

Espace de Siegel

par

Kevin Thouin

Mémoire présenté au département de mathématiques en vue de
l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, janvier 2022

Sommaire

Le quotient de l'espace hyperbolique par un groupe modulaire est un espace bien connu. Siegel a défini une famille d'espaces analogues en remplaçant les nombres complexes par des matrices symétriques. La famille de groupes $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z})$ agit de façon analogue au groupe modulaire sur ces espaces. L'objectif de ce mémoire est de calculer la caractéristique d'Euler du quotient de ces espaces par ces groupes par le théorème de Chern-Gauss-Bonnet et le calcul explicite d'une classe de Chern.

Mots clefs : Espace de Siegel, caractéristique d'Euler, classes de Chern, classe d'Euler, groupe modulaire

Remerciements

Je remercie ma directrice de maîtrise Mme Virginie Charette pour sa supervision, ses conseils et son soutien financier. Je remercie également Mme Vasilisa Shramchenko et M. Jean-Philippe Burelle, membres de mon comité d'encadrement et plus particulièrement M. Burelle, qui a agit à titre de remplaçant de ma directrice de maîtrise. Je tiens également à souligner le soutien financier du département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke.

Kevin Thouin
Le 4 janvier 2022

Table des matières

Sommaire	i
Remerciements	ii
Introduction	1
Chapitre 1 — Variétés et formes différentielles	5
1.1 Variétés	5
1.2 Formes différentielles, connexions et courbures	9
1.3 Homologie	14
1.4 Classes caractéristiques	17
1.5 Orbifold	22
Chapitre 2 — Matrices	25
2.1 Décomposition de matrices	25
2.2 Calcul matriciel	27
Chapitre 3 — L'espace de Siegel	30
3.1 Définitions	30
3.2 Métriques	32
3.3 Produit de Kronecker symétrique et métrique	34
3.4 Les formes de connexions et de courbures de \mathfrak{H}^n	37
3.5 Une forme explicite des formes de courbure	39
Chapitre 4 — Les groupes modulaires et leurs domaines fondamentaux	41
4.1 Les matrices symétriques symplectiques	41
4.2 Le minimum de la distance	43
4.3 La définition du domaine fondamental F	47
4.4 Des conditions simplifiées pour F	49
4.5 Les propriétés de F	51

Chapitre 5 — Le volume du domaine fondamental du groupe modulaire	52
5.1 La fonction ψ	52
5.2 Le sous-groupe Δ_1	55
5.3 Un autre domaine fondamental pour Δ_1	57
5.4 Une formule pour le volume du domaine fondamental	58
Conclusion	61
Bibliographie	62

Introduction

Par le théorème de Descartes-Euler, on sait que pour un polyèdre convexe, $S - A + F = 2$ où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de faces. De façon plus générale, si l'on a une surface compacte quelconque à bord ou non que l'on pave de polygones, la quantité $S - A + F$ sera constante peu importe le pavage que l'on choisit. En dimension plus grande, on peut paver la variété de simplexes, qui sont une généralisation des points, lignes et des triangles. La somme alternée des nombres de simplexes à une dimension donnée sera une constante χ dite caractéristique d'Euler. Il s'agit d'un invariant topologique et même homotopique.

Pour une surface, il existe un lien entre sa courbure gaussienne et sa caractéristique d'Euler. Le théorème de Gauss-Bonnet nous dit que l'intégrale sur la surface de la courbure gaussienne par l'élément d'aire nous donne $2\pi\chi$. On en déduit que la courbure gaussienne est en moyenne toujours la même peu importe le choix de la métrique. Si la surface a un bord, il faut ajouter l'intégrale sur le bord de la courbure géodésique pour prendre en compte le bord. Le théorème de Chern-Gauss-Bonnet, introduit par Chern en 1944, généralise ce théorème à toute variété lisse compacte de dimension paire métrisable.

Pour ce théorème, nous devons calculer la classe d'Euler. En se donnant une métrique, on peut calculer le pfaffien de la matrice des formes de courbure. Ainsi, on obtient alors un invariant métrique. Le théorème de Chern-Gauss-Bonnet nous dit alors que la caractéristique d'Euler correspond à l'intégrale sur la variété de ce pfaffien. Comme pour le cas des surfaces, on déduit qu'en moyenne le pfaffien de la matrice des formes de courbure est constant peu importe la métrique. Toutefois, comme il s'agit d'une forme différentielle de degré maximal, donc fermée, on peut considérer son image dans le quotient des formes différentielles fermées par les formes différentielles exactes. La classe d'Euler correspond à l'image dans ce quotient du pfaffien. Il s'agit alors d'un invariant de variétés lisses. Si l'on veut éviter d'avoir à calculer un pfaffien, pour une variété de dimension $2n$, nous pouvons calculer à la place la n -ième classe de Chern, qui se calcule avec un déterminant au lieu d'un pfaffien, mais il faut utiliser les nombres complexes.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons à l'espace de Siegel. L'espace de Siegel a été défini par Siegel en 1939 [8] comme l'ensemble des matrices M complexes symétriques

$n \times n$ telles que $Y = \text{Im } M$ soit définie positive. Cette espace est métrisable. Une métrique est $Y^{-1}dMY^{-1}Y^{-1}dM$. Dans son article de 1943 [9], Siegel étudie le quotient de l'espace de Siegel par le groupe modulaire $\text{Sp}(2n, \mathbb{Z})$. Il montre alors, à l'aide de la formule de Allendoerfer [1], que

$$\chi = c_n(-\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_F dv$$

où χ est la caractéristique d'Euler du quotient dans un certain sens, F est un domaine fondamental de $\text{Sp}(2n, \mathbb{Z})$, c_n une constante rationnelle positive et dv l'élément de volume. En calculant le volume de F , il arrive ainsi à calculer la caractéristique d'Euler du quotient de l'espace de Siegel par le groupe modulaire.

Par contre, le quotient n'est pas compact et n'est pas une variété, car il a des singularités. Le fait que ce ne soit pas un espace compact n'est pas un problème, car Ichiro [6] a montré qu'il est tout de même possible d'y définir une caractéristique d'Euler. De plus, il est possible de définir une caractéristique d'Euler pour les espaces avec des singularités obtenues comme un quotient d'une variété par un groupe discret agissant de façon proprement discontinue. Localement, ces espaces sont des quotients d'un espace euclidien par un groupe fini. Si l'on divise par l'ordre de tels groupes, on peut définir une caractéristique d'Euler à ces espaces de façon cohérente avec le théorème de Chern-Gauss-Bonnet.

Par exemple, on obtient le plan hyperbolique pour $n = 1$, l'adhérence du domaine F est donnée par l'ensemble des z tels que $\|z\| \geq 1$ et $|\text{Re } z| \leq \frac{1}{2}$. Aux points d'intersection de ce demi-cercle et de ces demi-droites, et au point i sont des singularités dans le quotient. On sait que le groupe modulaire noté Γ_2 du plan hyperbolique est engendré par les transformations $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit le sous-groupe normal G engendré par T^2 . Un domaine fondamental de G est donné en gris pâle dans la figure 1. En faisant les recollements pour obtenir la variété \mathcal{H}^2/G , on va obtenir une variété qui recouvre six fois le quotient \mathcal{H}^2/Γ_2 . Si l'on essaie d'appliquer le théorème de Chern-Gauss-Bonnet sur F , on obtiendra donc un nombre rationnel, qui correspond au sixième de la caractéristique d'Euler du quotient \mathcal{H}^2/G .

