$  vers  $B$ .

Le terme *idéal* désigne toujours ici un *idéal bilatère*. La notation  $I \triangleleft A$  exprime le fait que  $I$  est un idéal de  $A$ . Dans ce cas, la *k-algèbre quotient* de  $A$  par  $I$

s'écrit  $A/I$ .

Soit maintenant  $A$  une  $k$ -algèbre fixe. L'appellation  $A$ -module sous-entendra toujours  $A$ -module à droite. Si  $M$  est un  $A$ -module, alors la notation  $M_A$  servira parfois à souligner ce fait. De la même façon,  ${}_A M$  désignera un  $A$ -module à gauche.

Si  $B$  est une autre  $k$ -algèbre, l'écriture  ${}_B M_A$  est une abréviation pour  $B$ - $A$ -bimodule.

Étant donné un  $A$ -module  $M$  et un sous-module  $N$  de  $M$ , le module quotient de  $M$  par  $N$  s'écrit  $M/N$ .

Comme pour les morphismes de  $k$ -algèbres, les notations  $f : M \longrightarrow N$  et  $M \xrightarrow{f} N$  désignent un morphisme de  $A$ -modules  $f$  allant de  $M$  vers  $N$ . L'ensemble des morphismes de  $M$  vers  $N$  s'écrit  $\text{Hom}_A(M, N)$ . Cet ensemble est un  $k$ -module.

La série d'exemples qui suit contient de nombreux concepts qui seront utilisés dans la suite de ce travail.

- Exemples 1.1.1**
1. Si  $k$  est un corps, alors toute  $k$ -algèbre  $A$  est, en particulier, un  $k$ -espace vectoriel. La dimension de  $A$  sur  $k$  sera appelée la dimension de la  $k$ -algèbre  $A$ .
  2. Soient  $A$  et  $B$  deux  $k$ -algèbres. Le produit  $A \times B$  est une  $k$ -algèbre pour l'addition et la multiplication terme à terme. Une  $k$ -algèbre  $A$  telle que  $A = A' \times A''$  entraîne que  $A' = 0$  ou  $A'' = 0$  est dite connexe.
  3. Soient  $M$  un  $A$ -module et  $X$  un sous-ensemble de  $M$ . Le module en-

généralisé par  $X$  est le module

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i a_i \mid n \geq 1, x_i \in X, a_i \in A \text{ pour tout } i \text{ allant de } 1 \text{ à } n \right\}.$$

Un ensemble de générateurs de  $M$  est un sous-ensemble  $X$  de  $M$  tel que  $\langle X \rangle = M$ . S'il existe un ensemble de générateurs de  $M$  ne contenant qu'un nombre fini d'éléments, alors le module  $M$  est dit de type fini.

La notion de générateurs d'un idéal est définie de façon analogue.

4. Un module simple est un module n'ayant d'autre sous-modules que lui-même et 0.
5. Un sous-module maximal d'un module  $M$  est un sous-module propre  $L$  de  $M$  tel que si  $L'$  est un autre sous-module satisfaisant aux inclusions  $L \subseteq L'$  et  $L' \subseteq M$ , alors  $L = L'$  ou  $L' = M$ .

L'intersection de tous les sous-modules maximaux de  $M$  est un sous-module de  $M$ , appelé le radical de  $M$  et dénoté par  $\text{rad } M$ . Celui-ci possède de nombreuses propriétés dont il sera fait usage plus loin.

6. Soient  $M$  et  $N$  deux  $A$ - $A$ -bimodules. Soit  $\text{Hom}_A(M, N)$  l'ensemble des morphismes de  $M$  vers  $N$  considérés comme des  $A$ -modules à droite. Cet ensemble est un  $A$ -module à droite si la multiplication par un scalaire est définie par

$$(fa)(x) = f(ax),$$

pour tout  $f$  dans  $\text{Hom}_A(M, N)$ , tout  $a$  dans  $A$  et tout  $x$  dans  $M$ . De même, il est un  $A$ -module à gauche pour la multiplication par un scalaire définie par

$$(af)(x) = a(f(x)).$$

De plus, ces deux opérations sont compatibles ; en effet, si  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ ,  $a, b \in A$  et  $x \in M$ , alors

$$(a(fb))(x) = a((fb)(x)) = a(f(bx)) = (af)(bx) = ((af)b)(x).$$

Par conséquent,  $\text{Hom}_A(M, N)$  est un  $A - A$ -bimodule.

7. Une suite exacte est une suite de morphismes

$$\cdots \xrightarrow{f_{-2}} E_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots$$

telle que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , l'égalité  $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$  est vérifiée. Une suite exacte ayant la forme

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

est appelée une suite exacte courte.

8. Soit  $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de  $A$ -modules. Leur produit direct est noté  $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  et leur somme directe,  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ .

9. Soient  $L_1, L_2$  et  $M$  trois  $A$ -modules. Soient  $f_1 : L_1 \longrightarrow M$  et  $f_2 : L_2 \longrightarrow M$  deux morphismes. Un produit fibré de  $f_1$  et  $f_2$  est un triplet  $(P, p_1, p_2)$ , où  $P$  est un  $A$ -module,  $p_1 : P \longrightarrow L_1$  et  $p_2 : P \longrightarrow L_2$  sont deux morphismes tels que  $f_1 p_1 = f_2 p_2$ , de sorte que si  $(Q, q_1, q_2)$  est un autre triplet satisfaisant aux mêmes conditions, alors il existe un unique morphisme  $f : Q \longrightarrow P$  tel que  $q_1 = p_1 f$  et  $q_2 = p_2 f$ . Le tout est illustré ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
 Q & & & & \\
 & \searrow^{q_1} & & & \\
 & & P & \xrightarrow{p_1} & L_1 \\
 & \searrow^{q_2} & \downarrow p_2 & & \downarrow f_1 \\
 & & L_2 & \xrightarrow{f_2} & M
 \end{array}$$

*Il est possible de démontrer que le produit fibré de deux morphismes de  $A$ -modules existe toujours et est unique, à isomorphisme près.*

*Le produit fibré  $(P, p_1, p_2)$  est calculé de la façon suivante. Soit  $\ell_i : L_1 \oplus L_2 \longrightarrow L_i$  la projection canonique, pour  $i$  valant 1 et 2. Alors  $P$  est le noyau du morphisme  $f_1\ell_1 - f_2\ell_2$ , et les morphismes  $p_1$  et  $p_2$  sont les compositions de l'inclusion de  $P$  dans  $L_1 \oplus L_2$  avec  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , respectivement.*

*La notion duale est celle de somme amalgamée.*

Dans ce travail, les *catégories* seront souvent notées avec la police suivante :  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ , et ainsi de suite.

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Le terme *foncteur* de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  désignera toujours un *foncteur covariant*. Lorsque les foncteurs étudiés seront *contra-variants*, cette information sera précisée. Dans les deux cas, la notation employée pour désigner un foncteur  $F$  est  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  ou  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ .

- Exemples 1.1.2**
1. *La catégorie  $\text{Alg}_k$  a pour objets les  $k$ -algèbres et pour morphismes les morphismes de  $k$ -algèbres.*
  2. *Étant donnée une  $k$ -algèbre  $A$ , la catégorie  $\text{Mod } A$  a pour objets les  $A$ -modules et pour morphismes les morphismes de  $A$ -modules. La catégorie  $\text{mod } A$  est la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod } A$  ayant pour objets les  $A$ -modules de type fini.*
  3. *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre et soit  $M$  un  $A$ -module. Le foncteur  $\text{Hom}_A(M, -)$  de  $\text{Mod } A$  vers  $\text{Mod } k$  envoie chaque module  $N$  vers  $\text{Hom}_A(M, N)$  et*

chaque morphisme  $f : N \longrightarrow P$  vers le morphisme

$$\text{Hom}_A(M, f) : \text{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, P)$$

qui envoie un morphisme  $g$  vers  $f \circ g$ .

Le foncteur contravariant  $\text{Hom}_A(-, M)$  est défini de façon similaire.

4. Soit  $A$  une  $k$ -algèbre, où  $k$  est un corps. Le foncteur contravariant  $D = \text{Hom}_A(-, k)$  est un foncteur de  $\text{mod } A$  vers  $\text{mod } A^{\text{op}}$ . Pour le voir, il faut noter qu'en vertu de l'exemple 1.1.1 (6), pour tout  $A$ -module  $M$ , le  $k$ -espace vectoriel  $\text{Hom}_A(M, k)$  est un  $A$ -module à gauche.

## 1.2 Carquois et représentations

L'étude des algèbres sur un corps algébriquement clos peut se faire à l'aide d'un outil appelé *carquois*.

**Définition 1.2.1** Un carquois est un quadruplet  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ , où

- $Q_0$  est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets ;
- $Q_1$  est un ensemble dont les éléments sont appelés flèches ;
- $s : Q_1 \longrightarrow Q_0$  est une fonction qui associe à chaque flèche  $\alpha$  sa source  $s(\alpha)$  ;
- $b : Q_1 \longrightarrow Q_0$  est une fonction qui associe à chaque flèche  $\alpha$  son but  $b(\alpha)$ .

L'ensemble des combinaisons linéaires formelles de chemins d'un carquois  $Q$  est noté  $kQ$  ; muni de la juxtaposition des chemins et de l'addition, il forme une  $k$ -algèbre appelée *algèbre des chemins de  $Q$* .



**Exemple 1.2.2** Soit le carquois  $1 \xleftarrow{\gamma} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\alpha} 4$ . Un calcul montre que l'algèbre des chemins de ce carquois est isomorphe à  $T_4(k)$ , l'algèbre des matrices  $4 \times 4$  triangulaires supérieures.

L'idéal engendré par les flèches de  $kQ$  est noté  $\mathcal{R}$ .

**Définition 1.2.3** Un idéal  $I$  de  $kQ$  est dit admissible lorsqu'il existe un entier  $m \geq 2$  tel que

$$\mathcal{R}^m \subseteq I \subseteq \mathcal{R}^2.$$

Dans ce cas, l'algèbre  $kQ/I$  est appelée une algèbre de carquois lié, et le couple  $(Q, I)$  est appelé un carquois lié.

**Exemple 1.2.4** Soit le carquois de l'exemple 1.2.2. L'idéal  $I = \langle \alpha\beta \rangle$  engendré par le chemin  $\alpha\beta$  est un idéal admissible, car  $\mathcal{R}^4 = 0$  est inclus dans  $I$  et  $\alpha\beta \in \mathcal{R}^2$ .

Le théorème suivant dit que l'étude des  $k$ -algèbres peut se restreindre à l'étude des  $k$ -algèbres de chemins, si  $k$  est un corps algébriquement clos.

**Théorème 1.2.5** Soient  $k$  un corps algébriquement clos et  $A$  une  $k$ -algèbre sobre (voir la définition 1.3.3) et connexe de dimension finie sur  $k$ . Il existe un carquois  $Q$  et un idéal admissible  $I$  de  $kQ$  tels que  $A \cong kQ/I$ . De plus,  $|Q_0| = |\{e_1, e_2, \dots, e_n\}|$ , où  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est un ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de  $A$ , et les flèches de  $i$  vers  $j$  sont données par une base de  $e_i(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_j$ .

■

Pour le reste de cette section, il sera supposé que  $k$  est un corps algébriquement clos.

**Définition 1.2.6** Soit  $(Q, I)$  un carquois lié. Une représentation  $M$  du carquois est constituée

- pour chaque sommet  $x$  de  $Q$ , d'un espace vectoriel  $M_x$  ;
- pour chaque flèche  $\alpha : x \longrightarrow y$  de  $Q$ , d'une application linéaire  $\varphi_\alpha : M_x \longrightarrow M_y$ , de sorte que si  $\sum_{i=1}^n \alpha_{i1} \alpha_{i2} \dots \alpha_{ij_i} \in I$ , alors  $\sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha_{ij_i}} \dots \varphi_{\alpha_{i2}} \varphi_{\alpha_{i1}} = 0$ .

Il sera alors écrit  $M = \{(M_x, \varphi_\alpha)\}_{x \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ .

Lorsque tous les  $M_x$  sont de dimension finie, la représentation  $M$  est dite de type fini.

Les représentations servent à étudier les modules sur  $kQ/I$ . En fait, d'une certaine façon, les représentations *sont* les modules sur  $kQ/I$ . En outre, il existe un concept de *morphisme de représentations*.

**Définition 1.2.7** Soit  $(Q, I)$  un carquois lié. Soient  $M = \{(M_x, \varphi_\alpha)\}_{x \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  et  $N = \{(N_x, \psi_\alpha)\}_{x \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  deux représentations de  $(Q, I)$ .

Un morphisme de représentations de  $M$  vers  $N$  est une famille  $f = \{f_x : M_x \longrightarrow N_x\}_{x \in Q_0}$  d'applications linéaires telles que, pour toute flèche  $\alpha : x \longrightarrow y$  de  $Q$ , l'égalité  $f_y \varphi_\alpha = \psi_\alpha f_x$  est respectée.

Les représentations du carquois lié  $(Q, I)$ , munis des morphismes de représentations, forment une catégorie, notée  $\text{Rep}(Q, I)$ . La sous-catégorie pleine des représentations de type fini est notée  $\text{rep}(Q, I)$ .

**Théorème 1.2.8** *Les catégories  $\text{Rep}(Q, I)$  et  $\text{Mod } kQ/I$  sont équivalentes. Il en va de même pour les catégories  $\text{rep}(Q, I)$  et  $\text{mod } kQ/I$ .*

■

L'équivalence du dernier théorème sera utilisée implicitement au cours de ce mémoire : les concepts de module et de représentation seront souvent confondus.

Une dernière définition relative aux carquois sera nécessaire pour la suite.

**Définition 1.2.9** *Soient  $Q$  et  $Q'$  deux carquois. Un morphisme de carquois  $f : Q \rightarrow Q'$  est défini par deux fonctions  $f_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0$  et  $f_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$  telles que pour toute flèche  $\alpha$  de  $Q$ , les égalités  $f_0(s(\alpha)) = s(f_1(\alpha))$  et  $f_0(b(\alpha)) = b(f_1(\alpha))$  tiennent.*

*Un isomorphisme de carquois est un morphisme de carquois  $f$  tel que  $f_0$  et  $f_1$  sont des bijections.*

### 1.3 Modules projectifs et résolutions

Les modules projectifs sont d'une importance cruciale pour le reste de ce mémoire.

**Définition 1.3.1** *Un  $A$ -module  $P$  est dit projectif si, et seulement si, pour tout épimorphisme  $u : M \rightarrow N$  de  $A$ -modules et tout morphisme  $f : P \rightarrow N$ , il existe un morphisme  $\bar{f} : P \rightarrow M$  tel que  $u\bar{f} = f$ .*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & \nearrow \bar{f} & \downarrow f & & \\
 M & \xrightarrow{u} & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Le théorème suivant exprime l'importance des modules projectifs de type fini pour décrire une algèbre.

**Théorème 1.3.2** *Soient  $k$  un corps et  $A$  une  $k$ -algèbre de dimension finie. Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  un ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Alors*

1. *pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $e_i A$  est un  $A$ -module projectif indécomposable ;*
2. *le  $A$ -module  $A_A$  est isomorphe à  $\bigoplus_{i=1}^n e_i A$ . De plus, les  $e_i A$  sont indépendants du choix des idempotents, à permutation et isomorphisme près.*

■

Ce théorème permet d'énoncer la définition suivante.

**Définition 1.3.3** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre, et soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  un ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. La  $k$ -algèbre  $A$  est dite sobre lorsque, pour tous  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $e_i A$  n'est pas isomorphe à  $e_j A$  lorsque  $i$  est différent de  $j$ .*

La notion duale de module projectif est celle de *module injectif*.

Il est possible de décrire les représentations des modules projectifs (et injectifs, par dualité), comme le fait la proposition suivante. Cette description permettra un travail direct sur ces représentations plus tard.

**Proposition 1.3.4** *Soit  $k$  un corps algébriquement clos, et soit  $A = kQ/I$  une  $k$ -algèbre. Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  un ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux.*

1. *Soit  $M = (M_j, \varphi_\alpha)$  une représentation de  $(Q, I)$ . Le radical de  $M$  est  $(J_j, \psi_\alpha)$ , où  $J_j = \sum_{\alpha: \ell \rightarrow j} \text{Im } \varphi_\alpha$  et  $\psi_\alpha$  est la restriction de  $\varphi_\alpha$  à  $J_{s(\alpha)}$ .*
2. *Le module simple associé à  $e_i$  est  $M = (M_j, \varphi_\alpha)$ , où chaque  $M_j$  est nul, sauf  $M_i$ , qui vaut  $k$ .*
3. *Le module projectif indécomposable  $e_i A$  est  $P = (P_j, \varphi_\alpha)$ , où  $P_j$  est l'espace vectoriel ayant pour ensemble de générateurs l'ensemble des classes de chemins de  $i$  vers  $j$ , et pour chaque flèche  $\alpha : j \rightarrow \ell$  de  $Q$ ,  $\varphi_\alpha : P_j \rightarrow P_\ell$  est la multiplication à droite par  $\alpha + I$ .*

■

**Exemple 1.3.5** *Soit  $A = kQ/I$ , où  $Q$  est le carquois  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$  et  $I$  est l'idéal engendré par  $\beta\gamma$ . Les modules projectifs indécomposables sont*

$$\begin{aligned}
 P_1 &= k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0 ; & P_2 &= 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0 ; \\
 P_3 &= 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k ; & P_4 &= 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k .
 \end{aligned}$$

Le concept de *résolution projective* d'un  $A$ -module est défini dans les pages qui suivent. Une méthode de calcul est également établie.