La présentation du groupe modulaire Γ_2 est $\langle S, T \mid S^2, (ST)^3 \rangle$. Ainsi, la présentation du quotient Γ_2/G est $\langle S, T \mid S^2, T^2, (ST)^3 \rangle$. Il s'agit du groupe diédral D_6 , qui est d'ordre six, ce qui est cohérent avec le fait que l'on recouvre six fois \mathcal{H}^2/Γ_2 . Aux points d'intersection entre le demi-cercle $|z| = 1$ et $\text{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ (qui sont identifiés dans le quotient), \mathcal{H}^2/Γ_2 est localement homéomorphe à \mathbb{R}^2/D_6 . Au point i , cet espace est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2$ en notant que $\mathbb{Z}_2 \trianglelefteq D_6$.

Nous introduirons d'abord les variétés différentielles et les formes différentielles pour introduire le théorème de Chern-Gauss-Bonnet. Nous introduirons également les classes de Chern, en utilisant la structure complexe de l'espace de Siegel. Comme la n ème classe de Chern est égale à la classe d'Euler utilisée dans le théorème de Chern-Gauss-Bonnet, cela va nous permettre de diminuer la taille des matrices de moitié et de calculer un déterminant au lieu d'un pfaffien. Les deux premiers chapitres introduiront les notions de

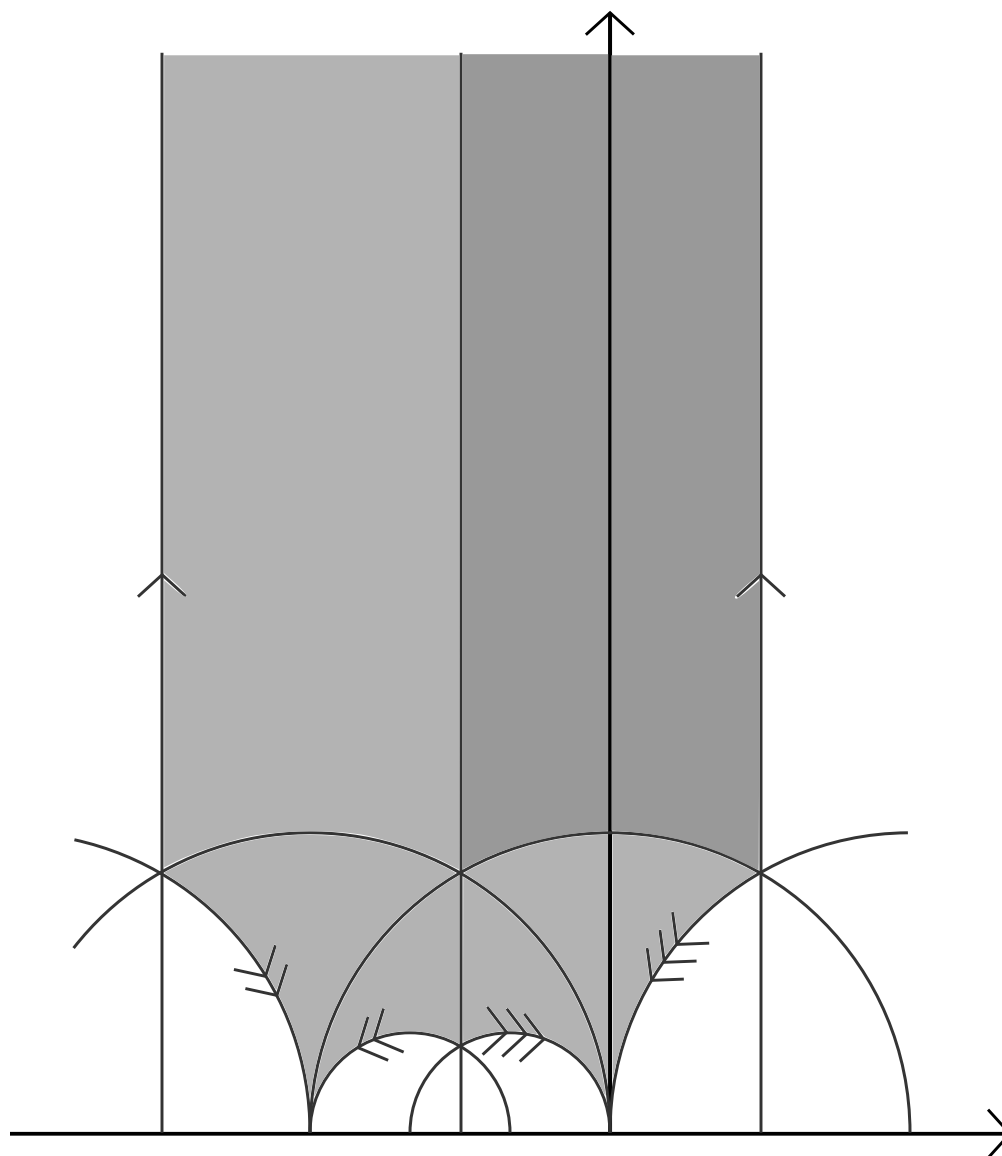


FIGURE 1 – Domaine fondamentaux dans le plan hyperbolique pour le groupe modulaire et le groupe G .

géométrie différentielle et de calcul matriciel. Dans le troisième chapitre nous introduisons l'espace de Siegel et nous calculons sa courbure dans une certaine paramétrisation locale. Les deux derniers chapitres seront consacrés à trouver un domaine fondamental et le volume de F .

Chapitre 1

Variétés et formes différentielles

Ce chapitre introduit toutes les notions de géométrie différentielle qui nous seront nécessaires. Ce chapitre s'inspire de [2] et [5].

1.1 Variétés

Cette section introduit les notions de géométrie riemannienne.

Définition 1. *Une variété topologique T de dimension n est un espace topologique séparé à base dénombrable tel que chaque point de T soit contenu dans un voisinage ouvert homéomorphe à \mathbb{R}^n .*

Définition 2. *Soient S et T deux variétés topologiques et $f : S \rightarrow T$ une application. On dit que f est continue si $f^{-1}(U)$ est un ouvert de S pour tout ouvert U de T . Si f est bijective et que son inverse est aussi continue, on dit que f est un isomorphisme. S'il existe un isomorphisme entre S et T , on dit que S et T sont homéomorphes et l'on note $S \cong T$.*

Un couple (U, ϕ) avec U un ouvert non-vide de T et ϕ un morphisme injectif de U vers \mathbb{R}^n s'appelle une carte locale. L'application $\phi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se nomme une paramétrisation locale de T . Une famille $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de cartes locales telles que $\bigcup_{i \in I} U_i = T$ s'appelle un atlas.

Un atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ est de classe C^∞ si pour toutes cartes locales $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n de classe C^∞ . La fonction $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ s'appelle la fonction de transition de la carte locale (U_i, ϕ_i) vers la carte locale (U_j, ϕ_j) .

Deux atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ et $(U_j, \phi_j)_{j \in J}$ de classe C^∞ sont compatibles si leur réunion est un atlas de classe C^∞ . Cette notion de compatibilité induit une relation d'équivalence entre les atlas.

Définition 3. Une structure lisse pour une variété topologique T est une classe d'équivalence pour la relation de compatibilité entre les atlas de classe C^∞ de T . Une variété topologique munie d'une structure lisse s'appelle une variété lisse.

Proposition 1. Soient M et N deux variétés lisses, il est possible de munir $M \times N$ de la structure lisse formée des cartes locales de la forme $(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)$ où (U_i, ϕ_i) et (V_j, ψ_j) sont des cartes locales de M et N . La variété obtenue se nomme le produit de M et N .

La notion d'orientation sur une variété lisse nous sera utile. On dit qu'un atlas de classe C^∞ est orienté si le déterminant du jacobien de chaque fonction de transition est positif. Deux atlas orientés sont dits compatibles si leur réunion est un atlas orienté et s'ils sont compatibles comme atlas de classe C^∞ . Il s'agit d'une relation d'équivalence. On peut ainsi définir ce qu'est une orientation.

Définition 4. Soit M une variété lisse. Une orientation de M est une classe d'équivalence pour les atlas orientés de M compatible avec la structure lisse de M . La variété M est dite orientable s'il existe une orientation de M .

Proposition 2. Toute variété lisse M orientable et connexe admet exactement deux orientations.

Démonstration. Soient \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 deux atlas orientés de M . S'il existe deux cartes locales (U, ϕ) de \mathcal{O}_1 et (V, ψ) de \mathcal{O}_2 tels que $U \cap V \neq \emptyset$ et $U \cap V$ soit connexe et dont le déterminant de la fonction de transition de ϕ à ψ est ni positif, ni négatif, il existe deux points p et q de $U \cap V$ tels que le déterminant du jacobien soit respectivement positif et négatif en $\phi(p)$ et en $\phi(q)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, le déterminant du jacobien étant une fonction continue, pour chaque fonction lisse $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \cap V$ telle que $\gamma(0) = \phi(p)$ et $\gamma(1) = \phi(q)$, il existe un t tel que le déterminant de la fonction de transition soit nul en $\gamma(t)$. Soit γ_s avec $s \in (-1, 1)$ une famille de telles fonctions variant de façon lisse en s et dont les images n'ont aucune intersection, on peut alors trouver une fonction $t(s)$ tel que le déterminant du jacobien de la fonction de transition soit nul en $\gamma_s(t(s))$ pour tous $s \in (-1, 1)$. Cela implique, par le théorème de la fonction inverse, que la fonction de transition n'a pas d'inverse lisse en $\gamma_0(t(0))$ et est une contradiction.

Puisque M est un espace topologique séparé, si $U \cap V$ n'est pas connexe, on peut prendre $U' \subset U$ et $V' \subset V$ tels que $U' \cap V' \neq \emptyset$ soit connexe et non vide. Autrement on pourrait prendre un point dans chacune des composantes connexes de $U \cap V$ et il n'y aurait pas de voisinage disjoint pour ces deux points, ce qui contredirait le fait que M est

un espace topologique séparé. Ainsi, on ne perd pas en généralité en supposant que $U \cap V$ soit connexe. De plus, comme M est connexe les ouverts d'un atlas vont recouvrir chacun des ouverts de l'autre atlas. Comme n'y a pas d'ensemble ouvert-fermé non-trivial, par continuité le signe du jacobien doit être constant.

Ainsi, toutes fonctions de transition de cartes locales de \mathcal{O}_1 vers \mathcal{O}_2 ont soit tous un déterminant de jacobien positif, soit un déterminant de jacobien négatif. On peut voir aisément qu'il ne peut ainsi y avoir que deux orientations à M .

Si l'on a une orientation en composant toutes les cartes locales avec la fonction $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ on obtient l'autre orientation. \square

Soit M une variété lisse. On dit qu'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ si $f \circ \phi^{-1}$ est de classe C^∞ pour toutes cartes locales (U_i, ϕ) de l'atlas de M . L'intérêt des variétés lisses est que l'on peut dériver des fonctions.

Une dérivation ou un champ de vecteurs X est une application linéaire des fonctions de classe C^∞ vers les fonctions de classe C^∞ satisfaisant

$$X(fg) = gX(f) + fX(g).$$

Une dérivation au point $x \in M$ est une dérivation composée avec l'évaluation au point x . On note l'ensemble des champs de vecteurs par $\mathcal{X}(M)$.

Définition 5. On définit l'espace tangent $T_p M$ au point p comme l'ensemble des dérivations au point p et le fibré tangent TM comme l'union disjointe de $T_p M$ pour tous $p \in M$.

Soient X_1 et X_2 deux champs de vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit $(X_1 + X_2)(f) = X_1(f) + X_2(f)$ et $(\lambda X)(f) = \lambda X(f)$. On peut déduire de ces définitions que les espaces tangents sont des espaces vectoriels.

Proposition 3. Soient X_1, X_2 deux champs de vecteurs. Alors, l'application $[X_1, X_2]$ définie par

$$[X_1, X_2] = X_1 \circ X_2 - X_2 \circ X_1$$

est un champ de vecteurs.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](fg) &= (X_1 \circ X_2 - X_2 \circ X_1)(fg) \\ &= gX_1X_2(f) + fX_1X_2(g) - gX_2X_1(f) - fX_2X_1(g) \\ &= g[X_1, X_2](f) + f[X_1, X_2](g). \end{aligned}$$

\square

Le champ de vecteurs $[X_1, X_2]$ s'appelle le crochet de Lie de X_1 et X_2 .

Définition 6. On définit l'espace cotangent T_p^*M au point p comme le dual de l'espace tangent T_pM et le fibré cotangent comme l'union disjointe des T_p^*M pour tous $p \in M$.

Si $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une paramétrisation locale, alors on peut définir au point $p \in M$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p$ comme $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial f \circ \alpha^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(x)}$ avec $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Les dérivations au point p admettent alors la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right)$ associée à la paramétrisation locale α . On peut aussi définir la base $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ de T_p^*M duale à cette base.

Proposition 4. Soient $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\beta(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux paramétrisations locales de M dans un voisinage d'un point p . Soit $X \in T_pM$. Notons $[X]_\alpha$ et $[X]_\beta$ les coordonnées de X dans les paramétrisations locales α et β . On a

$$[X]_\beta = \frac{\partial(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)}{\partial(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)} [X]_\alpha.$$

Soit $\omega \in T_p^*M$. Notons $[\omega]_\alpha$ et $[\omega]_\beta$ les coordonnées de ω dans les paramétrisations locales α et β . On a

$$[\omega]_\beta = \frac{\partial(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)}{\partial(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)} [\omega]_\alpha.$$

Ici, $\frac{\partial(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)}{\partial(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)}$ désigne le jacobien de la fonction de transition de α vers β et $\frac{\partial(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)}{\partial(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)}$, le jacobien de la fonction de transition de β vers α .

Définition 7. Une métrique riemannienne g sur une variété lisse M est une application sur M tel que l'évaluation au point p donne une forme g_p bilinéaire symétrique et définie positive sur T_pM telle que pour tous $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $g_p(X, Y)$ est une fonction lisse de p .

On aura aussi besoin de définir ce qu'est une application lisse entre deux variétés lisses.

Définition 8. Soient M et N deux variétés lisses et f une application de M vers N . On dit que f est lisse si pour deux cartes locales quelconques (U, ϕ) et (V, ψ) de M et N telles que $f(U) \cap V \neq \emptyset$, on a que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est une application lisse. Si f est bijective et son inverse est aussi une application lisse, on dit que f est un difféomorphisme.

Si l'on a une application lisse entre deux variétés lisses, alors il est intéressant de faire agir cette application sur les fibrés tangents et cotangents.

Définition 9. Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse entre deux variétés lisses M et N . La différentielle df de f est une application de TM vers TN telle que pour un $X \in T_pM$ et une fonction $g : N \rightarrow \mathbb{R}$, $df(X)(g) = X(g \circ f)$.

Définition 10. Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse entre deux variétés lisses M et N . On définit le pullback f^* de f comme une application de T^*N vers T^*M telle que pour $\alpha \in T_{f(p)}^*N$ et $X \in T_pM$, on ait $f^*(\alpha)(X) = \alpha(df(X))$.

Finalement, la définition suivante nous servira.

Définition 11. Deux applications lisses f et g de M vers N sont dites homotopes s'il existe une application lisse h de $M \times [0, 1]$ vers N telle que $h(p, 0) = f(p)$ et $h(p, 1) = g(p)$.

1.2 Formes différentielles, connexions et courbures

On a vu dans la section précédente que si l'on a une variété lisse M de dimension n , on peut définir son fibré cotangent T^*M . Si l'on a une paramétrisation locale $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors on a une base $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ de T^*M . Intuitivement, dx_1 correspond à une petite variation dans la direction de x_1 . On aimerait pouvoir également représenter un élément de surface, de volume, etc. Pour ce faire, il faut considérer la définition suivante.