**Définition 1.3.6** Soient  $M$  et  $P$  deux  $A$ -modules, où  $P$  est projectif. Soit  $f : P \longrightarrow M$  un épimorphisme de  $A$ -modules. Le couple  $(P, f)$  est appelé une couverture projective de  $M$  si, et seulement si, tout morphisme  $h : L \longrightarrow P$  tel que  $fh$  est un épimorphisme est lui-même un épimorphisme.

Par abus de langage, le module  $P$  et le morphisme  $f$  seront parfois appelés séparément des couvertures projectives de  $M$ .

Dans ce travail,  $k$  est souvent supposé être un corps algébriquement clos. Pour cette raison, la proposition suivante sera utile.

**Proposition 1.3.7** Si  $k$  est un corps et  $A$  est une  $k$ -algèbre de dimension finie, alors tout  $A$ -module de type fini admet une couverture projective.

■

**Exemple 1.3.8** Soit  $k$  un corps. Une méthode de calcul de la couverture projective d'un  $A$ -module de type fini  $M$  est la suivante.

D'abord, la couverture projective d'une somme directe est la somme directe des couvertures projectives des facteurs directs.

Ensuite, si  $M$  est un module simple associé à l'idempotent  $e$ , alors sa couverture projective est  $(eA, p)$ , où  $p : eA \longrightarrow eA/\text{rad } eA$  est la projection canonique.

Finalement, il suffit de savoir que  $M$  admet la même couverture projective que  $M/\text{rad } M$ , et que celui-ci est semisimple (c'est-à-dire qu'il est une somme directe de modules simples), et tous les cas sont traités.

Dans le cas où  $k$  est algébriquement clos et  $A$  est une algèbre de carquois lié, la proposition 1.3.4 permet d'effectuer concrètement ce calcul.

**Définition 1.3.9** Soit  $M$  un  $A$ -module. Une résolution projective de  $M$  est une suite exacte de la forme

$$\dots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

où  $P_i$  est un  $A$ -module projectif pour chaque entier naturel  $i$ .

La même suite exacte est appelée une résolution projective minimale lorsque chaque couple  $(P_i, d_i)$  est une couverture projective de  $\text{Ker } d_{i-1}$ .

**Proposition 1.3.10** Si  $k$  est un corps et  $A$  est une  $k$ -algèbre de dimension finie, alors tout  $A$ -module de type fini admet une résolution projective minimale.

■

**Définition 1.3.11** Soit  $M$  un  $A$ -module. Le plus petit entier  $n$  tel qu'il existe une résolution projective

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de  $M$ , s'il existe, est appelé la dimension projective de  $M$  et il est noté  $dp M$ . Si un tel entier n'existe pas, alors la dimension projective de  $M$  est dite infinie.

**Remarque 1.3.12** Ces définitions se dualisent pour obtenir les concepts d'enveloppe injective, de résolution injective et de dimension injective.

**Exemple 1.3.13** Soit  $A$  le quotient de l'algèbre du carquois de l'exemple 1.2.2 par l'idéal admissible de l'exemple 1.2.4. Une résolution projective minimale du module simple au sommet 4 est donnée par

$$0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_4 \longrightarrow S_4 \longrightarrow 0.$$

## 1.4 Algèbres aimables

Une classe d'exemples importante pour ce mémoire est celle des algèbres dites aimables. Pour cette section,  $k$  sera toujours un corps algébriquement clos et  $A$ , une  $k$ -algèbre de dimension finie.

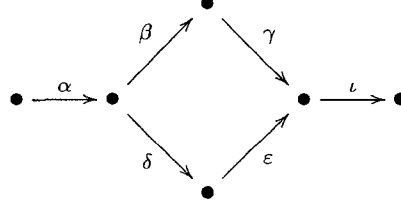
**Définition 1.4.1 ([AS])** L'algèbre  $A$  est dite aimable si, et seulement si, il existe un carquois lié  $(Q, I)$  tel que  $A \cong kQ/I$  et satisfaisant aux quatre conditions suivantes :

- (G1) pour chaque sommet  $x$  de  $Q$ , il existe au plus deux flèches ayant  $x$  comme source et au plus deux flèches ayant  $x$  comme but ;
- (G2)  $I$  est engendré par des chemins de longueur 2 ;
- (G3) pour chaque flèche  $\alpha$  de  $Q$ , il existe au plus une flèche  $\beta$  et au plus une flèche  $\gamma$  telles que  $\alpha\beta \in I$  et  $\gamma\alpha \in I$  ;
- (G4) pour chaque flèche  $\alpha$  de  $Q$ , il existe au plus une flèche  $\beta$  et au plus une flèche  $\gamma$  telles que  $\alpha\beta \notin I$  et  $\gamma\alpha \notin I$ .

Le carquois lié  $(Q, I)$  sera alors appelé une présentation aimable de  $A$ .



**Exemple 1.4.2** *L'algèbre de carquois liée suivante est une algèbre aimable :*



liée par  $\alpha\delta = \gamma\lambda = \delta\epsilon = 0$ .

Les algèbres aimables font partie d'une classe plus grande, celle des *algèbres de corde*. En outre, il existe une description complète des modules indécomposables de type fini sur une algèbre de corde. Ceux qui seront utiles pour ce travail sont les modules dits *de corde*.

**Définition 1.4.3** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre aimable, et soit  $(Q, I)$  une présentation aimable de  $A$ . Une corde dans  $(Q, I)$  est une suite*

$$\omega = \alpha_1^{\varepsilon_1} \alpha_2^{\varepsilon_2} \dots \alpha_m^{\varepsilon_m},$$

où

- $m$  est un entier strictement positif;
- pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\alpha_i$  est une flèche de  $Q$ ;
- pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ ;
- pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ , si  $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ , alors  $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ ;
- en posant  $s(\beta^{-1}) = b(\beta)$  et  $b(\beta^{-1}) = s(\beta)$  pour toute flèche  $\beta$ , pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ , l'égalité  $b(\alpha_i^{\varepsilon_i}) = s(\alpha_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}})$  est vérifiée; et
- pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  et chaque  $j \in \{1, 2, \dots, m-i\}$ , si  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = \dots = \varepsilon_{i+j} = 1$ , alors  $\alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{i+j} \notin I$ , et si  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = \dots = \varepsilon_{i+j} = -1$ , alors  $\alpha_{i+j} \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \notin I$ .

L'entier  $m$  sera appelé la longueur de la corde  $\omega$ . Par convention, les chemins triviaux sont également des cordes, et leur longueur est nulle.

**Remarque 1.4.4** Soit  $A = kQ/I$  une algèbre aimable, où  $(Q, I)$  est une présentation aimable de  $A$ . Soit  $w = \alpha_1^{\varepsilon_1} \alpha_2^{\varepsilon_2} \dots \alpha_m^{\varepsilon_m}$  une corde dans  $(Q, I)$ , où les  $\alpha_i$  sont des flèches de  $Q$  et où les  $\varepsilon_i$  valent  $-1$  ou  $1$ . À la corde  $w$  peut être associé un carquois (linéaire)  $Q_w$  défini comme suit :

- $(Q_w)_0 = \{1, 2, \dots, m+1\}$  ;
- pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , si  $\varepsilon_i = 1$ , alors il existe une flèche  $\beta_i$  de  $i$  vers  $i+1$ , et si  $\varepsilon_i = -1$ , alors il existe une flèche  $\beta_i$  de  $i+1$  vers  $i$ .

De plus, il existe un morphisme de carquois  $f_w : Q_w \longrightarrow Q$  défini par  $(f_w)_0(i) = s(\alpha_i^{\varepsilon_i})$ ,  $(f_w)_1(\beta_i) = \alpha_i$  pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  et  $(f_w)_0(m+1) = b(\alpha_m^{\varepsilon_m})$ .

À chaque corde est associée une représentation (et donc un module), comme le décrit la définition suivante.

**Définition 1.4.5 ([BR])** Soit  $(Q, I)$  une présentation aimable d'une  $k$ -algèbre  $A$ . Soit  $\omega = \alpha_1^{\varepsilon_1} \alpha_2^{\varepsilon_2} \dots \alpha_m^{\varepsilon_m}$  une corde dans  $(Q, I)$ .

À la corde  $\omega$  sont associés un carquois  $Q_\omega$  et un morphisme de carquois  $f_\omega : Q_\omega \longrightarrow Q$  comme dans la remarque 1.4.4.

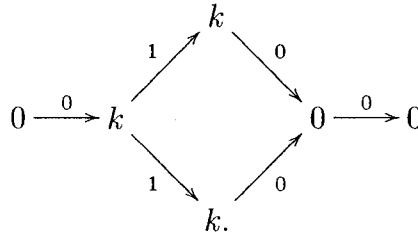
Le module de corde associé à  $\omega$  est le module  $M(\omega)$  dont la représentation  $(M_i, \varphi_\beta)$  est décrite ci-dessous.

Pour chaque  $i \in Q_0$ , soient  $j_1 < j_2 < \dots < j_\ell$  les sommets de  $Q_\omega$  tels que leur image par  $f_\omega$  est  $i$ . Le  $k$ -espace vectoriel  $M_i$  a alors pour base  $\{z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_\ell}\}$ .

Soit maintenant  $\beta : j \longrightarrow \ell$  une flèche de  $Q$ . Pour chaque flèche  $\gamma$  de  $Q_\omega$  telle que  $(f_\omega)_1(\gamma) = \beta$ , il est posé  $\varphi_\beta(z_{s(\gamma)}) = z_{b(\gamma)}$ .

Enfin, il est possible de définir  $\varphi(z)$  par  $\varphi(z) = 0$  pour tous les autres vecteurs  $z$  de la base de  $M_j$ . Ceci donne une représentation du module  $M(\omega)$ .

**Exemple 1.4.6** Soit  $A$  l'algèbre aimable de l'exemple 1.4.2. Le module  $M(\beta^{-1}\delta)$  a pour représentation



**Théorème 1.4.7 ([BR])** Dans une algèbre aimable, tout module de corde est indécomposable.

■

De plus, les morphismes entre deux modules de corde peuvent être entièrement décrits, comme le montre le prochain résultat.

**Proposition 1.4.8** Soit  $A = kQ/I$  une algèbre aimable, où  $(Q, I)$  est une présentation aimable de  $A$ . Soient  $w$  et  $w'$  deux cordes dans  $(Q, I)$ . Une base de  $\text{Hom}_A(M(w), M(w'))$  est donnée par l'ensemble des triplets  $(T, T', f)$ , où  $T$  et  $T'$  sont des sous-carquois connexes et non vides de  $Q_w$  et de  $Q_{w'}$ , respectivement ;

- $f : T \longrightarrow T'$  est un isomorphisme de carquois tel que  $f_{w'} \circ f = f_w$  ;
  - si une flèche  $\alpha$  de  $Q_w$  est telle que  $b(\alpha)$  est dans  $T$ , alors  $\alpha$  est dans  $T$  ;
  - si une flèche  $\alpha'$  de  $Q_{w'}$  est telle que  $s(\alpha')$  est dans  $T'$ , alors  $\alpha'$  est dans  $T'$ .
- Pour un tel triplet, le morphisme  $F : M(w) \longrightarrow M(w')$  correspondant est défini de la façon suivante.

Pour chaque sommet  $i$  de  $Q$ , le morphisme  $F_i : (M(w))_i \longrightarrow (M(w'))_i$  envoie l'élément de la base  $z_{j_a}$  vers  $z_{f(j_a)}$  si  $j_a$  est un sommet de  $T$ , et vers 0 sinon.

DÉMONSTRATION Ceci est une application du théorème de [C] aux algèbres aimables.

■

## 1.5 Notes bibliographiques

Un traitement des algèbres et des modules est donné dans [A1]. Les notions d'algèbres connexes et sobres, de modules indécomposables, de modules simples, de modules projectifs et de modules injectifs y sont en outre introduites et étudiées. La théorie des catégories nécessaire à l'étude des modules est également présentée.

Une étude plus approfondie des catégories est effectuée, par exemple, dans [Mi] dans le cas général et dans [BK] dans le cas des catégories de modules. Un exposé sur l'histoire du sujet est donné dans [K].

L'utilisation des carquois liés pour l'étude des algèbres est décrite dans [ASS].

Les algèbres aimables ont été introduites dans [AS] pour l'étude des algèbres

préinclinées de type  $\tilde{A}_n$ . Elles sont un cas particulier des algèbres de corde étudiées dans [BR].

Les preuves des théorèmes, propositions et exemples 1.1.1, 1.3.2, 1.3.7, 1.3.8 et 1.3.10 se trouvent dans [A1]; celles de 1.2.5, 1.2.8 et 1.3.4, dans [ASS] et celle de 1.4.7 est dans [BR]. Le résultat de 1.4.8 découle d'un théorème plus général démontré dans [C].

# CHAPITRE 2

## Extensions

L'objectif du présent chapitre est de donner deux définitions des modules d'extensions et de démontrer leur équivalence. Ce travail, assez long, est rarement effectué jusqu'au bout dans tous les détails. Ce chapitre se veut une présentation suffisamment précise des notions qui seront nécessaires à la suite du mémoire.

La présentation est surtout basée sur celle de [Mi].

Tout au long de ce chapitre,  $k$  désignera un anneau commutatif et  $A$ , une  $k$ -algèbre.

### 2.1 Première définition : suites exactes

Soient  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules. Soit  $n$  un entier positif et non nul. L'objet d'intérêt ici est l'ensemble des suites exactes de la forme

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Une première définition introduit déjà un outil de comparaison de telles suites.

**Définition 2.1.1** Soient  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  deux suites exactes comme ci-dessous. Un morphisme de suites exactes est une famille  $\{f_i : E_i \longrightarrow E'_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underline{e}_1 : & 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E_n & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & & & \downarrow f_n & & \\ \underline{e}_2 : & 0 & \longrightarrow & E'_1 & \longrightarrow & E'_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E'_n & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Un tel morphisme est dit à bouts fixes lorsque  $f_1$  et  $f_n$  sont les morphismes identité.

Il est plus facile d'étudier l'ensemble des suites exactes de la forme (\*) en introduisant une certaine relation d'équivalence.

Une relation est d'abord donnée par la définition suivante. Soient les suites exactes

$$\underline{e}_1 : \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad \text{et}$$

$$\underline{e}_2 : \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow E'_1 \longrightarrow E'_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E'_n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Il sera dit que la suite  $\underline{e}_1$  est en relation avec  $\underline{e}_2$  lorsqu'il existe un morphisme à bouts fixes de  $\underline{e}_1$  vers  $\underline{e}_2$ .

Cette relation est réflexive et transitive, mais n'est pas symétrique, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 2.1.2** Soit  $A$  l'algèbre des chemins du carquois  $1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 3$ .

Soient  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  les suites exactes

$$\underline{e}_1 : \quad 0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow M(\alpha\beta) \longrightarrow M(\beta) \oplus S_3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow 0,$$

$$\underline{e}_2 : \quad 0 \longrightarrow S_1 \xlongequal{\quad} S_1 \xrightarrow{0} S_3 \xlongequal{\quad} S_3 \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas,  $\underline{e}_2$  est en relation avec  $\underline{e}_1$ , mais l'inverse n'est pas vrai.

Une relation d'équivalence est alors formée ainsi : les deux suites  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  sont dites *équivalentes*, ce qui est noté par  $\underline{e}_1 \sim \underline{e}_2$ , lorsqu'il existe un entier  $k \geq 1$  et des suites exactes  $\underline{f}_0, \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k$  de sorte que :

- $\underline{f}_0 = \underline{e}_1$  et  $\underline{f}_k = \underline{e}_2$ ;
- pour chaque  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , il existe un morphisme à bouts fixes de  $\underline{f}_i$  vers  $\underline{f}_{i+1}$  ou de  $\underline{f}_{i+1}$  vers  $\underline{f}_i$ .

La construction ci-haut est en fait la clôture symétrique et transitive de la relation décrite plus tôt. Ceci entraîne la proposition suivante.

**Proposition 2.1.3** *La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.*

■

L'ensemble des classes d'équivalence de telles suites s'écrit  $\text{Ext}_A^n(M, N)$ .

### 2.1.1 Suites exactes courtes

Certains résultats s'appliquant aux suites exactes courtes pourront servir à l'étude des suites exactes plus longues. Les prochaines lignes ont pour but de



présenter quelques tels résultats. Pour cette sous-section,  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  seront les suites exactes courtes illustrées ci-dessous :

$$\underline{e}_1 : \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0,$$

$$\underline{e}_2 : \quad 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} M' \longrightarrow 0.$$

Il est bon de noter que, pour les suites exactes courtes, le lemme des cinq implique que le morphisme central de tout morphisme de suites exactes à bouts fixes doit être un isomorphisme (voir les notes bibliographiques pour le lemme des cinq).

**Lemme 2.1.4** *Soit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  un morphisme de  $\underline{e}_1$  vers  $\underline{e}_2$ . Il existe une unique suite exacte courte  $\bar{e}$  faisant commuter le diagramme ci-dessous :*

$$\begin{array}{ccccccccc} \underline{e}_1 : & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \delta & & \parallel & & \\ \bar{e} : & 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{E} & \xrightarrow{\bar{g}} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow \delta' & & \downarrow \gamma & & \\ \underline{e}_2 : & 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & M' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

et de sorte que  $\delta'\delta = \beta$ .

**DÉMONSTRATION** Le module  $\bar{E}$  et les morphismes  $\bar{g}$  et  $\delta'$  sont obtenus en prenant le produit fibré des morphismes  $g'$  et  $\gamma$  (voir 1.1.1 (9)). Le morphisme  $\bar{f}$  est alors déduit de la propriété universelle du produit fibré, en considérant les morphismes  $f'$  et  $0 : N' \longrightarrow M$ .

Le morphisme  $\delta$  est obtenu au moyen de la propriété universelle du produit fibré appliquée aux morphismes  $g$  et  $\beta$ ; de ce fait,  $\delta'\delta = \beta$ . Jusqu'ici, tous les carrés sont commutatifs, sauf celui en haut à gauche.

Or, il faut noter que  $\gamma(gf) = 0 = (g'f')\alpha$ . En vertu de la propriété universelle du produit fibré, il existe un unique morphisme  $u : N \longrightarrow \bar{E}$  tel que  $\bar{g}u = gf$  et  $\delta'u = f'\alpha$ . Comme  $\delta f$  et  $\bar{f}\alpha$  respectent tous deux ces égalités, ils doivent être égaux, en vertu de l'unicité.

Enfin, pour montrer l'unicité de  $\bar{e}$ , il faut supposer l'existence d'une autre suite exacte

$$\underline{e}' : \quad 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\bar{f}'} \bar{E}' \xrightarrow{\bar{g}'} M \longrightarrow 0$$

et de deux morphismes  $\delta'' : E \longrightarrow \bar{E}'$  et  $\delta''' : \bar{E}' \longrightarrow E'$ , avec  $\delta''\delta''' = \beta$ , faisant commuter le diagramme précédent.

Comme  $\gamma\bar{g}' = g'\delta'''$ , la propriété universelle du produit fibré entraîne l'existence d'un morphisme  $\sigma : \bar{E}' \longrightarrow \bar{E}$  tel que  $\bar{g}' = \bar{g}\sigma$  et  $\delta''' = \delta'\sigma$ .

De plus,  $\bar{f}$  est l'unique morphisme tel que  $\bar{g}\bar{f} = 0$  et  $\delta'\bar{f} = f'$ . Or,  $\bar{g}\sigma\bar{f}' = \bar{g}'\bar{f}' = 0$  et  $\delta'\sigma\bar{f}' = \delta''\bar{f}' = f'$ . Donc  $\sigma\bar{f}' = \bar{f}$ .

Par conséquent,  $(id_{N'}, \sigma, id_M)$  est un morphisme de suites exactes à bouts fixes de  $\underline{e}'$  vers  $\bar{e}$ . L'unicité est ainsi prouvée.

■

La suite  $\bar{e}$  du lemme précédent s'écrira, de façon équivalente,  $\alpha e_1$  ou  $e_2\gamma$ .

**Remarque 2.1.5** *Le module  $\bar{E}$  est également la somme amalgamée de  $f$  et  $\alpha$ .*

**Exemple 2.1.6** Soit  $A = kQ$ , où  $Q$  est le carquois  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$ .

Soient  $\underline{e}$  la suite exacte

$$0 \longrightarrow M(\beta\gamma) \xrightarrow{f} M(\alpha\beta\gamma) \xrightarrow{g} S_1 \longrightarrow 0,$$

et  $h : M(\alpha\beta) \longrightarrow S_1$ , où  $f, g$  et  $h$  sont les morphismes naturels décrits en 1.4.8.

Le calcul de  $\underline{e}h$  s'effectue en trouvant le produit fibré de  $g$  et  $h$  au moyen de la méthode donnée en 1.1.1 (9). Ce calcul est illustré ci-bas,

$$\begin{array}{ccccccc}
 k & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & k^2 & \longrightarrow & k^2 & \xrightarrow{(1 \ 0)} & k \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 k & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & k^2 & \longrightarrow & k^2 & \xrightarrow{(1 \ 0)} & k \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 k^2 & \longrightarrow & k^2 & \longrightarrow & k^2 & \xrightarrow{(1 \ 0)} & k \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est le morphisme associé à la flèche à sa gauche et à sa droite, et où tous les morphismes non décrits sont les identités ou les morphismes nuls. La deuxième représentation à partir du haut est celle du produit fibré, et celle du haut est isomorphe. Or, celle du haut est celle du module  $M(\alpha\beta\gamma) \oplus M(\beta)$ . Par conséquent,  $\underline{e}h$  a la forme

$$0 \longrightarrow M(\beta\gamma) \longrightarrow M(\alpha\beta\gamma) \oplus M(\beta) \longrightarrow M(\alpha\beta) \longrightarrow 0.$$

Quelques propriétés importantes pour la suite sont énumérées dans le prochain lemme.

**Lemme 2.1.7** Soit  $\underline{e}_1$  la suite définie plus haut. Soient  $\alpha : N \longrightarrow N'$ ,  $\alpha' : N' \longrightarrow N''$ ,  $\gamma : M' \longrightarrow M$  et  $\gamma' : M'' \longrightarrow M'$  des morphismes.

1.  $\underline{e}_1 id_M = \underline{e}_1$  et  $id_N \underline{e}_2 = \underline{e}_2$ .
2.  $\underline{e}_1(\gamma'\gamma) = (\underline{e}_1\gamma')\gamma$  et  $(\alpha'\alpha)\underline{e}_1 = \alpha'(\alpha\underline{e}_1)$ .
3.  $(\alpha\underline{e}_1)\gamma = \alpha(\underline{e}_1\gamma)$ .

**DÉMONSTRATION** Les propriétés 1 et 2 se démontrent aisément. Pour montrer 3, il s'agit de remarquer que le diagramme du lemme 2.1.4 entraîne l'existence d'un morphisme  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\underline{e}_1\gamma$  vers  $\alpha\underline{e}_1$ . Appliquant le lemme 2.1.4 à ce morphisme, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underline{e}_1\gamma : & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \Downarrow & & \\
 \underline{\bar{e}}_1 : & 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & \bar{E} & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \Downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \\
 \alpha\underline{e}_1 : & 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

est obtenu. Celui-ci montre que  $(\alpha\underline{e}_1)\gamma = \underline{\bar{e}}_1 = \alpha(\underline{e}_1\gamma)$ .

■

## 2.1.2 Le cas général

Pour cette sous-section,  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  seront les suites exactes

$$\underline{e}_1 : \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \dots \longrightarrow E_n \xrightarrow{f_n} M \longrightarrow 0 \quad \text{et}$$

$$\underline{e}_2 : \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f'_0} E'_1 \xrightarrow{f'_1} E'_2 \xrightarrow{f'_2} \dots \longrightarrow E'_n \xrightarrow{f'_n} M \longrightarrow 0,$$

où  $n$  est un entier strictement positif.

Une façon de travailler avec de telles suites consiste à les décomposer en suites exactes courtes.

**Définition 2.1.8** *Étant données deux suites exactes*

$$\underline{e}: \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \dots \longrightarrow E_m \xrightarrow{f_m} M \longrightarrow 0 \quad \text{et}$$

$$\underline{f}: \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f'_0} E'_1 \xrightarrow{f'_1} E'_2 \xrightarrow{f'_2} \dots \longrightarrow E'_n \xrightarrow{f'_n} M' \longrightarrow 0,$$

le produit  $\underline{ef}$  est la suite exacte

$$\begin{aligned} \underline{ef}: \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \dots \longrightarrow E_m \xrightarrow{f'_0 f_m} \dots \\ \dots \longrightarrow E'_1 \xrightarrow{f'_1} E'_2 \xrightarrow{f'_2} \dots \longrightarrow E'_n \xrightarrow{f'_n} M' \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Ce produit est compatible avec  $\sim$ . Pour le montrer, il sera utile de poser la convention suivante : si  $s = (id_N, s_1, s_2, \dots, s_m, id_M)$  est un morphisme à bouts fixes de  $\underline{e}$  vers  $\underline{e}'$ , et si  $t = (id_M, t_1, t_2, \dots, t_n, id_{M'})$  en est un autre de  $\underline{f}$  vers  $\underline{f}'$ , alors  $st$  désigne le morphisme à bouts fixes  $(id_N, s_1, s_2, \dots, s_m, t_1, t_2, \dots, t_n, id_{M'})$  de  $\underline{ef}$  vers  $\underline{e}'\underline{f}'$ .

Soient  $\underline{e}_0 \sim \underline{e}_{j+1}$  et  $\underline{f}_0 \sim \underline{f}_{k+1}$ . Il existe des suites exactes  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_j, \underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k$  et des morphismes à bouts fixes  $s_0, s_1, \dots, s_j$  entre les  $\underline{e}_i$  et  $t_0, t_1, \dots, t_k$  entre les  $\underline{f}_i$  venant de la définition de  $\sim$ . Alors les morphismes  $s_0 id_{f_0}, s_1 id_{f_0}, \dots, s_j id_{f_0}, id_{e_{j+1}} t_0, id_{e_{j+1}} t_1, \dots, id_{e_{j+1}} t_k$  montrent que  $\underline{e}_0 f_0 \sim \underline{e}_{j+1} f_{k+1}$ .

La suite  $\underline{e}_1$  peut ainsi s'écrire comme le produit  $\underline{f}_1 \underline{f}_2 \dots \underline{f}_n$ , où

$$\underline{f}_i: \quad 0 \longrightarrow \text{Ker } f_i \longrightarrow E_i \longrightarrow \text{Im } f_i \longrightarrow 0,$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Cette décomposition permet, en outre, la multiplication des suites exactes par des morphismes. Celle-ci se fait de la façon suivante : si  $\alpha \in \text{Hom}_A(N, N')$  et  $\beta \in \text{Hom}_A(M', M)$ , alors

$$\alpha \underline{e}_1 = (\alpha \underline{f}_1) \underline{f}_2 \dots \underline{f}_n \text{ et } \underline{e}_1 \beta = \underline{f}_1 \underline{f}_2 \dots \underline{f}_{n-1} (\underline{f}_n \beta),$$

où la multiplication des suites exactes courtes par des morphismes a été définie dans le lemme 2.1.4.

### 2.1.3 La structure de $k$ -module

Il est maintenant possible de définir les opérations conférant à  $\text{Ext}_A^n(M, N)$  une structure de  $k$ -module. Dorénavant, lorsqu'une suite exacte sera considérée, il sera entendu qu'il s'agit de sa classe d'équivalence. Les suites  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  seront définies comme dans la sous-section précédente, et s'écriront comme des produits de suites exactes courtes comme suit :  $\underline{e}_1 = \underline{f}_1 \underline{f}_2 \dots \underline{f}_n$  et  $\underline{e}_2 = \underline{g}_1 \underline{g}_2 \dots \underline{g}_n$ .

La multiplication par un scalaire est la plus facile à définir. Étant donné un scalaire  $\lambda \in k$ , il suffit de poser

$$\lambda \underline{e}_1 = ((\lambda \text{id}_N) \underline{f}_1) \underline{f}_2 \dots \underline{f}_n = \underline{f}_1 \underline{f}_2 \dots \underline{f}_{n-1} (\underline{f}_n (\lambda \text{id}_M)).$$

La définition de l'addition demande plus de travail. Il faut d'abord définir une première opération  $\oplus$ , appelée *pré-somme*, comme suit :

$$\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2 =$$

$$0 \longrightarrow N \oplus N \longrightarrow E_1 \oplus E'_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_n \oplus E'_n \longrightarrow M \oplus M \longrightarrow 0,$$

où les morphismes sont les sommes directes de ceux de  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ .

Soient maintenant  $\nabla : N \oplus N \longrightarrow N$  le morphisme  $(1, 1)$  et  $\Delta : M \longrightarrow M \oplus M$  le morphisme  $(1, 1)^t$ .

La somme de deux suites de  $\text{Ext}_A^n(M, N)$  est alors définie comme suit :

$$\underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \nabla(\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2)\Delta.$$

Il est aisé de montrer que cette addition est compatible avec  $\sim$ .

Plusieurs propriétés de cette addition sont démontrées dans le lemme suivant.

**Lemme 2.1.9** *Soient  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  les suites exactes définies précédemment, et soit  $\underline{e}_3$  une troisième suite exacte ayant les mêmes bouts.*

1.  $\underline{e}_1 + (\underline{e}_2 + \underline{e}_3) = (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) + \underline{e}_3$ .
2.  $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \underline{e}_2 + \underline{e}_1$ .
3.  $\underline{e}_1 + \underline{0} = \underline{e}_1$ , où  $\underline{0}$  est la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{id_N} N \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{id_M} M \longrightarrow 0.$$

4.  $(\alpha + \beta)\underline{e}_1 = \alpha\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_1(\alpha + \beta) = \underline{e}_1\alpha + \underline{e}_1\beta$ .
5.  $\alpha(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \alpha\underline{e}_1 + \alpha\underline{e}_2$  et  $(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)\alpha = \underline{e}_1\alpha + \underline{e}_2\alpha$ .
6.  $\underline{e}_1 + (-\underline{e}_1) = \underline{0}$ .

**DÉMONSTRATION** Tout au long de la démonstration, l'observation suivante sera utile : si  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont deux morphismes, alors  $(\alpha \oplus \alpha')(\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2) = \alpha\underline{e}_1 \oplus \alpha'\underline{e}_2$ .

1. D'abord,

$$\begin{aligned}
\underline{e}_1 + (\underline{e}_2 + \underline{e}_3) &= \underline{e}_1 + \nabla(\underline{e}_2 \oplus \underline{e}_3)\Delta \\
&= \nabla(\underline{e}_1 \oplus \nabla(\underline{e}_2 \oplus \underline{e}_3)\Delta)\Delta \\
&= \nabla((id \oplus \nabla)(\underline{e}_1 \oplus (\underline{e}_2 \oplus \underline{e}_3))(id \oplus \Delta))\Delta \\
&= \nabla(id \oplus \nabla)(\underline{e}_1 \oplus (\underline{e}_2 \oplus \underline{e}_3))(id \oplus \Delta)\Delta.
\end{aligned}$$

De même,  $(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) + \underline{e}_3 = \nabla(\nabla \oplus id)((\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2) \oplus \underline{e}_3)(\Delta \oplus id)\Delta$ .

Il suffit alors de remarquer que  $\nabla(\nabla \oplus id) = \nabla(id \oplus \nabla)$  et que  $(\Delta \oplus id)\Delta = (id \oplus \Delta)\Delta$  pour obtenir le résultat.

2. Soit  $\tau$  le morphisme de matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Il est à noter que  $\tau\nabla = \nabla$  et  $\Delta\tau = \Delta$ .

La commutativité est d'abord prouvée pour les suites exactes courtes.

Si  $n = 1$ , alors il existe un morphisme  $(\tau, \tau, \tau)$  de  $\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2$  vers  $\underline{e}_2 \oplus \underline{e}_1$ . Appliquant le lemme 2.1.4 à ce morphisme, l'égalité  $\tau\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2 = \underline{e}_2 \oplus \tau\underline{e}_1$  est obtenue. Comme  $\tau\nabla = \nabla$  et  $\Delta\tau = \Delta$ , ceci donne  $\nabla\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2\Delta = \nabla\underline{e}_2 \oplus \tau\underline{e}_1\Delta$ , d'où  $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \underline{e}_2 + \tau\underline{e}_1$ .

Maintenant, si  $n \geq 1$ , alors  $\underline{e}_1 = f_1 f_2 \dots f_n$  et  $\underline{e}_2 = g_1 g_2 \dots g_n$ , où les  $f_i$  et  $g_i$  sont des suites exactes courtes. Avec ces hypothèses,  $\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2 = (f_1 \oplus g_1)(f_2 \oplus g_2) \dots (f_n \oplus g_n)$ . Ceci mène à la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
\tau(f_1 \oplus g_1)(f_2 \oplus g_2) \dots (f_n \oplus g_n) &= (g_1 \oplus f_1)\tau(f_2 \oplus g_2) \dots (f_n \oplus g_n) \\
&= (g_1 \oplus f_1)(g_2 \oplus f_2)\tau \dots (f_n \oplus g_n) \\
&= \dots \\
&= (g_1 \oplus f_1)(g_2 \oplus f_2) \dots (g_n \oplus f_n)\tau.
\end{aligned}$$



L'égalité voulue est obtenue en multipliant par  $\nabla$  à gauche et par  $\Delta$  à droite.