Définition 12. Soit V un espace vectoriel, l'algèbre extérieure associée à V , notée $\wedge V$ est le quotient de l'algèbre tensorielle associée à V par l'idéal engendré par les éléments de la forme $x \otimes x$. On note son produit \wedge .

On peut poser $\wedge T^*M$ l'union disjointe des algèbres extérieures associées à T_p^*M pour tous $p \in M$. Si l'on a un monôme $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ en $p \in M$, on dit qu'il est de degré k . Si un élément de $\wedge T^*M$ s'écrit comme une somme de monômes de degré k au point p , on dit qu'il est une k -forme différentielle au point p . Notons $\mathcal{A}^k(M)$ l'ensemble des applications ω qui à un point $p \in M$ associent une k -forme différentielle au point p telle que si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, et l'on peut écrire $\omega = f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ dans une paramétrisation locale $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors f est une fonction lisse. Les éléments de $\mathcal{A}^k(M)$ s'appellent des k -formes différentielles. Posons $\mathcal{A}^*(M) = \mathcal{A}^0(M) \cup \mathcal{A}^1(M) \cup \dots \cup \mathcal{A}^n(M)$. Pour bien définir $\mathcal{A}^*(M)$ et $\mathcal{A}^k(M)$, il faut considérer l'effet d'un changement de carte locale.

Si l'on a un changement de carte locale de la paramétrisation locale

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

vers

$$\beta(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

on sait que $dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$. On veut étendre cette relation aux formes différentielles de façon compatible avec le produit \wedge . On montre alors que

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \det \left(\frac{\partial(x_{i_1} \ x_{i_2} \ \dots \ x_{i_k})}{\partial(y_{j_1} \ y_{j_2} \ \dots \ y_{j_k})} \right) dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}.$$

On peut aussi faire agir une application lisse sur une forme différentielle.

Définition 13. Soient M et N deux variétés lisses et $f : M \rightarrow N$ une application lisse. On définit le pullback f^* de f sur les formes différentielles comme l'application linéaire tel que, pour $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k$ avec α_i des 1-formes différentielles, on a $f^*(\omega) = f^*(\alpha_1) \wedge f^*(\alpha_2) \wedge \dots \wedge f^*(\alpha_k)$.

Il existe une opération importante nous permettant de dériver une k -forme différentielle pour obtenir une $(k+1)$ -forme différentielle. Cette opération s'appelle la dérivée extérieure. Elle est définie comme suit pour une k -forme $\omega = f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ dans une paramétrisation locale $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (1.1)$$

On peut montrer que la dérivée extérieure ne dépend pas de la paramétrisation locale choisie.

On peut montrer que si $f : M \rightarrow N$ est une application lisse et ω une forme différentielle de N , alors $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$.

On peut remarquer que $d^2 = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} d^2\omega &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{j < k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} (dx_j \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\ &\quad dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = 0. \end{aligned}$$

Cette remarque nous servira plus tard.

Définition 14. On dit qu'une k -forme ω est fermée si $d\omega = 0$. On dit qu'une k -forme ω est exacte s'il existe une $(k-1)$ -forme $\tilde{\omega}$ telle que $d\tilde{\omega} = \omega$.

L'intérêt des formes différentielles est qu'elles peuvent être intégrées. Si ω est une n -forme différentielle et M une variété lisse orientée de dimension n , soit (U_i, f_i) une partition de l'unité de M où chaque U_i est doté de coordonnées locales. C'est-à-dire que f_i

sont des fonctions lisses de U_i vers \mathbb{R} tels que pour tous $p \in M$, \sum_i tels que $p \in U_i$ $f_i(p) = 1$. Alors, on définit

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega \quad (1.2)$$

où si $\omega = g dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ dans une paramétrisation locale $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'un U_i , alors $\int_{U_i} f_i \omega = \int_{U_i} f_i g dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

Remarque 1. Remarquons que si l'on ne considère pas une variété orientée les $\int_{U_i} f_i \omega$ sont définies au signe près. Le choix d'une orientation nous garantit que $\int_M \omega$ est bien définie.

Il sera aussi utile de définir $\mathcal{A}^k(M; \mathbb{C}) := \mathcal{A}^k(M) \otimes \mathbb{C}$, le complexifié de $\mathcal{A}^k(M)$. La dérivée extérieure s'étend à $\mathcal{A}^k(M; \mathbb{C})$ linéairement ($d(i\omega) = id\omega$).

Si l'on a une 1-forme différentielle α et une base donnée, on peut la représenter par un vecteur ligne $[\alpha]$ tel que

$$\alpha = [\alpha] \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Si l'on a une 2-forme différentielle ω , on peut la représenter par une matrice antisymétrique $[\omega]$ telle que

$$\omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & \dots & dx_n \end{pmatrix} \wedge [\omega] \wedge \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Pour deux 1-formes différentielles α_1 et α_2 , on a

$$[\alpha_1 \wedge \alpha_2] = [\alpha_1]^\top [\alpha_2] - [\alpha_2]^\top [\alpha_1] \quad (1.5)$$

et

$$[d\alpha_1] = [\partial\alpha_1] - [\partial\alpha_1]^\top \quad (1.6)$$

où $[\partial\alpha_1] = \left(\frac{\partial(\alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1n})}{\partial(x_1 x_2 \dots x_n)} \right)^\top$ avec $[\alpha_1] = (\alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1n})$.

Maintenant que l'on a introduit les formes différentielles, nous pourrions introduire la notion de connexion et de courbure sur un fibré vectoriel et un fibré complexe.

Définition 15. Soit M une variété lisse. Un fibré vectoriel de dimension n est une variété lisse E et une application lisse $\pi : E \rightarrow M$ telle que pour tous $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . De plus, pour chaque $p \in M$, il existe un ouvert U et

un difféomorphisme ϕ_U de $\pi^{-1}(U)$ vers $U \times \mathbb{R}^n$ tel que pour chaque $q \in U$, la restriction de ϕ_U à $\pi^{-1}(q)$ donne un isomorphisme de $\pi^{-1}(q)$ vers $\{q\} \times \mathbb{R}^n$. On dit que ϕ_U est une trivialisatation de E .

Par abus de langage, on dit aussi que E est un fibré vectoriel de M . En remplaçant le \mathbb{R} -espace vectoriel par un \mathbb{C} -espace vectoriel et \mathbb{R}^n par \mathbb{C}^n dans la définition, on obtient un fibré vectoriel complexe.

Définition 16. Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel (ou complexe). Une section de E est une application lisse $s : M \rightarrow E$ tel que $\pi \circ s = \mathbb{I}$. L'ensemble des section de E se note $\Gamma(E)$.

Deux exemples simples de fibré vectoriel sont TM et T^*M . Les trivialisations correspondent alors à la dérivation dans des cartes locales et au pullback de la dérivation dans des cartes locales en identifiant $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$. Une section de TM correspond à un champ de vecteurs alors qu'une section de T^*M correspond à une 1-forme différentielle.

Nous allons maintenant définir une connexion et sa courbure.

Définition 17. Soit E un fibré vectoriel (ou complexe), une connexion réelle (ou complexe) est une application bilinéaire $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ tel que $\nabla_{fX}s = f\nabla_Xs$ et $\nabla_X(fs) = f\nabla_Xs + X(f)s$ pour $X \in \mathcal{X}(M)$ et $s \in \Gamma(E)$ avec f une application lisse de M vers \mathbb{R} (ou \mathbb{C}).

On peut doter les fibrés tangents de métriques.

Définition 18. Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel (ou complexe). Le fibré E est muni d'une métrique g riemannienne (ou hermitienne) si pour chaque $p \in M$ on a une forme g_p bilinéaire, symétrique et définie positive (ou hermitienne définie positive) dans $\pi^{-1}(p)$ tel que, pour une paramétrisation locale $\sigma(s_1(p), s_2(p), \dots, s_n(p))$ de E , on a que $g_p(s_i(p), s_j(p))$ est une fonction lisse de p .