3. Il est à noter que, dans le cas où  $n = 1$ , la suite  $\underline{0}$  est donnée par

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{(1,0)^t} N \oplus M \xrightarrow{(0,1)} M \longrightarrow 0.$$

Dans cette situation, le diagramme ci-bas montre que  $\underline{0} + \underline{e}_1 = \underline{e}_1$  en effectuant les multiplications par  $\nabla$  et  $\Delta$  :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N \oplus N & \xrightarrow{h_1} & (N \oplus M) \oplus E_1 & \xrightarrow{h_2} & M \oplus M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \nabla & & \downarrow h_3 & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{h_4} & M \oplus E_1 & \xrightarrow{h_5} & M \oplus M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow h_6 & & \uparrow \Delta \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f_0} & E_1 & \xrightarrow{f_1} & M \longrightarrow 0, \end{array}$$

où  $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & f_0 \end{pmatrix}$ ,  $h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix}$ ,  $h_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ f_0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $h_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \end{pmatrix}$ ,  $h_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_1 \end{pmatrix}$  et  $h_6 = \begin{pmatrix} f_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Le même type de calcul donne le résultat pour  $n > 1$ .

4. Seule la première égalité sera démontrée ; la seconde se prouve de façon analogue. De plus, seul le cas  $n = 1$  sera traité ; les autres cas découlent du même calcul.

Le morphisme  $(\Delta, \Delta, \Delta)$  de  $\underline{e}_1$  vers  $\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_1$  et le lemme 2.1.4 entraînent que  $\Delta \underline{e}_1 = \underline{e}_1 \oplus \underline{e}_1 \Delta$ . Il en découle la suite d'égalités

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \underline{e}_1 &= \nabla(\alpha \oplus \beta) \Delta \underline{e}_1 \\ &= \nabla(\alpha \oplus \beta) (\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_1) \Delta \\ &= \nabla(\alpha \underline{e}_1 \oplus \beta \underline{e}_1) \Delta \\ &= \alpha \underline{e}_1 + \beta \underline{e}_1. \end{aligned}$$

5. Seule la première égalité sera démontrée ; la seconde se prouve de façon analogue. De plus, seul le cas  $n = 1$  sera traité ; les autres cas découlent du même calcul.

D'abord, il faut noter que  $\alpha \nabla = \nabla(\alpha \oplus \alpha)$ . De là découle la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
 \alpha(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) &= \alpha \nabla(\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2) \Delta \\
 &= \nabla(\alpha \oplus \alpha)(\underline{e}_1 \oplus \underline{e}_2) \Delta \\
 &= \nabla(\alpha \underline{e}_1 \oplus \alpha \underline{e}_2) \Delta \\
 &= \alpha \underline{e}_1 + \alpha \underline{e}_2.
 \end{aligned}$$

6. D'abord, il faut montrer que  $0\underline{e}_1 = \underline{e}_1 0 = \underline{0}$ , ce qui découle d'un calcul simple. Ensuite, il suffit de remarquer que  $\underline{0} = 0\underline{e}_1 = (1-1)\underline{e}_1 = \underline{e}_1 - \underline{e}_1$ , en vertu de (4).

■

**Remarque 2.1.10** Une suite exacte  $\underline{e}$  à laquelle est multipliée à gauche (ou à droite) la suite nulle  $\underline{0}$  donne la suite nulle. En effet,  $\underline{0}\underline{e} = (0\underline{0})\underline{e} = 0(0\underline{e}) = \underline{0}$ .

Avec ces propriétés en main, il devient facile de montrer le résultat suivant.

**Proposition 2.1.11** Muni des opérations définies plus haut,  $Ext_A^n(M, N)$  est un  $k$ -module.

DÉMONSTRATION Découle de 2.1.7 et de 2.1.9.

■

## 2.2 Seconde définition : Hom

La seconde définition des modules d'extensions utilise le foncteur Hom.

**Définition 2.2.1** Soient  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules. Soit

$$\cdots \xrightarrow{p_3} P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de  $M$ . Le foncteur contravariant  $\text{Hom}_A(-, N)$  induit le complexe

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{p_0^*} \text{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{p_1^*} \text{Hom}_A(P_1, N) \longrightarrow \cdots,$$

où  $p_i^* = \text{Hom}_A(p_i, N)$  pour chaque entier naturel  $i$ . Le  $n^e$  module d'extensions de  $M$  par  $N$  est défini par

$$\text{Ext}_A^n(M, N) = \frac{\text{Ker } \text{Hom}_A(p_{n+1}, N)}{\text{Im } \text{Hom}_A(p_n, N)},$$

pour tout  $n$  entier et supérieur à zéro.

Cette définition confère à  $\text{Ext}_A^n(M, N)$  une structure naturelle de  $k$ -module, car il s'agit du quotient de deux  $k$ -modules. Il est à noter que la définition ne dépend pas de la résolution projective choisie.

## 2.3 Équivalence des deux définitions

L'objectif de cette section est de démontrer l'équivalence des définitions données dans les sections 2.1 et 2.2. Pour ce faire, le  $n^e$  module d'extensions de la définition en 2.2 sera temporairement noté  $\mathcal{E}\text{xt}_A^n(M, N)$ .

Il suffira de démontrer l'existence d'un isomorphisme de  $k$ -modules entre  $\text{Ext}_A^n(M, N)$  et  $\mathcal{E}\text{xt}_A^n(M, N)$ . Soit

$$\underline{e}: \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{g_0} E_1 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_{n-1}} E_n \xrightarrow{g_n} M \longrightarrow 0$$

un élément de  $\text{Ext}_A^n(M, N)$ . Le diagramme suivant, où la ligne du haut est une résolution projective de  $M$ , permet d'associer à  $\underline{e}$  un morphisme de  $P_n$  vers  $N$  :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{p_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \parallel & & \\ & & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g_0} & E_1 & \xrightarrow{g_1} & \cdots & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_n & \xrightarrow{g_n} & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

En effet, chaque  $P_i$  étant projectif, l'existence des morphismes  $f_0, f_1, \dots, f_n$  est garantie, et ceux-ci font commuter le diagramme. Par conséquent,  $f_n \circ p_{n+1} = 0$ ; en d'autres termes,  $f_n \in \text{Ker Hom}_A(p_{n+1}, N)$ .

Les morphismes  $f_0, f_1, \dots, f_n$  obtenus ci-haut ne sont pas uniques. Soient  $f'_0, f'_1, \dots, f'_n$  d'autres morphismes faisant commuter le diagramme. L'idée est de construire des fonctions  $s_0, s_1, \dots, s_n$ , où  $s_0: M \longrightarrow E_n$ ,  $s_i: P_{i-1} \longrightarrow E_{n-i}$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$  et  $s_{n-1}: P_{n-1} \longrightarrow N$ , de sorte  $s_i p_i + g_{i+1} s_{i+1} = f_i - f'_i$ .

Cette construction s'effectue par récurrence. D'abord,  $g_0 f_0 = g_0 f'_0 = p_0$ , d'où  $g_0(f_0 - f'_0) = 0$ , et donc  $\text{Im}(f_0 - f'_0) \subseteq \text{Ker } g_0 = \text{Im } g_1$ .

Le module  $P_0$  étant projectif, il existe  $s_1: P_0 \longrightarrow E_n$  tel que  $g_1 s_1 = f_0 - f'_0$ .

Maintenant, si  $s_k$  est connu pour  $0 \leq k \leq m+1$ , alors

$$\text{Im}(f_{m+1} - f'_{m+1} - s_{m+1} p_{m+1}) \subseteq \text{Im } g_{m+2} = \text{Ker } g_{m+1}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
g_{m+1}(f_{m+1} - f'_{m+1} - s_{m+1}p_{m+1}) &= g_{m+1}(f_{m+1} - f'_{m+1}) - (f_m - f'_m - s_m p_m)p_{m+1} \\
&= (f_m - f'_m)p_{m+1} - (f_m - f'_m)p_{m+1} \\
&= (f_m - f'_m)p_{m+1} - (f_m - f'_m)p_{m+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe  $s_{m+2} : P_{m+1} \longrightarrow E_{n-m-2}$  tel que  $g_{m+2}s_{m+2} + s_{m+1}p_{m+1} = f_{m+1} - f'_{m+1}$ .

La construction est donc complétée par récurrence.

En outre,  $f_n - f'_n = s_n p_n$ , d'où  $f_n - f'_n \in \text{Im Hom}_A(p_n, N)$ . Ceci montre que l'élément  $f_n + \text{Im Hom}_A(p_n, N)$  est uniquement déterminé par  $\underline{e}$  dans  $\mathcal{E}xt_A^n(M, N)$ .

Afin d'avoir une fonction de  $\text{Ext}_A^n(M, N)$  vers  $\mathcal{E}xt_A^n(M, N)$ , il faut vérifier que  $f_n$  ne dépend pas du représentant de la classe de  $\underline{e}$ . Pour ce faire, soient  $\underline{e}'$  et  $\underline{e}''$  deux suites exactes telles qu'il existe des morphismes  $\underline{e} \longrightarrow \underline{e}'$  et  $\underline{e}'' \longrightarrow \underline{e}$  à bouts fixes.

Dans le premier cas, la composition des  $f_i$  avec le morphisme  $\underline{e} \longrightarrow \underline{e}'$  donne un diagramme à carrés commutatifs, et la fonction  $f_n$  demeure la même. D'où  $\underline{e}'$  détermine le même élément de  $\mathcal{E}xt_A^n(M, N)$  que  $\underline{e}$ .

Dans le second cas, l'argument ci-haut donne que  $\underline{e}$  détermine le même élément de  $\mathcal{E}xt_A^n(M, N)$  que  $\underline{e}''$ , d'où le résultat.

Ainsi, la fonction  $\Phi : \text{Ext}_A^n(M, N) \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^n(M, N)$  associant à chaque élément de  $\underline{e}$  la classe du morphisme  $f_n$  construit plus haut est correctement

définie.

Une fonction  $\Psi$  sera maintenant construite. Il sera montré que  $\Psi$  est un morphisme de  $k$ -modules et qu'il s'agit de l'inverse de  $\Phi$ .

Soit  $f \in \text{Ker Hom}_A(p_{n+1}, N)$ ; autrement dit,  $f$  est un morphisme de  $P_n$  vers  $N$  tel que  $f \circ p_{n+1} = 0$ , et donc que  $\text{Im } p_{n+1} \subseteq \text{Ker } f$ . Or,  $\text{Im } p_{n+1} = \text{Ker } p_n$ . Par conséquent, il existe un unique épimorphisme

$$\text{Im } p_n \cong P_n / \text{Ker } p_n \longrightarrow P_n / \text{Ker } f \cong \text{Im } f.$$

Soit  $\bar{f}$  la composition de cet épimorphisme avec l'inclusion de  $\text{Im } f$  dans  $N$ .

Soit maintenant  $\underline{p}$  la suite exacte

$$\underline{p}: \quad 0 \longrightarrow \text{Im } p_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Il s'avère que la classe de la suite exacte  $\bar{f}\underline{p}$  est un élément de  $\text{Ext}_A^n(M, N)$ .

Par conséquent, une fonction  $\text{Ker Hom}_A(p_{n+1}, N) \longrightarrow \text{Ext}_A^n(M, N)$  vient d'être construite.

Soit maintenant  $f' \in \text{Im Hom}_A(p_n, N)$ ; autrement dit,  $f'$  se factorise par  $p_n$ . Ceci entraîne l'existence d'un morphisme  $g : P_{n-1} \longrightarrow N$  tel que  $f' = g \circ p_n$ . De plus, il existe un unique épimorphisme  $\text{Im } p_n \longrightarrow \text{Im } f'$ . Soient  $\bar{f}'$  sa composition avec l'inclusion  $\text{Im } f' \longrightarrow N$  et  $i : \text{Im } p_n \longrightarrow P_{n-1}$  l'inclusion canonique. Soit  $y \in \text{Im } p_n$ . Il existe  $x \in P_n$  tel que  $y = p_n(x)$ . Par conséquent,

$$gi(y) = gi(p_n(x)) = g(p_n(x)) = f'(x) = \bar{f}'(p_n(x)) = \bar{f}'(y).$$

Ainsi,  $gi = \bar{f}'$ , d'où  $\bar{f}'$  se factorise par  $i$ .

Un calcul de somme amalgamée montre alors que

$$\bar{f}'(0 \longrightarrow \text{Im } p_n \xrightarrow{i} P_{n-1} \longrightarrow \text{Im } p_{n-1} \longrightarrow 0)$$

est la suite exacte scindée  $0 \longrightarrow N \longrightarrow N \oplus \text{Im } p_{n-1} \longrightarrow \text{Im } p_{n-1} \longrightarrow 0$ , d'où  $\bar{f}'\underline{e} = 0$ , en vertu de 2.1.10.

Ceci montre l'existence d'une fonction  $\Psi : \mathcal{E}xt_A^n(M, N) \longrightarrow \text{Ext}_A^n(M, N)$  associant à chaque classe  $f + \text{Im Hom}_A(p_n, N)$  la classe de la suite  $\bar{f}\underline{e}$ .

De plus, comme  $(f+f')\underline{e} = f\underline{e} + f'\underline{e}$  et  $(\lambda f)\underline{e} = \lambda(f\underline{e})$  pour chaque morphisme  $f$ , chaque morphisme  $f'$ , chaque scalaire  $\lambda$  et chaque suite exacte  $\underline{e}$ , en vertu de 2.1.7 et 2.1.9,  $\Psi$  est un morphisme de  $k$ -modules.

Il ne reste donc qu'à montrer que  $\Phi$  et  $\Psi$  sont mutuellement inverses pour prouver l'isomorphisme entre  $\mathcal{E}xt_A^n(M, N)$  et  $\text{Ext}_A^n(M, N)$ .

Soit  $\underline{e} \in \text{Ext}_A^n(M, N)$ . Alors  $\Phi(\underline{e})$  a la forme  $f + \text{Im Hom}_A(p_n, N)$ . Le morphisme  $f$  induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Im } p_n & \xrightarrow{j} & P_n & \xrightarrow{p_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g_0} & E_1 & \xrightarrow{g_1} & E_2 & \xrightarrow{g_2} & \cdots & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_n & \xrightarrow{g_n} & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

De plus,  $\Psi(\Phi(\underline{e})) = \Psi(f + \text{Im Hom}_A(p_n, N))$  est égale à la suite exacte du haut multipliée par  $\bar{f}$  à gauche. Il faut noter que, en vertu de l'unicité de la suite exacte courte construite en 2.1.4 et en vertu du diagramme ci-haut, la suite  $0 \longrightarrow N \xrightarrow{g_0} E_1 \longrightarrow \text{Coker } g_0 \longrightarrow 0$  est égale à

$$\bar{f}(0 \longrightarrow \text{Im } p_n \xrightarrow{j} P_{n-1} \longrightarrow \text{Coker } j \longrightarrow 0).$$

Ceci donne lieu au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Im } p_n & \xrightarrow{j} & P_n & \xrightarrow{p_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f_n & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g_0} & E_1 & \longrightarrow & P_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \parallel & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g_0} & E_1 & \xrightarrow{g_1} & E_2 & \xrightarrow{g_2} & \cdots & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_n & \xrightarrow{g_n} & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Ainsi, il existe un morphisme à bouts fixes de la suite du centre à celle du bas, donc elles sont équivalentes. Mais celle du centre est  $\Psi(\Phi(\underline{e}))$  et celle du bas est  $\underline{e}$ . Donc  $\Psi \circ \Phi$  est l'identité de  $\text{Ext}_A^n(M, N)$ .

Soit maintenant un élément  $f + \text{Im Hom}_A(p_n, N)$  de  $\mathcal{E}\text{xt}_A^n(M, N)$ . Alors  $\Psi(f + \text{Im Hom}_A(p_n, N))$  est la suite du bas dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Im } p_n & \xrightarrow{j} & P_n & \xrightarrow{p_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f_n & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g_0} & E_1 & \longrightarrow & P_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Évidemment, dans ce cas, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{p_n} & P_n & \xrightarrow{p_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow f_n & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g_0} & E_1 & \longrightarrow & P_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Ainsi,  $\Phi(\Psi(f + \text{Im Hom}_A(p_n, N))) = f + \text{Im Hom}_A(p_n, N)$ , d'où  $\Phi \circ \Psi$  est l'identité de  $\mathcal{E}\text{xt}_A^n(M, N)$ .

L'isomorphisme entre  $\mathcal{E}\text{xt}_A^n(M, N)$  et  $\text{Ext}_A^n(M, N)$  est donc démontré.



## 2.4 Notes bibliographiques

Ce chapitre suit essentiellement la présentation donnée dans [Mi]. L'auteur n'y présente que la structure de groupe abélien des modules d'extensions, mais démontre des résultats plus forts et le fait dans un cadre plus général, celui des catégories abéliennes.

Le lemme des cinq est démontré, par exemple, dans [A1].

# CHAPITRE 3

## Algèbres inclinées et inclinées amassées

Ce chapitre comporte deux volets. D'une part, les modules inclinants seront introduits afin de définir le concept d'*algèbre inclinée*. D'autre part, les algèbres inclinées amassées seront présentées avec certaines de leurs propriétés.

Pour ce chapitre,  $k$  sera un corps algébriquement clos.

### 3.1 Algèbres inclinées

La définition des algèbres inclinées nécessite le concept de module inclinant sur une algèbre.

**Définition 3.1.1 ([HR])** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre. Un  $A$ -module  $T$  est dit inclinant lorsque*

(I1) *la dimension projective de  $T$  est inférieure ou égale à 1 ;*

(I2)  *$\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$  ; et*

(I3) *il existe une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0,$$

*où  $T'$  et  $T''$  sont des modules dont les facteurs directs sont des facteurs directs de  $T$ .*

Il est à présent possible de définir ce qu'est une algèbre inclinée.

**Définition 3.1.2** *Soient  $Q$  un carquois fini et acyclique et  $kQ$  son algèbre des chemins. Une algèbre inclinée de type  $Q$  est une algèbre isomorphe à l'algèbre d'endomorphismes d'un module inclinant sur  $kQ$ .*

Le module inclinant de la définition précédente sera toujours supposé tel qu'une décomposition en facteurs directs n'exhibe pas deux facteurs directs distincts isomorphes.

Le théorème suivant sera utile dans la suite.

**Théorème 3.1.3** *Soit  $A$  une algèbre inclinée de type  $Q$ . Il existe un  $A$ -module inclinant  $T$  tel que  $\text{End } T = kQ$ .*

■

## 3.2 Algèbres inclinées amassées

Afin d'étudier certaines propriétés combinatoires d'une classe d'algèbres appelées *algèbres amassées*, les *catégories amassées* ont fait leur apparition. Sur

ces catégories, des *objets inclinants* peuvent être définis, et leurs algèbres d'endomorphismes forment la classe des *algèbres inclinées amassées*.

Plus concrètement, soit  $A$  une  $k$ -algèbre *héréditaire*, c'est-à-dire que tout sous-module de  $A_A$  est projectif. Soit  $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$  la catégorie dérivée bornée de  $\text{mod } A$ . Cette catégorie est triangulée ; il existe donc un foncteur [1], appelé *translation*, allant de  $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$  vers elle-même. Un autre tel foncteur est la *translation d'Auslander-Reiten*, qui est notée  $\tau$ .

Soit  $F$  le foncteur défini par la composition  $\tau^{-1}[1]$ .

**Définition 3.2.1 ([BMRRT])** *La catégorie amassée de  $A$  est la catégorie quotient*

$$\mathcal{C}_A = \mathcal{D}^b(\text{mod } A)/F.$$

Il est à noter que la catégorie amassée possède une structure triangulée, héritée de celle de la catégorie dérivée. Il est possible de montrer que la catégorie amassée d'une algèbre héréditaire contient des *objets inclinants* au sens de la définition suivante.

**Définition 3.2.2 ([BMRRT])** *Soit  $\mathcal{C}_A$  la catégorie amassée d'une algèbre héréditaire  $A$ . Un objet  $T$  de  $\mathcal{C}_A$  est dit *inclinant* lorsque  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_A}^1(T, T) = 0$ , et le nombre de facteurs directs de  $T$  est maximal pour cette propriété.*

Avec ces concepts en mains, la définition-clé de cette section peut être énoncée.

**Définition 3.2.3 ([BMR])** Soient  $A$  une algèbre héréditaire et  $\mathcal{C}_A$  sa catégorie amassée. Une algèbre  $C$  est inclinée amassée de type  $A$  si, et seulement si, il existe un objet inclinant  $T$  de  $\mathcal{C}_A$  tel que  $C \cong \text{End}_{\mathcal{C}_A}(T)$ .

Dans le cas où  $A = kQ$ , où  $Q$  est un carquois, il sera également dit que  $C$  est une algèbre inclinée amassée de type  $Q$ .

### 3.3 Le lien : extensions par relations

Il existe un lien tangible entre les algèbres inclinées et inclinées amassées. Celui-ci sera d'une grande importance pour la démonstration du théorème principal.

Avant de décrire ce lien, une définition est de mise.

**Définition 3.3.1** Soient  $A$  une  $k$ -algèbre et  ${}_A M_A$  un bimodule. L'extension triviale de  $A$  par  $M$ , notée  $A \ltimes M$ , est l'algèbre définie comme suit :

- en tant que  $k$ -espace vectoriel,  $A \ltimes M$  est isomorphe à  $A \oplus M$ , et
- la multiplication de deux éléments  $(\alpha, x)$  et  $(\beta, y)$  de  $A \ltimes M$  est donnée par

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta, \alpha y + x\beta).$$

Il est aisément vérifié que  $A \ltimes M$  est effectivement une  $k$ -algèbre.

La prochaine définition est une caractérisation des algèbres inclinées amassées qui sera utilisée plus loin.

**Définition 3.3.2 ([ABS])** L'extension par relations d'une  $k$ -algèbre  $A$  de dimension globale au plus 2 est la  $k$ -algèbre  $A \ltimes \text{Ext}_A^2(DA, A)$ .

**Théorème 3.3.3 ([ABS])** *Une algèbre  $\tilde{A}$  est inclinée amassée de type  $Q$  si, et seulement si, il existe une algèbre  $A$  inclinée de type  $Q$  telle que  $\tilde{A}$  soit l'extension par relations de  $A$ .*

■

Cette caractérisation, très utile dans la suite, est suivie d'une proposition donnant des informations sur le carquois lié de l'extension par relations d'une algèbre.

**Proposition 3.3.4 ([ABS])** *Soit  $A = kQ/I$  une  $k$ -algèbre de dimension finie et de dimension globale au plus 2 et soit  $R$  un ensemble minimal de relations pour  $I$ . Le carquois de l'extension par relations de  $A$  est donné par les informations suivantes :*

- ses sommets sont ceux de  $Q$  ;
- d'un sommet  $x$  vers un sommet  $y$ , il y a un nombre de flèches égal au nombre de flèches de  $x$  vers  $y$  dans  $Q$ , plus la cardinalité de  $e_y R e_x$ .

Enfin, certaines informations sont connues sur les relations du carquois lié d'une extension par relations.

**Proposition 3.3.5 ([ACT])** *Les relations provenant du carquois lié de  $A$  sont préservées dans le carquois lié de son extension par relations.*

■

Cette proposition a certaines conséquences pour les algèbres aimables.

**Corollaire 3.3.6** *Soient  $A$  une  $k$ -algèbre et  $\tilde{A}$  son extension par relations. Si  $\tilde{A}$  est aimable, alors  $A$  l'est aussi.*

■

Cette section se termine sur un exemple de calcul.

**Exemple 3.3.7** *Soit l'algèbre donnée par le carquois lié*



où  $\alpha\beta = \beta\gamma = 0$ . Le carquois de son extension par relations est



Les relations du premier carquois sont préservées, mais il peut en exister d'autres dans le nouveau.

## 3.4 Notes bibliographiques

Un traitement de la théorie de l'inclinaison est donné dans [ASS].

Les algèbres amassées ont été introduites dans [FZ]. Les catégories amassées ont vu le jour dans [CCS] (pour le cas  $\mathbb{A}_n$ ) et dans [BMRRT], et les algèbres inclinées amassées ont été introduites peu après dans [BMR].

Les catégories dérivées sont présentées et approfondies dans, par exemple, [G], [Har] et [W]. Le cadre de leur étude, celui des catégories abéliennes, est plus général que celui présenté dans ce mémoire.

Les extensions par relations et leur utilisation dans la caractérisation des algèbres inclinées amassées ont été introduites dans [ABS].

Une description du foncteur  $\tau$  dans la catégorie amassée est donnée dans [BMRRT]. Enfin, la preuve de 3.1.3 est donnée dans [ASS], celle de 3.3.3 et 3.3.4 est donnée dans [ABS], et celle de 3.3.5 est donnée dans [ACT].



# CHAPITRE 4

## Le théorème principal

Ce chapitre a pour but de présenter la démonstration du théorème principal de ce mémoire. Le théorème s'énonce comme suit :

**Théorème 4.0.1** *Soit  $C = kQ_C/I_C$  une algèbre inclinée. Soit  $\tilde{C}$  son extension par relations. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1.  $C$  est aimable ;
2.  $C$  est inclinée de type  $A_n$  ou  $\tilde{A}_n$  ;
3.  $\tilde{C}$  est aimable ; et
4.  $\tilde{C}$  est inclinée amassée de type  $A_n$  ou  $\tilde{A}_n$ .

Trois des quatre implications se montrent aisément ; la démonstration de la quatrième demande une étude des espaces d'extensions, comme le laisse deviner la définition de l'extension par relations.

## 4.1 Premières implications

Tout au long du chapitre,  $C$  désignera une algèbre inclinée et  $\tilde{C}$ , son extension par relations.

La première implication découle du résultat suivant.

**Proposition 4.1.1 ([S])** *Si  $C$  est aimable et  $T$  est un  $C$ -module inclinant, alors  $\text{End } T$  est également aimable.*

■

**Lemme 4.1.2** *Si  $C$  est aimable, alors  $C$  est inclinée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .*

DÉMONSTRATION Soit  $\Delta$  un carquois tel que  $C$  soit inclinée de type  $\Delta$ . D'après le théorème 3.1.3, il existe un  $C$ -module inclinant  $T$  tel que  $\text{End } T = k\Delta$ . En vertu de 4.1.1,  $k\Delta$  est une algèbre aimable. Ceci implique que  $\Delta$  est un carquois de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .

■

Une autre des implications découle de 3.3.6 : si  $\tilde{C}$  est aimable, alors  $C$  l'est également.

Enfin, il découle de 3.3.3 que  $C$  est inclinée de type  $\Delta$  si, et seulement si,  $\tilde{C}$  est inclinée amassée de type  $\Delta$ .

Il ne reste donc qu'à supposer que  $C$  est inclinée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  et à montrer que  $\tilde{C}$  est aimable.

## 4.2 Extension par relations d'une algèbre inclinée de type $\mathbb{A}_n$ ou $\tilde{\mathbb{A}}_n$

Soit  $C = kQ_C/I_C$  une algèbre inclinée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .

D'après ce qui fut prouvé dans la section précédente,  $C$  est aimable. De plus, le carquois de  $\tilde{C}$  est connu, ainsi que certaines relations, à savoir celles provenant de  $C$  (voir 3.3.4 et 3.3.5). Il s'agit d'étudier les autres relations de  $\tilde{C}$ .

La façon utilisée pour y arriver est la suivante : décrire explicitement les nouveaux éléments de  $\tilde{C}$ , plus particulièrement les nouvelles flèches de son carquois lié, puis en calculer les combinaisons linéaires pour en déduire les relations.

Déjà, certaines informations sont connues. Avant de les énoncer, une définition est de mise.

**Définition 4.2.1** *Un double zéro dans un carquois lié aimable est une marche de la forme  $\alpha\beta\omega\gamma\delta$ , où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont des flèches,  $\omega$  est une composition de flèches ou d'inverses formels de flèches,  $\alpha\beta$  et  $\gamma\delta$  sont des relations et  $\omega$  ne contient aucune relation.*

**Proposition 4.2.2 ([A2] et [R])** 1. *Une algèbre est inclinée de type  $\mathbb{A}_n$*

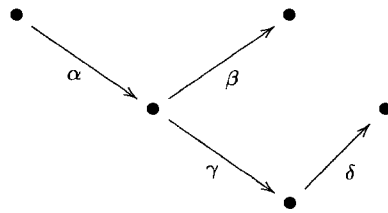
*si, et seulement si, son carquois lié satisfait aux propriétés suivantes :*

- il est un arbre ;*
- il est aimable ;*
- il ne contient pas de double zéro.*

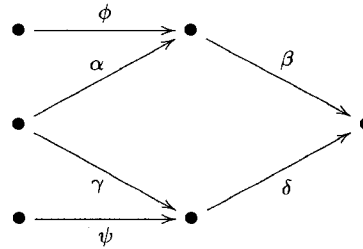
2. Une algèbre est inclinée de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  si, et seulement si, son carquois lié satisfait aux propriétés suivantes :
- il est aimable ;
  - il ne contient pas de double zéro ;
  - il contient un unique cycle (non-orienté) ;
  - si le cycle ne contient pas de relations, alors toutes les flèches attachées au cycle y entrent, ou toutes en sortent.

■

**Exemple 4.2.3** Soient les algèbres données par les carquois liés



$$\alpha\beta = 0$$



$$\alpha\beta = \gamma\delta = 0$$

La proposition 4.2.2 implique que la première est inclinée de type  $\mathbb{A}_n$ , alors que la seconde est inclinée de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .

### 4.2.1 Suites exactes nulles

Un critère sera nécessaire pour déterminer si une suite exacte représente l'élément nul de l'espace d'extensions. Le résultat suivant mènera à ce critère.

**Lemme 4.2.4 ([HRS])** *Soit un morphisme  $f : M \longrightarrow N$ . La suite exacte*

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \text{Coker } f \longrightarrow 0$$

*représente l'élément nul de  $\text{Ext}^2(\text{Coker } f, \text{Ker } f)$  si, et seulement si, il existe un module  $X$  tel que la suite*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{(p,g)^t} \text{Im } f \oplus X \xrightarrow{(j,h)} N \longrightarrow 0$$

*est exacte, où  $f = jp$  est la factorisation canonique.*

■

Le lemme suivant donne le critère annoncé.

**Lemme 4.2.5** *Soit  $(Q, I)$  une présentation aimable de  $C$ , et soient  $\alpha : c \longrightarrow b$  et  $\beta : b \longrightarrow a$  des flèches de  $Q$ . Soient  $\sigma$  et  $\eta$  des cordes ne passant pas par  $b$  telles que  $\beta\sigma$  et  $\eta\alpha$  sont des cordes. Soit  $f : M(\beta\sigma) \longrightarrow M(\eta\alpha)$  un morphisme tel que  $\text{Im } f = S_b$ .*

*La suite exacte*

$$\underline{e} : \quad 0 \longrightarrow \text{Ker } f \longrightarrow M(\beta\sigma) \xrightarrow{f} M(\eta\alpha) \longrightarrow \text{Coker } f \longrightarrow 0$$

*représente un élément non nul de  $\text{Ext}_C^2(\text{Coker } f, \text{Ker } f)$  si, et seulement si,  $\alpha\beta$  est dans  $I$ .*

DÉMONSTRATION En vertu de 4.2.4, la suite  $\underline{e}$  représente un élément non nul de  $\text{Ext}_C^2(\text{Coker } f, \text{Ker } f)$  si, et seulement si, il n'existe pas de suite exacte courte ayant la forme

$$0 \longrightarrow M(\beta\sigma) \xrightarrow{(p,g)^t} \text{Im } f \oplus X \xrightarrow{(j,h)} M(\eta\alpha) \longrightarrow 0,$$

où  $f = jp$  est la factorisation canonique.

Pour la preuve, il sera supposé qu'une telle suite existe. Comme  $S_b$  apparaît exactement une fois comme facteur de composition de  $M(\beta\sigma)$  et  $M(\eta\alpha)$ , alors il apparaît exactement une fois comme facteur de composition de  $X$ . Par conséquent, il existe un unique facteur direct indécomposable  $Y$  de  $X$  ayant  $S_b$  comme facteur de composition. Comme  $p$  est un épimorphisme, tandis que  $(p, g)^t$  est un monomorphisme, alors  $g : M(\beta\sigma) \rightarrow X$  est un monomorphisme. Comme l'évaluation  $M(\beta\sigma)_\beta$  du module  $M(\beta\sigma)$  en  $\beta$  est non nulle,  $X_\beta \neq 0$ . Maintenant,  $S_b$  est un facteur de composition de  $Y$ , d'où  $Y_\beta \neq 0$ . De la même façon, il est montré que  $Y_\alpha \neq 0$ .

Or,  $Y$  doit être un module de corde ou de bande. Le raisonnement ci-haut entraîne que  $\alpha\beta$  doit se trouver sur une corde ou une bande, ce qui montre que  $\alpha\beta \notin I$ .

Réciproquement, si  $\alpha\beta \notin I$ , alors il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M(\beta\sigma) \longrightarrow S_b \oplus M(\eta\alpha\beta\sigma) \longrightarrow M(\eta\alpha) \longrightarrow 0,$$

d'où  $\underline{e}$  représente l'élément nul de  $\text{Ext}_C^2(\text{Coker } f, \text{Ker } f)$ .

■

## 4.2.2 Flèches

Les éléments de  $\tilde{C}$  correspondant aux flèches de son carquois ordinaire sont connus. Par définition,  $\tilde{C} = C \times \text{Ext}_C^2(DC, C)$ . Les éléments de  $\tilde{C}$  correspondant aux anciennes flèches de  $C$  s'écrivent sous la forme  $(\alpha, 0)$ , où  $\alpha$  est une flèche de  $C$ .

Les nouvelles flèches proviennent de relations de  $C$ . En effet, pour toute relation  $\alpha\beta$  de  $C$  allant de  $x$  vers  $y$ , il existe une flèche  $\xi_{\alpha\beta}$  allant de  $y$  vers  $x$  dans  $\tilde{C}$ .