Notons que l'on peut exprimer une paramétrisation locale de E de cette façon par la trivialisatation donnée par la définition d'un fibré vectoriel (ou complexe).

Définition 19. Soit E un fibré vectoriel (ou complexe) et ∇ une connexion réelle (ou complexe). La courbure R associée à ∇ est l'application qui, à une paire de champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, associe l'application $R(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X, Y]})$.

Notons que $R(X, Y) = -R(Y, X)$. On peut vérifier que

$$R(fX, gY)(hs) = fghR(X, Y)(s)$$

où f, g, h sont des fonctions lisses de M vers \mathbb{R} .

Si l'on a un fibré vectoriel (ou complexe) E , une connexion ∇ et une paramétrisation locale

$$\sigma(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

de E , il existe des 1-formes $\omega_j^i \in \mathcal{A}^1(M)$ (ou $\in \mathcal{A}^1(M; \mathbb{C})$) telles que

$$\nabla_X s_j = \sum_{i=1}^n \omega_j^i(X) s_i \quad (1.7)$$

et des 2-formes $\Omega_j^i \in \mathcal{A}^2(M)$ (ou $\in \mathcal{A}^2(M; \mathbb{C})$) telles que

$$R(X, Y)(s_j) = \sum_{i=1}^n \Omega_j^i(X, Y) s_i. \quad (1.8)$$

Posons $\omega = [\omega_j^i]_{ij}$ et $\Omega = [\Omega_j^i]_{ij}$. On nomme ω la forme de connexion et Ω la forme de courbure de la connexion ∇ .

Proposition 5. *On a $\Omega_j^i = \sum_{k=1}^n \omega_k^i \wedge \omega_j^k + d\omega_j^i$.*

On va s'intéresser à l'effet d'un changement de base sur la forme de courbure.

Proposition 6. *Si l'on a deux paramètres locaux α et β et si Ω_α et Ω_β dénotent les formes de courbure des paramètres locaux α et β , alors $\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \Omega_\alpha g_{\alpha\beta}$ où $g_{\alpha\beta}$ est le jacobien de la fonction de transition de β vers α .*

Certaines connexions sont plus naturelles à une métrique donnée.

Définition 20. *Soit E un fibré vectoriel (ou complexe) muni d'une métrique g riemannienne (ou hermitienne) et ∇ une connexion réelle (ou complexe). On dit que ∇ est compatible avec g si, pour deux sections quelconques s et t de E , on a pour tous $X \in \mathcal{X}$, $X(g(s, t)) = g(\nabla_X s, t) + g(s, \nabla_X t)$.*

Posons ω la forme de connexion ∇ , qui est compatible avec la métrique g . Si l'on choisit une base orthonormale

$$\sigma(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

sur E , on a alors

$$0 = X(g(s, t)) = g(\nabla_X s, t) + g(s, \nabla_X t).$$

Comme on a alors $\omega_j^i(X) = g(\nabla_X s_j, s_i)$, on déduit que la forme de connexion ω est antisymétrique (ou antihermitienne). On a aussi que la forme de courbure Ω est aussi antisymétrique (ou antihermitienne) suivant la Proposition 5.

Le théorème suivant nous garantit que chaque fibré tangent admet une connexion avec de bonnes propriétés.

Théorème 1. *Il existe une unique connexion ∇ sur le fibré tangent TM compatible avec la métrique tel que $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$. Cette dernière quantité s'appelle la torsion de la connexion ∇ . Cette connexion s'appelle la connexion de Levi-Civita.*

Si, pour une certaine paramétrisation locale $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on pose $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ où $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ et ∇ est la connexion de Levi-Civita et l'on note également $g_{ij} = g(X_i, X_j)$ et g^{ij} le coefficient i, j de l'inverse de la matrice $[g(X_i, X_j)]_{ij}$. On peut montrer que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (X_i(g_{jl}) + X_j(g_{li}) - X_l(g_{ij})) g^{kl}. \quad (1.9)$$

Les Γ_{ij}^k s'appellent les symboles de Christoffel.

On a alors la relation

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k = \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \omega_j^k(X_i) X_k, \quad (1.10)$$

qui nous permet de trouver les formes de connexions à partir des symboles de Christoffel.

Pour conclure cette section, nous définirons la forme de volume associée à une métrique riemannienne. Si l'on muni \mathbb{R}^n d'un produit scalaire g , pour une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, le volume du parallélépipède P engendré par v_1, v_2, \dots, v_n est $\sqrt{\det(VV^\top)}$ où V est une matrice dont la i -ième colonne est composée des coordonnées de v_i dans une base ortho-normale pour le produit scalaire g . Si $[g]$ est la matrice représentant le produit scalaire dans la base \mathcal{B} , on a $[g] = VV^\top$. Ainsi, le volume de P est $\sqrt{\det([g])}$. On peut ainsi définir la forme de volume sur une variété riemannienne.

Définition 21. *Soit M une variété lisse orientée muni d'une métrique riemannienne g . Si*

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est une paramétrisation locale compatible avec l'orientation et si $[g]$ est la matrice de g dans la base de TM associée à α , on définit la forme de volume de M comme

$$\mu = \sqrt{\det([g])} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (1.11)$$

1.3 Homologie

Dans cette section, on introduit le concept d'homologie, qui sera utile pour définir les classes caractéristiques.

Définition 22. Soient $A_* = (A_1, A_2, \dots)$ une suite de modules et $\phi_* = (\phi_1, \phi_2, \dots)$ où $\phi_i : A_{i+1} \rightarrow A_i$ est un homomorphisme tel que $\phi_i \circ \phi_{i+1} = 0$. Alors on dit que (A_*, ϕ_*) est un complexe de chaînes.

Définition 23. Soit (A_*, ϕ_*) un complexe de chaînes. On définit $H_i(A_*, \phi_*) = \frac{\text{Ker}(\phi_i)}{\text{Im}(\phi_{i+1})}$ comme la $(i+1)$ -ième homologie de (A_*, ϕ_*) pour $i \geq 1$ et $H_0(A_*, \phi_*) = \frac{A_1}{\text{Im}(\phi_1)}$ comme la première homologie de (A_*, ϕ_*) . De plus, on définit

$$H_*(A_*, \phi_*) = (H_0(A_*, \phi_*), H_1(A_*, \phi_*), \dots)$$

comme l'homologie de (A_*, ϕ_*) .

Définition 24. Soient $A_* = (A_1, A_2, \dots)$ une suite de modules et $\phi^* = (\phi^1, \phi^2, \dots)$ où $\phi^i : A_i \rightarrow A_{i+1}$ est un homomorphisme tel que $\phi^{i+1} \circ \phi^i = 0$. Alors on dit que (A^*, ϕ^*) est un complexe de cochaînes.

Définition 25. Soit (A_*, ϕ^*) un complexe de cochaînes. On définit $H^i(A_*, \phi^*) = \frac{\text{Ker}(\phi_{i+1})}{\text{Im}(\phi^i)}$ comme la $(i+1)$ -ième cohomologie de (A_*, ϕ^*) pour $i \geq 1$ et $H^0(A_*, \phi^*) = \text{Ker}(\phi_1)$ comme la première cohomologie de (A_*, ϕ^*) . De plus, on définit $H^*(A_*, \phi^*) = (H^0(A_*, \phi_*), H^1(A_*, \phi_*), \dots)$ comme la cohomologie de (A_*, ϕ_*) .

On définit un k -simplexe C comme $\{\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \mid \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \text{ pour tous } i\}$ où les u_i forment un ensemble de vecteurs de \mathbb{R}^N affinement indépendants avec $N \in \mathbb{N}$ quelconque. Intuitivement, un simplexe est l'enveloppe convexe de points u_0, u_1, \dots, u_k . Comme ils sont affinement indépendants, leur enveloppe convexe est de dimension k . Ces simplexes nous permettent de construire des complexes simpliciaux.