Cette nouvelle flèche est un élément de  $e_y\tilde{C}e_x$ , qui s'écrit comme la somme directe  $e_yCe_x \oplus e_y\text{Ext}_C^2(DC, C)e_x$ . Or, d'après 4.2.2, le carquois lié de  $C$  ne contient pas de double zéro. Par conséquent, il ne peut exister de chemin non nul de  $y$  vers  $x$  dans  $C$ , d'où  $e_yCe_x = 0$ . De plus,  $e_y\text{Ext}_C^2(DC, C)e_x = \text{Ext}_C^2(I_x, P_y)$ . L'élément  $\xi_{\alpha\beta}$  fait donc partie de l'ensemble  $0 \oplus \text{Ext}_C^2(I_x, P_y)$ .

Le lemme suivant donne la dimension et une base de l'espace d'extensions impliqué dans l'expression ci-haut.

**Lemme 4.2.6** *Soient  $\alpha : c \longrightarrow b$  et  $\beta : b \longrightarrow a$  deux flèches de  $C$  telles que  $\alpha\beta \in I_C$ .*

1. *La dimension de l'espace vectoriel  $\text{Ext}_C^2(I_c, P_a)$  est 1 ou 2. De plus, sa dimension est 2 si, et seulement si, la situation suivante se produit dans le carquois lié de  $C$  :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & c & \xrightarrow{\alpha} & b & \xrightarrow{\beta} & a \\
 & \nearrow \eta & & & & & \searrow \sigma \\
 x & \xrightarrow{\gamma} & & & y & \xrightarrow{\delta} & x,
 \end{array}$$

*où  $\gamma$  et  $\delta$  sont des flèches,  $\eta$  et  $\sigma$  sont des chemins (peut-être triviaux) et où aucune relation n'est contenue dans  $\eta$  ni dans  $\sigma$ .*

2. *Si la dimension de l'espace est 1, alors une base est donnée par la suite*

$$\underline{e}_1 : \quad 0 \longrightarrow P_a \longrightarrow M(\beta\sigma) \longrightarrow M(\eta\alpha) \longrightarrow I_c \longrightarrow 0,$$

*où  $\eta$  et  $\sigma$  sont des chemins tels que  $I_c = M(\eta)$  et  $P_a = M(\sigma)$ .*

3. Si la dimension de l'espace est 2, alors une base est donnée par les suites

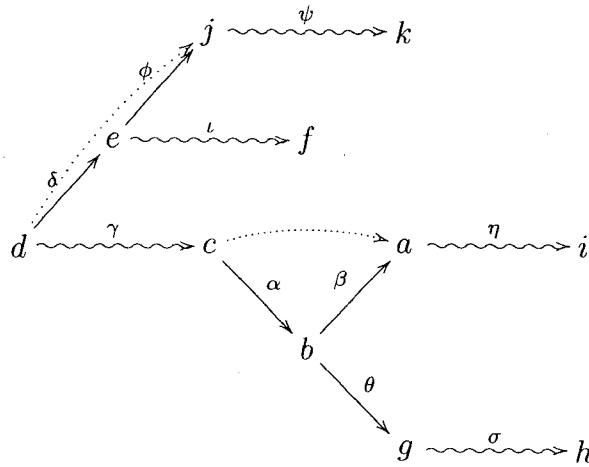
$$\underline{e}_1 : \quad 0 \longrightarrow P_a \longrightarrow M(\beta\sigma) \longrightarrow M(\eta\alpha) \longrightarrow I_c \longrightarrow 0$$

$$\underline{e}_2 : \quad 0 \longrightarrow P_a \longrightarrow M(\sigma\delta^{-1}) \longrightarrow M(\gamma^{-1}\eta) \longrightarrow I_c \longrightarrow 0,$$

où  $\gamma, \delta, \eta$  et  $\sigma$  sont comme sur la figure en 1.

#### DÉMONSTRATION

1. Il découle de 3.3.4 qu'il existe une flèche de  $a$  vers  $c$ ; la dimension de l'espace ne peut donc pas être nulle. D'autre part, comme  $C$  est aimable et son carquois lié ne contient pas de double zéro, la situation de la relation  $\alpha\beta$  peut être illustrée comme ci-dessous.



Ce diagramme permet de calculer une résolution projective minimale de  $I_c$  :

$$0 \xrightarrow{p_3} P(2) \xrightarrow{p_2} P(1) \xrightarrow{p_1} P(0) \xrightarrow{p_0} I_c \longrightarrow 0.$$

où  $P(2) = M(\psi) \oplus M(\eta)$ ,  $P(1) = M(\iota^{-1}\phi\psi) \oplus M(\sigma^{-1}\theta^{-1}\beta\eta)$  et  $P(0) = M(\iota^{-1}\delta^{-1}\gamma\alpha\theta\sigma)$ . Il est à noter que certains facteurs directs des termes



de cette suite peuvent être nuls. L'application du foncteur  $\text{Hom}(-, P_a)$  donne lieu au complexe

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(I_c, P_a) \longrightarrow \text{Hom}(P(0), P_a) \longrightarrow \text{Hom}(P(1), P_a) \longrightarrow \text{Hom}(P(2), P_a) \longrightarrow 0.$$

Ceci donne l'égalité

$$\text{Ext}_C^2(I_c, P_a) = \frac{\text{Ker Hom}(p_3, P_a)}{\text{Im Hom}(p_2, P_a)} = \frac{\text{Hom}(M(\phi), P_a) \oplus \text{Hom}(M(\eta), P_a)}{\text{Im Hom}(p_2, P_a)}.$$

En outre,  $P_a = M(\eta)$ . Par conséquent,  $\dim \text{Hom}(M(\eta), P_a) = 1$ , et comme  $\text{Hom}(M(\sigma^{-1}\theta^{-1}\beta\eta), P_a)$  est nul, aucun morphisme contenu dans  $\text{Hom}(M(\eta), P_a)$  ne se factorise par  $p_2$ .

De plus,  $\text{Hom}(M(\psi), P_a)$  est non nul si, et seulement si,  $j = i$ . Dans ce cas,  $\psi$  n'a d'autre choix que d'être le chemin trivial en  $i$ , et la dimension de  $\text{Hom}(M(\psi), P_a)$  est 1. Comme  $\text{Hom}(M(\iota^{-1}\phi\psi), P_a) = 0$ , aucun morphisme de  $\text{Hom}(M(\psi), P_a)$  ne se factorise par  $p_2$ .

Ainsi, aucun morphisme de  $\text{Hom}(M(\phi), P_a) \oplus \text{Hom}(M(\eta), P_a)$  ne se factorise par  $p_2$ . La dimension de cet espace est donc 1 ou 2, et elle est égale à 2 exactement lorsque  $i = j$ . Dans ce cas, et dans ce cas seulement, on a la situation voulue

$$\begin{array}{ccccc} & c & \xrightarrow{\alpha} & b & \xrightarrow{\beta} & a \\ & \nearrow & & & & \searrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & e & \xrightarrow{\quad} & j. \end{array}$$

2. Il suit de 4.2.5 que  $\underline{e}_1$  n'est pas nul, d'où le résultat.
3. Il suit de 4.2.5 que  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  ne sont pas nuls.

Il reste à montrer que  $\underline{e}_2$  n'est pas un multiple de  $\underline{e}_1$ . La preuve se fait par contradiction. Soit un scalaire non nul  $\lambda$  tel que  $\underline{e}_2 + \lambda\underline{e}_1 = 0$ . La

somme ci-haut est la suite

$$0 \longrightarrow P_a \longrightarrow M(\beta\sigma\delta^{-1}) \xrightarrow{f} M(\gamma^{-1}\eta\alpha) \longrightarrow I_c \longrightarrow 0$$

où tous les morphismes sont des multiples des morphismes naturels entre modules de cordes (voir 1.4.8).

Il faut supposer l'existence d'un module  $X$  et de morphismes  $g$  et  $h$  tels que la suite

$$0 \longrightarrow M(\beta\sigma\delta^{-1}) \xrightarrow{(p,g)^\dagger} (S_b \oplus S_y) \oplus X \xrightarrow{(j,h)} M(\gamma^{-1}\eta\alpha) \longrightarrow 0$$

est exacte, où  $f = jp$  est la factorisation canonique. Comme  $S_b$  apparaît exactement une fois comme facteur de composition de  $M(\beta\sigma\delta^{-1})$  et  $M(\gamma^{-1}\eta\alpha)$ , alors il apparaît exactement une fois comme facteur de composition de  $X$ . Par conséquent, il existe un unique facteur direct indécomposable  $Y$  de  $X$  ayant  $S_b$  comme facteur de composition. Comme dans la preuve de 4.2.5, il est possible de montrer que  $Y_\beta \neq 0$  et  $Y_\alpha \neq 0$ . Ainsi,  $\alpha\beta$  se trouve sur une corde ou une bande, ce qui est absurde, car  $\alpha\beta$  est une relation.

Les suites  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  forment donc une base de l'espace d'extensions.

■

Le travail pour exprimer explicitement les flèches de  $\tilde{C}$  n'est pas terminé : bien qu'une base de l'espace d'extensions soit maintenant connue, il faut savoir quels éléments de cette base peuvent être choisis pour représenter les flèches de l'algèbre. Le lemme suivant effectue ce travail.

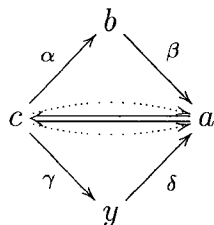
**Lemme 4.2.7** Soient  $\alpha : c \longrightarrow b$  et  $\beta : b \longrightarrow a$  deux flèches du carquois de  $C$  telles que  $\alpha\beta$  est une relation. Soit  $\xi_{\alpha\beta}$  la nouvelle flèche de  $\tilde{C}$  correspondant à cette relation. Avec les notations du lemme 4.2.6, l'élément  $(0, \underline{e}_1)$  peut être choisi pour représenter  $\xi_{\alpha\beta}$ .

DÉMONSTRATION L'espace  $0 \oplus \text{Ext}_C^2(I_c, P_a)$  contient au moins une flèche.

Si sa dimension est 1, alors le résultat est évident.

Si sa dimension est 2, alors le lemme 4.2.6 décrit la situation de la relation  $\alpha\beta$  dans le carquois de  $C$ . Deux situations se présentent.

D'abord, il se peut que  $\eta$  et  $\sigma$  soient des chemins triviaux.



Dans ce cas, deux nouvelles flèches de  $a$  vers  $c$  sont ajoutées au carquois. Les éléments  $(0, \underline{e}_1)$  et  $(0, \underline{e}_2)$  peuvent donc tous deux être choisis pour représenter des flèches de  $\tilde{C}$ .

Ensuite, il se peut que  $\eta$  et  $\sigma$  ne soient pas tous deux triviaux. Dans ce cas, le lemme 4.2.6 implique que la dimension de  $\text{Ext}_C^2(I_x, P_z)$  est 1, et qu'une base en est donnée par l'élément

$$\underline{e}' : \quad 0 \longrightarrow P_z \longrightarrow M(\delta) \longrightarrow M(\gamma) \longrightarrow I_x \longrightarrow 0.$$

D'après le raisonnement ci-haut, l'élément  $(0, \underline{e}')$  représente la nouvelle flèche de  $z$  vers  $x$ . De plus, un calcul montre que  $(\sigma, 0)(0, \underline{e}')(\eta, 0) = (0, \underline{e}_2)$ .

Comme l'un de  $\eta$  et  $\sigma$  est non trivial, par hypothèse, l'un de  $(0, \eta)$  et  $(0, \sigma)$  se trouve dans  $\text{rad } \tilde{C}$ . Par conséquent,  $(0, \underline{e}_2) \in \text{rad}^2 \tilde{C}$ .

Ceci entraîne que  $(0, \underline{e}_1) \in \text{rad } \tilde{C} \setminus \text{rad}^2 \tilde{C}$ ; autrement dit,  $(0, \underline{e}_1)$  peut être pris pour représenter la nouvelle flèche de  $a$  vers  $c$ .

■

### 4.2.3 Relations

Les flèches de  $\tilde{C}$  étant décrites explicitement, il ne reste qu'à calculer leurs combinaisons linéaires pour déterminer les relations.

- Lemme 4.2.8** 1. Soient  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  des chemins de  $x$  vers  $y$  dans le carquois de  $C$  (et donc aussi dans celui de  $\tilde{C}$ ) et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k$ . Alors  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(\omega_i, 0) = 0$  dans  $\tilde{C}$  si, et seulement si,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i = 0$  dans  $C$ .
2. Soient  $\alpha : c \longrightarrow b$  et  $\beta : b \longrightarrow a$  deux flèches du carquois de  $C$  telles que  $\alpha\beta$  est une relation. Soit  $(0, \underline{e}_1)$  l'élément représentant la nouvelle flèche associée à cette relation, où  $\underline{e}_1$  est comme dans 4.2.6. Alors  $(0, \underline{e}_1)(\alpha, 0) = 0$  et  $(\beta, 0)(0, \underline{e}_1) = 0$ .
3. L'idéal  $I_{\tilde{C}}$  est engendré par les relations de  $C$  et celles de la forme décrite en 2.

DÉMONSTRATION

1. Ceci découle de 3.3.5.

2. En voyant  $\alpha$  comme un élément de  $\text{End } DC$ , plus précisément comme un morphisme de  $I_b$  vers  $I_c$ , il est possible de calculer  $\underline{e_1}\alpha$ , ce qui donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow P_a \longrightarrow M(\beta\sigma) \longrightarrow M(\eta\alpha) \oplus M(\varphi\gamma) \longrightarrow I_b \longrightarrow 0,$$

où  $I_b = M(\eta\alpha\gamma^{-1}\varphi^{-1})$ . Cette suite représente l'élément nul, en vertu de 4.2.4 et du fait que la suite

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow M(\beta\sigma) \longrightarrow S_b \oplus M(\varphi\gamma\beta\sigma) \oplus M(\eta\alpha) \longrightarrow \dots \\ &\dots \longrightarrow M(\varphi\gamma) \oplus M(\eta\alpha) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

est exacte. Ainsi,  $(0, \underline{e_1})(\alpha, 0) = 0$ .

D'une façon duale, il est possible de montrer que  $(\beta, 0)(0, \underline{e_1}) = 0$ .

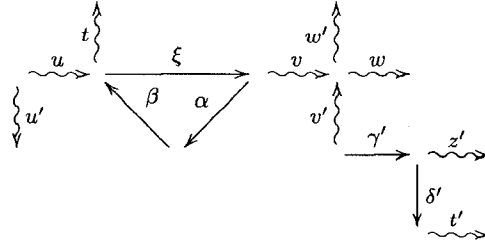
3. Il suffit de montrer que les nouvelles flèches du carquois de  $\tilde{C}$  ne se retrouvent pas dans d'autres relations que celles décrites en 2. La preuve se fait par contradiction.

Premièrement, soit  $w$  une relation monomiale (différente de celles en 2) contenant des nouvelles flèches. Cette relation doit contenir exactement une nouvelle flèche  $\xi$ , correspondant à une relation  $\alpha\beta$ ; dans le cas contraire, le carquois lié de  $C$  contiendrait un double zéro. Soit  $w = u\xi v$ , où  $u$  et  $v$  sont des chemins non nuls de  $C$ . Soit  $\underline{e_1}$  la suite comme dans 4.2.6 correspondant à  $\xi$ . Alors  $(u, 0)(0, \underline{e_1})(v, 0) = (0, u\underline{e_1}v)$ , où  $u\underline{e_1}v$  est la suite

$$0 \longrightarrow M(u^{-1}u') \longrightarrow M(\beta u^{-1}u') \longrightarrow M(v'v^{-1}\alpha) \longrightarrow M(v'v^{-1}) \longrightarrow 0,$$

avec  $u'$  et  $v'$  des chemins du carquois de  $C$ . La figure illustre la situation, où  $\alpha\beta = \gamma'\delta' = 0$ , la dernière flèche de  $u$  et la première de  $t$  forment

une relation, de même que la dernière de  $v$  et  $v'$  et la première de  $w'$  et  $w$ , respectivement.



Le diagramme commutatif suivant est obtenu, où la première ligne est une résolution projective de  $M(v'v^{-1})$  :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P(2) & \xrightarrow{p_2} & P(1) & \xrightarrow{p_1} & P(0) & \xrightarrow{p_0} & M(v'v^{-1}) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow (f,0) & & \downarrow (0,g,0) & & \downarrow (h,\ell) & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & M(u^{-1}u') & \longrightarrow & M(\beta u^{-1}u') & \longrightarrow & M(v'v^{-1}\alpha) & \longrightarrow & M(v'v^{-1}) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

où  $P(2) = M(t) \oplus M(t')$ ,  $P(1) = M(w'w) \oplus M(z^{-1}\gamma^{-1}\beta t) \oplus M(z'^{-1}\delta' t')$  et  $P(0) = M(z^{-1}\gamma^{-1}\alpha^{-1}vw) \oplus M(z'^{-1}\gamma'^{-1}v'w')$ , et tous les morphismes non nuls sont ceux décrits en 1.4.8. Il a été vu que  $(f, 0)$  ne peut se factoriser par  $p_2$ , donc la suite exacte du bas n'est pas nulle. Les relations décrites en 2 sont donc les seules relations monomiales.

Soit maintenant une relation minimale ayant la forme  $\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$ , où chaque  $\lambda_i$  est un scalaire non nul, chaque  $w_i$  est un chemin du carquois de  $\tilde{C}$  et  $m \geq 2$ . Au moins un des  $w_i$  doit contenir une nouvelle flèche, et comme  $C$  ne contient pas de double zéro, ceci entraîne que chaque  $w_i$  doit contenir exactement une nouvelle flèche, qui sera appelée  $\xi_i$  et qui correspond à une relation  $\alpha_i \beta_i$ . Soit  $w_i = u_i \xi_i v_i$ , où  $u_i$  et  $v_i$  sont des chemins du carquois de  $C$ .

Comme le carquois de  $C$  contient au plus un cycle,  $m = 2$ . Par conséquent, toute relation minimale est binomiale. Comme  $k$  est un corps, il est permis de supposer que  $\lambda_1 = 1$ . Si  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  sont les suites associées à  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , respectivement, alors  $u_1\underline{e}_1v_1$  et  $\lambda_2u_2\underline{e}_2v_2$  sont deux suites de la forme ci-haut. Leur somme est la suite exacte

$$0 \longrightarrow M(u_2^{-1}u_1) \longrightarrow M(\beta_2u_2^{-1}u_1\beta_1^{-1}) \longrightarrow M(\alpha_2^{-1}v_2v_1^{-1}\alpha_1) \longrightarrow M(v_1v_2^{-1}) \longrightarrow 0.$$

Une preuve similaire à celle de 4.2.6 (partie 3) entraîne que cet élément n'est pas nul, ce qui est absurde. Ainsi, le carquois lié  $\tilde{C}$  n'admet pas de relation binomiale.

■

Avec ces relations, il devient facile de montrer que  $\tilde{C}$  est aimable.

**Lemme 4.2.9** *Si  $\tilde{C}$  est inclinée amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ , alors  $\tilde{C}$  est aimable.*

**DÉMONSTRATION** Les relations de  $\tilde{C}$  sont connues grâce au lemme 4.2.8. De plus,  $C$  est aimable. Il suffit donc d'observer la situation à chaque sommet pour vérifier si  $\tilde{C}$  est aimable. Toutes les situations possibles sont dans le tableau ci-dessous. Le tableau ne contient que la moitié des cas ; il suffit de changer le sens des flèches pour obtenir les autres.

SOMMET $x$ , CARQUOIS DE $C$	SOMMET $x$ , CARQUOIS DE $\tilde{C}$
$\begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} \\ \alpha\beta = 0 \end{array}$	Pas de nouvelles flèches en $x$ .
$\begin{array}{c} \longrightarrow x \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta} \\ \alpha\beta = 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \longrightarrow x \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta} \\ \quad \quad \quad \longleftarrow \gamma \\ \alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\alpha = 0 \end{array}$
$\begin{array}{c} \longrightarrow x \xrightarrow{\alpha} \uparrow \beta \\ \alpha\beta = 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \longrightarrow x \xrightarrow{\alpha} \uparrow \beta \\ \quad \quad \quad \longleftarrow \gamma \\ \alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\alpha = 0 \end{array}$
$\begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} x \begin{array}{l} \nearrow \beta \\ \searrow \gamma \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \delta \\ \searrow \end{array} \\ \alpha\beta = 0 \\ \gamma\delta = 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} x \begin{array}{l} \nearrow \beta \\ \searrow \gamma \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \delta \\ \searrow \end{array} \\ \quad \quad \quad \nwarrow \phi \quad \nearrow \psi \\ \alpha\beta = \beta\phi = \phi\alpha = 0 \\ \gamma\delta = \delta\psi = \psi\gamma = 0 \end{array}$

Dans le premier et le deuxième cas, l'absence de doubles zéros dans le carquois de  $C$  entraîne qu'il ne peut y avoir de relations de la forme  $\iota\alpha, \iota\gamma, \beta\iota$  ou  $\delta\iota$ , pour une flèche  $\iota$ . Donc le carquois de  $\tilde{C}$  ne contient pas de nouvelles flèches passant par  $x$ .

Si  $x$  est la source d'une flèche  $\alpha$  faisant partie d'une relation  $\alpha\beta$  dans le carquois de  $C$ , alors  $x$  est le but d'au plus une flèche  $\iota$  et  $\iota\alpha$  n'est pas une relation. Ceci est illustré dans la troisième ligne du tableau (la flèche sans nom entre  $\alpha$  et  $\beta$  peut ne pas être là). Comme il ne peut y avoir de relation  $\delta\iota$  (sans quoi il y aurait un double zéro), il existe une seule nouvelle flèche  $\gamma$  passant par  $x$ , tel qu'illustré. De plus,  $\gamma\alpha = \beta\gamma = 0$ , et la situation au sommet  $x$  est celle retrouvée dans une algèbre aimable.



été décrites dans [BV]; les auteurs en déduisent que ces algèbres sont aimables (voir lemme 4.2.9). La preuve présentée dans cet article diffère de celle contenue dans le présent mémoire.

Finalement, si  $x$  est le but d'une flèche  $\alpha$  et la source de deux flèches  $\beta$  et  $\gamma$ , un raisonnement similaire donne que la situation au sommet  $x$  est celle retrouvée dans une algèbre aimable.

Donc  $\tilde{C}$  est aimable.

■

### 4.3 Preuve du théorème principal

Les sections précédentes serviront maintenant à regrouper sous un seul emblème la preuve du théorème 4.0.1.

DÉMONSTRATION (DU THÉORÈME 4.0.1)

- L'affirmation 1 entraîne l'affirmation 2, en vertu du lemme 4.1.2.
- L'affirmation 2 entraîne l'affirmation 4, en vertu du théorème 3.3.3.
- L'affirmation 4 entraîne l'affirmation 3, en vertu du lemme 4.2.9.
- L'affirmation 3 entraîne l'affirmation 1, en vertu du corollaire 3.3.6.

■

### 4.4 Notes bibliographiques

La preuve de 4.1.1 se trouve dans [S]; celle de 4.2.2, dans [A2] (pour le cas  $\mathbb{A}_n$ ) et [R] (pour le cas  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ ), avec une adaptation tirée de [HL]; celle de 4.2.4, dans [HRS].

Les relations du carquois lié d'une algèbre inclinée amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ont

# CHAPITRE 5

## Algèbres et triangulations

L'objet de ce chapitre est d'associer une algèbre de carquois lié aux triangulations d'une surface. Les propriétés des algèbres ainsi obtenues permettront l'application des résultats du chapitre précédent.

### 5.1 Surfaces et triangulations

Une *surface* est un espace topologique ressemblant localement au plan euclidien. Il est bon de rappeler qu'un espace séparé est un espace topologique  $H$  tel que, pour tous points  $x$  et  $y$  de  $H$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un voisinage  $V$  de  $y$  avec  $U \cap V = \emptyset$ .

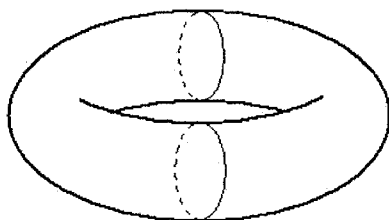
**Définition 5.1.1** *Une surface  $S$  est un espace topologique séparé tel que, pour tout point  $x$  de  $S$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  homéomorphe à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .*

**Exemples 5.1.2** 1. *La sphère est un exemple de surface.*

2. Un autre exemple important est celui du tore. Un tore est un espace topologique homéomorphe au sous-espace

$$T = \{ ((2 + \cos \phi) \cos \theta, (2 + \cos \phi) \sin \theta, \sin \phi) \mid \theta, \phi \in [0, 2\pi[ \}$$

de  $\mathbb{R}^3$ .



D'abord, étant un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ ,  $T$  est un espace séparé.

Ensuite, soit  $x = ((2 + \cos \phi) \cos \theta, (2 + \cos \phi) \sin \theta, \sin \phi) \in T$ . Le voisinage  $U_x = \{ ((2 + \cos(\phi + \Delta\phi)) \cos(\theta + \Delta\theta), (2 + \cos(\phi + \Delta\phi)) \sin(\theta + \Delta\theta), \sin(\phi + \Delta\phi)) \mid \Delta\theta, \Delta\phi \in ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \}$  de  $x$  est homéomorphe à  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , qui est à son tour homéomorphe à un disque ouvert du plan.

Le raisonnement ci-haut montre que  $T$  est une surface au sens de la définition 5.1.1.

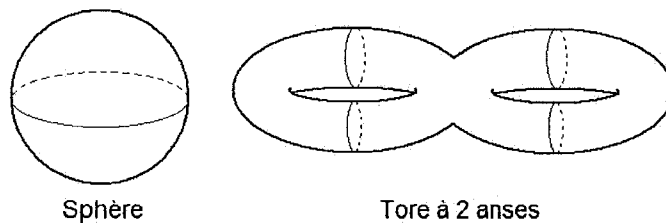
3. La somme connexe  $X \# Y$  de deux surfaces  $X$  et  $Y$  est définie de la façon suivante. Soient  $D$  un sous-espace de  $X$  et  $E$  un sous-espace de  $Y$  tous deux homéomorphes à un disque ouvert du plan. Soit  $h$  un homéomorphisme de la frontière de  $D$  vers celle de  $E$ . L'espace quotient de  $(X \setminus D) \cup (Y \setminus E)$  obtenu en identifiant chaque  $x \in D$  à  $h(x) \in E$  est la somme connexe  $X \# Y$ .

Il est possible de montrer que la somme connexe de deux surfaces est aussi une surface.

4. Soit  $T_1$  un tore et soit  $T_{i+1} = T_i \# T_1$  pour chaque entier naturel non nul  $i$ . Pour un entier naturel non nul  $n$ , la surface  $T_n$  est appelée tore à  $n$  anses.

La définition de surface orientée ne sera pas donnée ici. La classification des surfaces compactes, connexes et orientées qui suit sera suffisante pour ce mémoire.

**Théorème 5.1.3** Une surface compacte, connexe et orientée est une sphère ou un tore à  $n$  anses.



Sphère

Tore à 2 anses

Pour le reste de ce chapitre, le mot *surface* désignera toujours une *surface compacte, connexe et orientée*.

**Définition 5.1.4** Une surface avec bord  $S$  est un espace topologique séparé tel que, pour tout point  $x$  de  $S$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  homéomorphe à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou à l'espace  $\{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \geq 0\}$ .

L'ensemble des points de  $S$  ayant un voisinage homéomorphe à un disque ouvert est appelé l'intérieur de  $S$  ; son complément est appelé le bord de  $S$ .

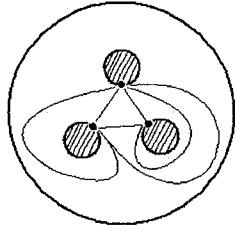
**Remarque 5.1.5** *Une surface avec bord peut être obtenue à partir d'une surface de la façon suivante. Soit  $S_0$  une surface. Soient  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des sous-espaces disjoints de  $S_0$  homéomorphes à un disque fermé du plan, et soit  $F$  leur union. L'espace  $S_0$  duquel est retiré l'intérieur de  $F$  est une surface avec bord.*

Un *chemin* entre deux points  $x$  et  $y$  d'une surface avec bord  $S$  est une fonction continue  $f : [0, 1] \rightarrow S$  telle que  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ . La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur les chemins. En posant également que le "chemin inverse" défini par  $f'(t) = f(1 - t)$  est équivalent à  $f$ , une nouvelle relation d'équivalence est obtenue.

**Définition 5.1.6** *Soit  $X$  un sous-ensemble fini de  $S$ . Un arc interne ayant ses sommets dans  $X$  est une classe d'équivalence de chemins de  $S$  qui ne sont pas homotopes au bord de  $S$  et qui ne passent par  $X$  ou par le bord de  $S$  qu'en leurs extrémités.*

Il sera dit que deux arcs internes ne se croisent pas s'il est possible de prendre un représentant de chacune des classes d'homotopie de sorte que les deux représentants ne se croisent pas (sauf peut-être en leurs extrémités).

**Définition 5.1.7** *Soient  $S$  une surface avec bord et  $X$  un sous-ensemble fini de  $S$ . Une triangulation  $T$  de  $S$  d'ensemble de sommets  $X$  est un ensemble d'arcs internes ne se croisant pas deux à deux et ayant leurs extrémités dans  $X$ , de sorte que tout autre arc ayant ses extrémités dans  $X$  croise l'un des arcs de  $T$ .*



**Exemple 5.1.8** *La figure ci-dessus illustre une triangulation d'une sphère ayant trois composantes de bord et un sommet par composante de bords.*

## 5.2 Algèbre de triangulation

Soient  $S$  une surface avec bord et  $M$  un sous-ensemble fini du bord de  $S$  tel que toute composante connexe du bord a une intersection non vide avec  $M$ . Soit  $T$  une triangulation de  $S$  d'ensemble de sommets  $M$ . Le nombre d'arcs de  $T$  est déterminé par la proposition suivante.

**Proposition 5.2.1** *Soient  $n$  le nombre d'arcs internes de  $T$ ,  $g$  le genre de la surface,  $b$  le nombre de composantes connexes du bord et  $c$  le nombre de sommets de  $M$ . Alors  $n = 6g + 3b + c - 6$ .*

■

**Définition 5.2.2** *Soit  $T$  une triangulation d'une surface  $S$  d'ensemble de sommets  $M$ . La  $k$ -algèbre de la triangulation  $T$  est l'algèbre de carquois  $A(T) = Q(T)/I(T)$  définie comme suit :*

- les points de  $Q(T)$  correspondent aux arcs internes de  $T$  ;

- chaque fois que deux arcs internes  $e$  et  $e'$  font partie d'un même triangle et que  $e$  est placé avant  $e'$  dans le sens horaire, il existe une flèche du sommet représentant  $e$  vers celui représentant  $e'$  dans  $Q(T)$ . Si un cycle de longueur 2 est formé, les deux flèches qui le composent sont retirées;
- $I(T)$  est engendré par les relations suivantes : si  $e, e'$  et  $e''$  sont des arcs internes formant un triangle de  $T$ , si  $x, x'$  et  $x''$  sont les sommets de  $Q(T)$  leur correspondant et si  $\alpha : x \rightarrow x', \beta : x' \rightarrow x''$  et  $\gamma : x'' \rightarrow x$  sont les flèches de  $Q(T)$  résultant du triangle formé, alors  $\alpha\beta, \beta\gamma$  et  $\gamma\alpha$  sont des relations de  $I(T)$ .

Les algèbres de triangulation ont les propriétés suivantes.

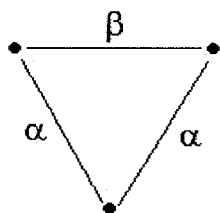
**Proposition 5.2.3**

1.  $Q(T)$  ne contient pas de cycles de longueur 1 ou 2.
2.  $A(T)$  est une  $k$ -algèbre de dimension finie.
3.  $A(T)$  est une algèbre aimable.
4. Pour toute relation  $\alpha\beta$  de  $I(T)$ , il existe une flèche  $\gamma$  telle que  $\gamma\alpha$  et  $\beta\gamma$  sont des chemins correctement définis et sont des relations dans  $I(T)$ .

DÉMONSTRATION

1. Si  $Q(T)$  contient un cycle de longueur 1, alors  $T$  contient un triangle dont deux des arcs sont le même arc  $\alpha$ , comme sur la figure.  
Comme les deux arcs  $\alpha$  sont identifiés, le sommet inférieur de la figure est en fait dans l'intérieur de la surface, ce qui contredit l'hypothèse que

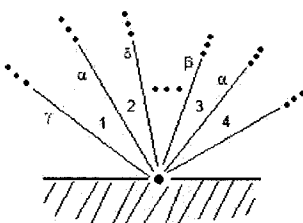




tous les sommets se trouvent sur le bord. Le carquois  $Q(T)$  ne contient donc pas de cycle de longueur 1.

Par définition,  $Q(T)$  ne contient pas de cycle de longueur 2.

2. Il suffit de montrer que le carquois lié de  $A(T)$  ne contient pas de cycle orienté sans relations. S'il en existait un, ses sommets correspondraient à des arcs de  $T$  ayant tous un sommet commun, sans quoi une relation apparaîtrait. La figure suivante illustre alors la situation.



Comme  $\alpha$  est un arc appartenant à exactement deux triangles, deux cas peuvent se produire : les régions 1 et 3 sont connexes, ou les régions 1 et 4 le sont.

Dans le premier cas, les régions 1 et 3 font partie d'un triangle formé par  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Celui-ci devrait donner lieu à un cycle orienté de longueur 3. Cependant,  $\alpha$  est placé à la fois après  $\gamma$  et après  $\beta$  selon le sens horaire, ce qui est absurde.

Les régions 1 et 4 font donc partie du même triangle. Dans ce cas, le

cycle contient la relation  $\beta \longrightarrow \alpha \longrightarrow \delta$ , ce qui est une contradiction.

Par conséquent, le carquois lié de  $A(T)$  ne contient pas de cycle orienté sans relations, et  $A(T)$  est de dimension finie.