Définition 26. Un complexe simplicial \mathcal{C} est un ensemble de simplexes tel que le bord de chaque simplexe de \mathcal{C} est composé de simplexes de \mathcal{C} et que l'intersection de deux simplexes de \mathcal{C} est soit vide, soit un autre simplexe de \mathcal{C} .

Supposons que l'on ait une variété topologique T et qu'il existe un complexe simplicial \mathcal{C} tel que $T \cong \mathcal{C}$ où, par abus de notation, \mathcal{C} désigne l'union de tous ses complexes simpliciaux. On dit que T est triangulée par le complexe simplicial \mathcal{C} . La donnée de \mathcal{C} et l'homéomorphisme s'appelle une triangulation de T . On dit que T est triangularisable s'il existe une triangulation de T .

Soit \mathcal{C} un complexe simplicial. À chaque l -simplexe de \mathcal{C} , on peut assigner une orientation. Notons $C_l(\mathcal{C}; R)$ le R -module libre engendré par les l -simplexes orientés de \mathcal{C} avec R un anneau quelconque. On pose un opérateur linéaire ∂_{l-1} de $C_l(\mathcal{C}; R)$ vers $C_{l-1}(\mathcal{C}; R)$. Pour un l -simplexe orienté C engendré par u_0, u_1, \dots, u_l , on pose

$$\partial_{l-1} C = \sum_{i=0}^l (-1)^i \langle u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_l \rangle \quad (1.12)$$

où $\langle u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_l \rangle$ désigne le simplexe engendré par $u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_l$. L'opérateur ∂ peut ainsi s'étendre linéairement sur $C_l(\mathcal{C}; R)$ et est bien défini si u_0, u_1, \dots, u_l sont ordonnées d'une façon compatible avec l'orientation.

Remarquons que $\partial_l \circ \partial_{l-1} = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} & (-1)^i (-1)^j \langle u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_{l+1} \rangle \\ &= -(-1)^{j-1} (-1)^i \langle u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{l+1} \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $(C_*(\mathcal{C}; R), \partial_*)$ forme un complexe de chaînes. Notons $H_*(\mathcal{C}; R) = H_*(C_*(\mathcal{C}; R), \partial_*)$. On nomme cette homologie l'homologie simpliciale.

Si l'on a une variété topologique T triangulée par deux complexes de chaînes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , il n'est pas évident que $H_*(\mathcal{C}_1; R) \cong H_*(\mathcal{C}_2; R)$. Toutefois, on peut construire une autre homologie directement à partir de T . On pose $\Delta^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1, x_i \geq 0 \text{ pour tous } i\}$. On pose $S^k(T; R)$ comme le R -module libre engendré par l'ensemble des homomorphismes de Δ^k vers T . On définit l'application $\epsilon_i : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ pour $i = 0, \dots, k$ par

$$\epsilon_0(x_1, \dots, x_{k-1}) = \left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} x_i, x_1, \dots, x_{k-1} \right) \quad (1.13)$$

et

$$\epsilon_i(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1}). \quad (1.14)$$

On définit l'application linéaire $\tilde{\partial}_{k-1} : S^k(T; R) \rightarrow S^{k-1}(T; R)$ de la façon suivante. Soit $\sigma : \Delta^k \rightarrow T$, alors

$$\tilde{\partial}_{k-1} \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \epsilon_i. \quad (1.15)$$

En étendant linéairement cette définition, on définit $\tilde{\partial}_{k-1}$ pour tout $S^k(T; R)$. Ici aussi, on a que

$$\tilde{\partial}_k \circ \tilde{\partial}_{k-1} = 0.$$

On obtient donc un complexe de chaînes et une homologie associée dite homologie singulière et notée $H_*(S_*(T))$.

On peut montrer que si une variété topologique T peut être triangulée par un complexe simplicial \mathcal{C} , alors $H_*(S_*(T))$ est isomorphe avec $H_*(\mathcal{C}; R)$. En particulier, si on a une autre triangulation $\tilde{\mathcal{C}}$ de T , alors $H_*(\mathcal{C}; R) \cong H_*(\tilde{\mathcal{C}}; R)$ et on peut définir $H_*(T; R) = H_*(\mathcal{C}; R)$ à isomorphisme près.

L'homologie $H_*(T; R)$ n'est définie que s'il existe une triangulation de T . Ce ne sont pas toutes les variétés topologiques qui en admettent une. Toutefois toutes les variétés lisses en admettent une comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 2. *Toute variété lisse M admet une triangulation formée d'un complexe de chaînes \mathcal{C} et d'un homéomorphisme ϕ telle que la restriction de ϕ à chaque simplexe est un difféomorphisme.*

Définition 27. *Soit T une variété topologique compacte et triangularisable, on définit*

$$\beta_i = \text{Dim}(H_i(T, \mathbb{R})) \quad (1.16)$$

comme le i -ième nombre de Betti. De plus, on appelle la somme alternée

$$\chi(T) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i \quad (1.17)$$

la caractéristique d'Euler de T .

Il y a aussi possible de construire une cohomologie avec les formes différentielles pour une variété lisse M . En effet, on a que pour une forme différentielle ω , $d^2\omega = 0$. En respectant la notation de cette section, pour une k -forme différentielle ω , on peut définir un homomorphisme $d^k := d$ vers les $(k+1)$ -formes différentielles et $d^{k+1} \circ d^k = 0$. La cohomologie $H_{DR}^*(M)$ associée, dite de Rham, correspond aux formes différentielles fermées quotientées par les formes différentielles exactes.

Lemme 1. *Si l'on a deux variétés lisses M et N et une application lisse $f : M \rightarrow N$, alors le pullback f^* par f induit une application notée également f^* de $H_{DR}^*(N)$ vers $H_{DR}^*(M)$. De plus, si \tilde{f} est une autre application lisse de M vers N homotope à f , alors $f^* = \tilde{f}^*$ en considérant leur action dans l'homologie.*

Démonstration. Nous montrerons seulement la première partie.

Soit ω une forme différentielle exacte de N , il existe alors une forme différentielle $\tilde{\omega}$ telle que $d\tilde{\omega} = \omega$. On a $f^*(\omega) = f^*(d\tilde{\omega}) = df^*(\tilde{\omega})$. Ainsi, $f^*(\omega)$ est exacte. Soit ω une forme différentielle fermée de N , alors $df^*(\omega) = f^*(d\omega) = f^*(0) = 0$. Ainsi, $f^*(\omega)$ est fermée et f^* induit une application de $H_{DR}(N)$ vers $H_{DR}(M)$. \square

1.4 Classes caractéristiques

Soient M une variété lisse de dimension n et $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Soit ∇ une connexion associée à E . Posons Ω la forme de courbure de ∇ . Celle-ci s'exprime comme une matrice dépendant d'un choix de base. Rappelons que si l'on a deux matrices de 2-formes de courbure Ω_α et Ω_β associées à deux bases α et β , alors $\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \Omega_\alpha g_{\alpha\beta}$ où $g_{\alpha\beta}$ est la matrice de passage de β vers α . Définissons $\sigma_i(\Omega)$ pour $i \leq n$ de sorte que

$$\det(I_n + t\Omega) = 1 + \sigma_1(\Omega)t + \sigma_2(\Omega)t^2 + \dots + \sigma_n(\Omega)t^n. \quad (1.18)$$

Comme le polynôme caractéristique d'une matrice ne dépend pas du choix de base, on déduit que $\sigma_i(\Omega)$ ne dépend pas du choix de base. Remarquons que $\sigma_1(\Omega) = \text{Tr } \Omega$ et $\sigma_n(\Omega) = \det(\Omega)$.