3. Il est évident que tout sommet de  $Q(T)$  est la source d'au plus deux flèches et le but d'au plus deux flèches. Soit  $\alpha : x \longrightarrow y$  une flèche de  $Q(T)$ . Elle correspond à un angle formé par deux arcs internes  $x$  et  $y$  dans  $T$ . Cet angle est contenu dans au plus un triangle interne de  $T$ . Par conséquent, il existe au plus une flèche  $\beta$  et au plus une flèche  $\gamma$  telles que  $\alpha\beta$  et  $\gamma\alpha$  sont dans  $I(T)$ . De même, il existe au plus un arc  $z$  tel que  $x, y$  et  $z$  ont un sommet commun et tel qu'il existe une flèche  $\delta : y \longrightarrow z$  dans  $Q(T)$ . Par construction,  $\alpha\delta$  n'est pas dans  $I(T)$ . Il existe donc au plus une flèche  $\delta$  telle que  $\alpha\delta$  n'est pas dans  $I(T)$ . De même, il existe au plus une flèche  $\iota$  telle que  $\iota\alpha$  n'est pas dans  $I(T)$ .
4. Comme toute relation provient d'un triangle interne de  $T$ , le résultat est évident.

■

### 5.3 Mutations

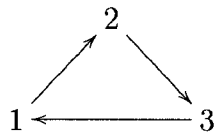
Dans la théorie des algèbres inclinées amassées, les mutations offrent une façon utile de passer d'un carquois à un autre. Pour les triangulations, une opération similaire existe. Dans la situation présente, il a été montré que ces deux concepts sont confondus.

**Définition 5.3.1 ([FZ])** *Soit  $Q$  un carquois. Soit  $x$  un sommet de  $Q$ . La*

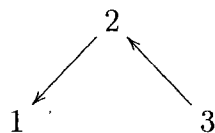
mutation de  $Q$  au sommet  $x$ , notée  $\mu_x(Q)$ , est le carquois construit comme suit :

1. conserver les sommets et les flèches de  $Q$  ;
2. changer le sens des flèches ayant  $x$  comme but ou comme source ;
3. pour chaque chemin  $y \longrightarrow x \longrightarrow z$  dans  $Q$ , ajouter une flèche de  $y$  vers  $z$  ;
4. éliminer les cycles de longueur 2 ainsi formés, s'il y a lieu.

**Exemple 5.3.2** Soit le carquois



Une mutation au sommet 2 donne le carquois



**Remarque 5.3.3** L'égalité  $\mu_x(\mu_x(Q)) = Q$  est toujours vérifiée.

Le théorème suivant démontre l'importance des mutations pour les algèbres inclinées amassées.

**Théorème 5.3.4 ([BMRRT])** Soient  $A$  et  $A'$  deux algèbres inclinées amassées de type  $\Delta$ . Il est possible d'obtenir le carquois de  $A'$  en effectuant un nombre fini de mutations sur le carquois de  $A$ .

■

Les mutations ne définissent pas d'action sur les relations d'un carquois lié. Cependant, le théorème suivant montre que le carquois suffit dans le cas des algèbres inclinées amassées.

**Théorème 5.3.5 ([BIRS])** *Deux algèbres inclinées amassées ont le même carquois si, et seulement si, elles sont isomorphes.*

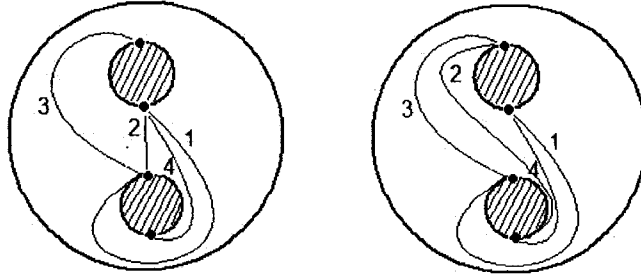
■

Maintenant, des mutations sont également définies pour les triangulations.

**Définition 5.3.6** *Soit  $S$  une surface avec bord et soit  $M$  un sous-ensemble fini du bord de  $S$  ayant une intersection non vide avec chaque composante connexe du bord de  $S$ . Soit  $T$  une triangulation de  $S$  ayant pour ensemble de sommets  $M$ . La mutation de  $T$  en un arc  $x$  est la triangulation de  $S$  obtenue en retirant  $x$  et en ajoutant l'unique arc différent de  $x$  qui ne croise aucun des arcs de  $T$  (excepté  $x$ ).*

**Exemple 5.3.7** *La figure suivante illustre une triangulation d'une sphère avec deux composantes de bord, suivie de sa mutation en 2.*

**Proposition 5.3.8 ([Hat])** *Soient une surface  $S$  et un ensemble  $M$  comme ci-haut, et deux triangulations  $T$  et  $T'$ . Il est possible d'obtenir  $T'$  en effectuant un nombre fini de mutations sur  $T$ .*



Le lien entre les deux types de mutations est donné dans la proposition suivante.

**Proposition 5.3.9 ([FST])** *Soit  $T$  une triangulation de carquois  $Q(T)$ . Soit  $x$  un arc de  $T$ . Le sommet correspondant dans  $Q(T)$  sera également noté  $x$ . Alors le carquois de la mutation de  $T$  en  $x$  est  $\mu_x(Q(T))$ .*

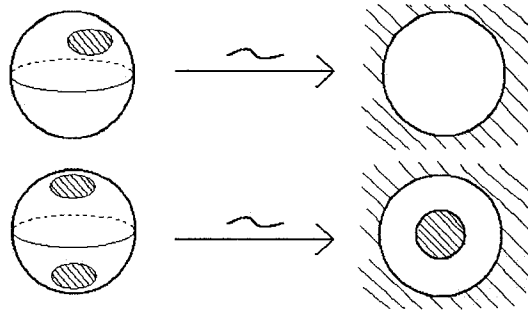
■

## 5.4 Disques et cylindres

Dans cette section, un lien entre les algèbres de surfaces et le théorème principal de ce mémoire est décrit.

**Définition 5.4.1** *Un disque est une sphère ayant une composante connexe de bord. Un cylindre est une sphère ayant deux composantes connexes de bord.*

**Exemple 5.4.2** *L'illustration suivante donne deux représentations homéomorphes d'un disque, et deux autres d'un cylindre. Les régions ombragées correspondent aux bords.*

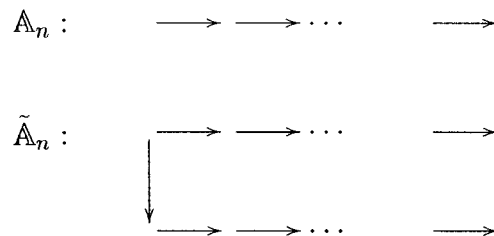


*Les représentations de droite seront préférées à celle de gauche dans la suite.*

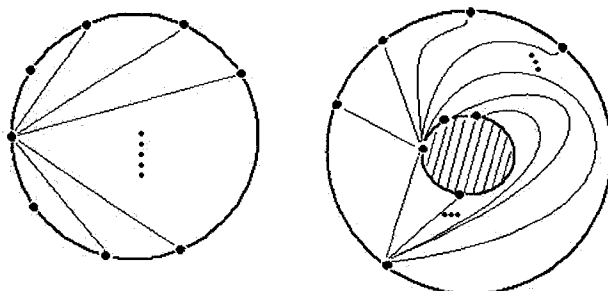
Le théorème suivant décrit un lien entre les triangulations et les algèbres inclinées amassées.

**Théorème 5.4.3** *Une  $k$ -algèbre est inclinée amassée de type  $\mathbb{A}_n$  si, et seulement si, elle est l'algèbre d'une triangulation d'un disque. Un carquois  $Q$  est le carquois d'une algèbre inclinée amassée de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  si, et seulement si, il est le carquois d'une triangulation d'un cylindre.*

DÉMONSTRATION Soit  $A$  une  $k$ -algèbre inclinée amassée de type  $\mathbb{A}_n$  ou de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ . En vertu du théorème 5.3.4,  $A$  est équivalente par mutation à une algèbre héréditaire de carquois  $\mathbb{A}_n$  ou  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ , respectivement. L'ordre des flèches peut également être choisi comme suit :



Ces deux orientations proviennent des triangulations suivantes :



Les propositions 5.3.8 et 5.3.9 permettent d'affirmer que ces triangulations sont équivalentes par mutations à une triangulation associée à  $A$ . Ceci montre qu'un carquois est celui d'une algèbre inclinée amassée de type  $\mathbb{A}_n$  (ou de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ ) si, et seulement si, il est le carquois d'une triangulation d'un disque (ou d'un cylindre, respectivement).

Il suffit ensuite de remarquer que, dans le carquois d'un disque ou d'une algèbre inclinée amassée de type  $\mathbb{A}_n$ , toute relation se trouve dans un cycle de longueur 3, et tout cycle  $\alpha\beta\gamma$  de longueur 3 engendre les relations  $\alpha\beta$ ,  $\beta\gamma$  et  $\gamma\alpha$ . Ceci entraîne que les relations provenant de la triangulation et celles provenant de l'algèbre inclinée amassée sont les mêmes, ce qui achève la preuve.

■

## 5.5 Notes bibliographiques

Un traitement élémentaire des surfaces est donné dans [Ma]. Une preuve du théorème 5.1.3 y est présentée. Les définitions de surface avec bord et

d'orientabilité s'y trouvent. Le résultat de 5.4.3 dans le cas  $\mathbb{A}_n$  a été démontré dans [CCS], bien que la terminologie d'"algèbre inclinée amassée" n'avait pas encore été introduite.

La définition du carquois d'une triangulation a été donnée, pour un cadre plus général, dans [FST]. Une preuve de 5.2.1 se trouve dans [FG], celle de 5.3.4 se trouve dans [BMRRT], celle de 5.3.5 se trouve dans [BIRS] et celle de 5.3.8, dans [Hat]. La proposition 5.3.9 a été énoncée dans [CCS] dans le cas  $\mathbb{A}_n$  et dans [FST] dans le cas général.

Ce dont il a été question dans ce chapitre sera traité dans [ABCP].



# CONCLUSION

Plusieurs questions suivent naturellement celles traitées dans ce mémoire. Après avoir trouvé le carquois lié des algèbres inclinées amassées de type  $\mathbb{A}_n$  et  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  au chapitre 4, il devient fort tentant de faire le même travail pour les autres types. Cependant, la méthode de preuve utilisée s'appuyait fortement sur la classification des algèbres inclinées des types prescrits. Sans telle classification pour un type d'inclinaison donné, l'espoir de généraliser la preuve à ce type reste maigre.

L'étude des algèbres de triangulations laisse voir, quant à elle, plusieurs développements. D'abord, le théorème 5.4.3 laisse penser que les algèbres inclinées amassées de type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  pourraient être les algèbres de triangulations de cylindres. Ensuite, le chapitre 5 ayant traité des disques et des cylindres, toute une gamme d'algèbres provenant des autres surfaces demandent à être étudiées. Ce travail a été commencé dans [L], en utilisant le langage de carquois avec potentiels introduit dans [DWZ]. Un autre aspect à développer, qui n'a pas été étudié dans ce mémoire, est un lien avec les algèbres amassées décrit dans [FST].

Une autre avenue intéressante provient d'un lien entre les catégories  $m$ -

amassées et les surfaces. Ce lien est étudié dans [BM] dans le cas du disque. Étendre cette étude aux cylindres et aux autres surfaces pourrait permettre d'arriver à des résultats similaires à ceux obtenus ici.

Pour conclure, ce mémoire illustre, d'une certaine façon, que les multiples facettes des algèbres inclinées amassées permettent de nombreuses approches, qui sauront allier de nombreux domaines des mathématiques à leur étude.

# Bibliographie

- [A1] ASSEM, Ibrahim. *Algèbres et modules*, Les Presses de l'Université d'Ottawa, Masson, 1997.
- [A2] ASSEM, Ibrahim. *Tilted algebras of type  $\mathbb{A}_n$* , Comm. Algebra 10 (19) (1982) 2121-2139.
- [ABCP] ASSEM, Ibrahim, BRÜSTLE, Thomas, CHARBONNEAU-JODOIN, Gabrielle et PLAMONDON, Pierre-Guy. *Gentle algebras arising from surface triangulations*, en cours de rédaction.
- [ABS] ASSEM, Ibrahim, BRÜSTLE, Thomas et SCHIFFLER, Ralf. *Cluster-tilted algebras as trivial extensions*, Bull. London Math. Soc. 40(2008) 151-162.
- [ACT] ASSEM, Ibrahim, COELHO, Flavio et TREPODE, Sonia. *The Bound Quiver of a Split Extension*, à paraître dans J. Algebra and its Appl.
- [AS] ASSEM, Ibrahim et SKOWROŃSKI, Andrzej. *Iterated tilted algebras of type  $\tilde{\mathbb{A}}_n$* , Math. Z. 195 (2)(1987) 269-290.
- [ASS] ASSEM, Ibrahim, SIMSON, Daniel et SKOWROŃSKI, Andrzej. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math. Soc. Student Texts 65, 2006.

- [BIRS] BUAN, Aslak Bakke, IYAMA, Osamu, REITEN, Idun et SMITH, David. *Mutation of cluster-tilting objects and potentials*, avril 2008, arXiv :0804.3813v1 [math.RT].
- [BK] BERRICK, A. Jon et KEATING, Michael E. *Categories and Modules with K-theory in View*, Cambridge University Press, 2000.
- [BM] BAUR, Karin et MARSH, Robert. *A geometric description of m-cluster categories*, juillet 2006, arXiv :math/0607151 [math.RT].
- [BMRRT] BUAN, Aslak Bakke, MARSH, Robert, REINEKE, Markus, REITEN, Idun et TODOROV, Gordana. *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. Math. 204 (2006), 572-618.
- [BMR] BUAN, Aslak Bakke, MARSH, Robert et REITEN, Idun. *Cluster-tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 359, No 1 (2007) 323-332.
- [BR] BUTLER, Michael C.R. et RINGEL, Claus Michael. *Auslander-Reiten sequences with few middle terms*, Comm. in Algebra, 15(1&2), 145-179 (1987).
- [BV] BUAN, Aslak Bakke et VATNE, Dagfinn F. *Derived equivalence classification for cluster-tilted algebras of type  $\mathbb{A}_n$* , novembre 2007, arXiv :math/0701612v2 [math.RT].
- [C] CRAWLEY-BOEVEY, William. *Maps between Representations of Zero-Relation Algebras*, J. of Algebra 126, 259-263 (1989).
- [CCS] CALDERO, Philippe, CHAPOTON, Frédéric et SCHIFFLER, Ralf. *Quivers with relations arising from clusters ( $\mathbb{A}_n$  case)*, Transactions of the American Mathematical Society, 358, (2006), 1347-1364.

- [DWZ] DERKSEN, Harm, WEYMAN, Jerzy et ZELEVINSKY, Andrei. *Quivers with potentials and their representations I : Mutations*, avril 2008, arXiv :0704.0649v4 [math.RA].
- [FG] FOCK, V.V. et GONCHAROV, A.B. *Dual Teichmüller and lamination spaces*, Handbook of Teichmüller theory, vol. I, 647-684, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 11, Eur. Math. Soc., 2007, arXiv :math/0510312v1 [math.DG].
- [FST] FOMIN, Sergey, SHAPIRO, Michael et THURSTON, Dylan. *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I : Cluster complexes*, à paraître dans Acta Mathematica, arXiv :math/0608367v3 [math.RA].
- [FZ] FOMIN, Sergey et ZELEVINSKY, Andrei. *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 497-529.
- [G] GRIVEL, Pierre-Paul. *Catégories dérivées et foncteurs dérivés*, tiré de BOREL, A. *et al. Algebraic D-Modules*, Perspectives in Mathematics, Academic Press, 1987.
- [Har] HARTSHORNE, Robin. *Residues and Duality*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
- [Hat] HATCHER, Allen. *On triangulations of surfaces*, Topology Appl. 40 (1991) 189-194.
- [HL] HUARD, François et LIU, Shiping. *Tilted string algebras*, J. of Pure and Applied Algebra 153 (2000) 151-164.
- [HR] HAPPEL, Dieter et RINGEL, Claus Michael. *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 274(1982), 399-443.

- [HRS] HAPPEL, Dieter, REITEN, Idun et SMALØ, Sverre O. *Tilting in Abelian Categories and Quasitilted Algebras*, Memoirs of the AMS, 1996, vol. 120, #575 (#3/4).
- [K] KRÖMER, Ralf. *Tool and Object, A History and Philosophy of Category Theory*, Historical Studies - Science Networks, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2007.
- [L] LABARDINI-FRAGOSO, Daniel. *Quivers with potentials associated to triangulated surfaces*, avril 2008, arXiv :0803.1328v2 [math.RT].
- [Ma] MASSEY, William S. *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [Mi] MITCHELL, Barry. *Theory of Categories*, Academic Press, New-York et Londres, 3<sup>e</sup> édition, 1969.
- [R] ROLDÁN, Oscar. *Tilted algebras of types  $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{B}\tilde{C}_n$* , Ph. d. Thesis, Carleton U. (1983).
- [S] SCHRÖER, Jan. *Modules without self-extensions over gentle algebras*, J. Algebra 216 (1999) 178-189.
- [W] WEIBEL, Charles A. *An introduction to homological algebra*, Cambridge Univ. Press, 1994, p.369-415.