Notons $P_n = \mathbb{R}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$ les polynômes à coefficients dans \mathbb{R} et dont les indéterminés sont $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Pour chaque polynôme f de degré k de P_n , $f(\Omega)$ définit une $2k$ -forme sur M . De plus, on a la proposition suivante que l'on ne démontre pas.

Proposition 7. *Soit f un polynôme de degré k de P_n , alors $f(\Omega)$ est une $2k$ -forme fermée.*

Ainsi, on peut donc définir $[f(\Omega)]$, la projection de $f(\Omega)$ dans $H_{DR}^{2k}(M)$.

Proposition 8. *La classe $[f(\Omega)]$ ne dépend pas du choix de connexion ∇ .*

Démonstration. Soient ∇_1 et ∇_2 deux connexions associées à E et leurs formes de courbure Ω_1 et Ω_2 . L'application $\pi \times \mathbb{I} : E \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ définit un fibré vectoriel sur $M \times \mathbb{R}$. On peut regarder une section s de E comme une section de $E \times \mathbb{R}$ ne dépendant pas de la composante t associée à \mathbb{R} . On définit une connexion $\tilde{\nabla}$ sur $M \times \mathbb{R}$ de la façon suivante

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} s = 0 \text{ et} \quad (1.19)$$

$$\tilde{\nabla}_X s = (1-t)\nabla_X^1 s + t\nabla_X^2 s \quad (1.20)$$

avec $X \in T_{(p,t)}(M \times \{t\})$. Ces deux conditions sont suffisantes pour définir $\tilde{\nabla}$. Notons $\tilde{\Omega}$ sa forme de courbure.

Pour $\epsilon \in \{1, 2\}$, définissons $i_\epsilon : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ par $i_\epsilon(x) = (x, \epsilon)$. Comme i_1 et i_2 sont homotopes,

$$[f(\Omega_1)] = i_1^*([f(\tilde{\Omega})]) = i_2^*([f(\tilde{\Omega})]) = [f(\Omega_2)]. \quad (1.21)$$

□

À la suite de cette proposition, on peut nommer sans ambiguïté $[f(\Omega)]$ la classe caractéristique de f .

On peut maintenant définir la classe de Pontryagin.

Définition 28. *On définit la k -ième classe de Pontryagin $p_k(E)$ du fibré vectoriel E par $\frac{1}{(2\pi)^{2k}} \sigma_{2k}$.*

Si E est de dimension $2n$ paire, en se donnant une forme de courbure Ω , on a

$$\left[\det \left(\frac{1}{2\pi} \Omega \right) \right] = p_n(E). \quad (1.22)$$

Supposons maintenant que le fibré vectoriel E est de dimension paire et orienté et que M est munie d'une métrique riemannienne. Supposons de plus que la connexion ∇

est compatible avec la métrique. Comme la forme de courbure est représentée par une matrice antisymétrique dans une base orthonormale, c'est un fait connu que l'on peut alors définir localement la "racine carrée" de son déterminant, on nomme cette opération le pfaffien et on la note Pf. Formellement,

$$\text{Pf}(\Omega) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \Omega_{\sigma(i)}^{\sigma(i+n)}. \quad (1.23)$$

On peut alors vérifier que $(\text{Pf}(\Omega))^2 = \det(\Omega)$.

Pour une matrice orthogonale $T \in O(2n)$, on a $\text{Pf}(T^{-1}\Omega T) = \det(T) \text{Pf}(\Omega)$. En particulier, si $T \in SO(2n)$, $\text{Pf}(T^{-1}\Omega T) = \text{Pf}(\Omega)$. En considérant localement des bases orthonormales compatibles avec l'orientation de E , on peut définir globalement sans ambiguïté le pfaffien de la forme de courbure. Comme $\text{Pf}(\Omega)$ est une n -forme, il est évident qu'elle est fermée.

On peut appliquer le même raisonnement que la Proposition 8 pour montrer que la projection du pfaffien de la forme de courbure dans $H_{DR}^n(M)$ ne dépend pas du choix de connexion. De même, la projection du pfaffien de la forme de courbure dans $H_{DR}^n(M)$ ne dépend pas du choix de métrique. Si g_1 et g_2 sont deux métriques, on peut considérer la famille de métriques de la forme $(1-t)g_1 + tg_2$.

On peut ainsi définir la classe d'Euler comme suit.

Définition 29. On définit $\text{eu}(E) = [\frac{1}{(2\pi)^n} \text{Pf}(\Omega)]$, la projection de $\frac{1}{(2\pi)^n} \text{Pf}(\Omega)$ dans $H_{DR}^{2n}(M)$. On dit que $\text{eu}(E)$ est la classe d'Euler de E .

La classe d'Euler permet de généraliser le théorème de Gauss-Bonnet au théorème de Chern-Gauss-Bonnet.

Théorème 3. Soit M une variété riemannienne orientée de dimension $2n$ et compacte. Alors,

$$\chi(M) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_M \text{eu}(E) \quad (1.24)$$

où E est un fibré tangent de M .

Normalement, il ne devrait pas y avoir de $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Toutefois, nous avons utilisé une définition du pfaffien un peu différente. Normalement, il devrait y avoir, dans l'équation (1.23), le produit des $\Omega_{\sigma(2i)}^{\sigma(2i-1)}$ au lieu des $\Omega_{\sigma(i)}^{\sigma(i+n)}$. En précomposant les σ de notre définition avec la permutation σ_0 tel que pour $i \leq n$, $\sigma_0(i) = 2i$ et $\sigma_0(i+n) = 2i-1$ on obtient presque la définition plus usuelle. Au lieu de calculer la signature de σ , il faudrait calculer la signature de $\sigma \circ \sigma_0$. Or, $\text{sgn}(\sigma_0) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Il n'est pas évident que cette intégrale soit bien définie. Mais, le théorème de Stokes nous le garantit. Nous présenterons seulement un corollaire.

Théorème 4. *Soit M une variété lisse orientée compacte de dimension n et ω une n -forme différentielle exacte sur M . Alors,*

$$\int_M \omega = 0. \quad (1.25)$$

Ainsi, si l'on a deux représentants α_1 et α_2 de $\text{eu}(E)$, alors $\alpha_1 - \alpha_2$ est une forme exacte. Ainsi, puisque M est compacte,

$$\int_M (\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \quad (1.26)$$

Le théorème de Chern-Gauss-Bonnet nous permet donc de calculer la caractéristique d'Euler avec le pfaffien de la forme de courbure. Toutefois, il serait plus pratique de calculer un déterminant. En considérant des fibrés complexes, c'est possible.

Soit $E_{\mathbb{C}}$ un fibré complexe muni d'une métrique hermitienne de dimension n sur une variété lisse M de dimension $2n$. Soit $\nabla_{\mathbb{C}}$ connexion associée à $E_{\mathbb{C}}$ compatible avec la forme hermitienne et $\Omega_{\mathbb{C}}$ sa forme de courbure. Alors, $\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sigma_k(\Omega_{\mathbb{C}})$ définit une k -forme. Comme pour le cas réel, on peut montrer que cette forme est fermée. De plus, puisque dans une base orthonormale, la matrice de $\Omega_{\mathbb{C}}$ est antihermitienne, on déduit qu'il s'agit d'une k -forme réelle. On peut alors définir les classes de Chern.

Définition 30. *La k -ième classe de Chern $c_k(E_{\mathbb{C}})$ de $E_{\mathbb{C}}$ est*

$$\left[\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sigma_k(\Omega_{\mathbb{C}}) \right] \quad (1.27)$$

la projection de $\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sigma_k(\Omega_{\mathbb{C}})$ dans $H_{DR}^{2n}(M)$.

On a la proposition suivante, qui donne une équivalence entre la classe d'Euler et la n -ième classe de Chern.

Proposition 9. *Soit M une variété lisse de dimension $2n$ muni d'un fibré complexe $E_{\mathbb{C}}$ avec une métrique hermitienne. Alors, $\text{eu}(E_{\mathbb{R}}) = c_n(E_{\mathbb{C}})$ où $E_{\mathbb{R}}$ désigne le fibré complexe $E_{\mathbb{C}}$ regardé comme fibré vectoriel.*

Démonstration. Soit $\nabla_{\mathbb{C}}$ une connexion complexe compatible avec la métrique. On peut considérer $\nabla_{\mathbb{R}}$ la connexion réelle associée sur $\pi_{\mathbb{R}}$. Soit $\Omega_{\mathbb{C}}$ la forme de courbure associée à $\nabla_{\mathbb{C}}$. Dans une base \mathcal{B} donnée, on peut écrire les 2-formes Ω_j^i de courbure de $\Omega_{\mathbb{C}}$ comme $\Omega_j^i = a_j^i + b_j^i i$ avec a_j^i et b_j^i des 2-formes réelles. Si $\Omega_{\mathbb{R}}$ est la forme de courbure réelle

associée à $\Omega_{\mathbb{C}}$, alors dans la base réelle $\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$, la matrice de $\Omega_{\mathbb{R}}$ est

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & -b_1^1 & -b_2^1 & \cdots & -b_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & -b_1^2 & -b_2^2 & \cdots & -b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n & -b_1^n & -b_2^n & \cdots & -b_n^n \\ b_1^1 & b_2^1 & \cdots & b_n^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_n^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

On sait que les valeurs propres de $\Omega_{\mathbb{C}}$ sont imaginaires pures, on peut donc les écrire comme ib_1, ib_2, \dots, ib_n . Si $\Omega_{\mathbb{C}}$ se diagonalise par une matrice unitaire U , alors on a

$$U_{\mathbb{R}}^{-1} \Omega_{\mathbb{R}} U_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où $U_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(U) & -\operatorname{Im}(U) \\ \operatorname{Im}(U) & \operatorname{Re}(U) \end{pmatrix}$. On déduit que

$$\det(\Omega_{\mathbb{C}}) = i^n b_1 b_2 \dots b_n$$

et

$$\operatorname{Pf}(\Omega_{\mathbb{R}}) = (-1)^n b_1 b_2 \dots b_n.$$

Ainsi, $\det\left(-\frac{1}{2\pi i} \Omega_{\mathbb{C}}\right) = \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{2\pi} \Omega_{\mathbb{R}}\right)$. \square

Ainsi, selon la proposition précédente et le théorème de Chern-Gauss-Bonnet, pour une variété lisse M et un fibré complexe $E_{\mathbb{C}}$ associé muni d'une métrique hermitienne, on a

$$\chi(M) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_M c_n(E_{\mathbb{C}}). \quad (1.28)$$

Il faut par contre faire attention à l'orientation choisie dans la précédente équation. On a utilisé la convention que si l'on a une base complexe (e_1, e_2, \dots, e_n) , alors en posant $f_j = ie_j$, la base réelle orientée associée est $(e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n)$. Dans le théorème de Chern-Gauss-Bonnet, si l'on inverse l'orientation pour calculer l'intégrale, cela ne change

rien puisque le pfaffien va aussi changer de signe. Si l'on choisit plutôt la convention selon laquelle la base réelle orientée associée est $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_n, f_n)$, on obtient plutôt simplement

$$\chi(M) = \int_M c_n(E_{\mathbb{C}}). \quad (1.29)$$

1.5 Orbifold

Dans cette section, on introduit les orbifolds, qui sont des variétés ayant de possibles singularités. Ceux-ci peuvent, en particulier, correspondre au quotient d'une variété par un groupe agissant de façon proprement discontinue. Dans le cas où l'espace est compact, on peut étendre la notion de classe caractéristique à certains orbifolds.

Définition 31. *Une carte locale d'orbifold sur un espace topologique T est la donnée de (\tilde{U}, G, π) où \tilde{U} est un ouvert de \mathbb{R}^n , G est un groupe fini d'homéomorphismes de \tilde{U} et $\pi = \tilde{\pi} \circ p$ de \tilde{U} vers T avec p la projection de \tilde{U} dans \tilde{U}/G et où $\tilde{\pi}$ induit un homéomorphisme de \tilde{U}/G vers un ouvert de T .*

Définition 32. *Une fonction de transition entre deux cartes locales d'orbifolds*

$$(\tilde{U}_1, G_1, \pi_1)$$

et

$$(\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$$

est une application lisse τ de \tilde{U}_1 vers \tilde{U}_2 tel que $\pi_2 \circ \tau = \pi_1$.

Deux cartes locales d'orbifold $(\tilde{U}_1, G_1, \pi_1)$ et $(\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$ sont dites compatibles si $V = \pi_1(\tilde{U}_1) \cap \pi_2(\tilde{U}_2) \neq \emptyset$ et il existe une carte locale d'orbifold (\tilde{V}, H, ϕ) où $V = \phi(\tilde{V})$ et deux fonctions de transition de (\tilde{V}, H, ϕ) vers $(\tilde{U}_1, G_1, \pi_1)$ et $(\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$.

Définition 33. *Un atlas d'orbifold sur un espace topologique T est une collection de cartes locales d'orbifold $\{(\tilde{U}_i, G_i, \pi_i)\}_{i \in I}$ telle que $\cup_{i \in I} \pi_i(\tilde{U}_i) = T$.*

Définition 34. *Un orbifold O est un espace topologique séparé à base dénombrable T muni d'un atlas d'orbifold.*

On peut aisément voir que si les groupes G_i sont triviales, alors O est une variété lisse.

Nous nous intéresserons aux orbifolds donnés par la proposition suivante.

Proposition 10. *Soit M une variété lisse et G un groupe agissant de manière proprement discontinue sur M . Alors, M/G a une structure d'orbifold.*

Démonstration. Pour un $x \in M/G$, choisissons un $\tilde{x} \in M$ se projetant sur x . Soit $I_{\tilde{x}}$ le sous-groupe de G fixant \tilde{x} (qui est fini, car l'action est proprement discontinue). Il est possible de choisir un voisinage $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ de \tilde{x} invariant par $I_{\tilde{x}}$ et disjoint de ses images par les éléments du groupe $I_{\tilde{x}}$. \square

Pour ces orbifolds, on peut associer une caractéristique d'Euler de la façon suivante.

Définition 35. Soit M une variété lisse compacte et G un groupe agissant de manière proprement discontinue sur M . Alors, on pose

$$\chi(M/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(M^g) \quad (1.30)$$

où M^g est l'ensemble des points fixes de g sur M .

En particulier, si G est un groupe sans point fixe, alors

$$\chi(M/G) = \frac{\chi(M)}{|G|}. \quad (1.31)$$

Dans le reste de la section, nous allons étendre le théorème de Chern-Gauss-Bonnet aux orbifolds.

Définition 36. Un domaine fondamental d'un groupe G agissant sur un ensemble E est un sous-ensemble F de E tel que pour tout $x \in E$, l'orbite Gx ne contient qu'un seul élément de F .

Proposition 11. Soient M une variété lisse orientée et G un groupe discret agissant de manière proprement discontinue sur M et F un domaine fondamental compact de G sur M . Alors,

$$\chi(M/G) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_F \text{eu}(E) \quad (1.32)$$

où E est un fibré tangent de M .

Démonstration. Il existe un sous-groupe normal \tilde{G} de G tel que M/\tilde{G} ait la structure d'une variété lisse orientée. Il y a toujours au moins le groupe engendré par l'identité. Puisque F est compact, on peut supposer que G/\tilde{G} est d'ordre fini, car le quotient ne peut avoir qu'un nombre fini de singularités. Soit \tilde{F} un domaine fondamental de \tilde{G} sur M . On peut prendre $\tilde{F} \supset F$. Le volume de \tilde{F} est $|G/\tilde{G}|$ fois le volume de F où $|G/\tilde{G}|$ est l'ordre du groupe \tilde{G} .

On a alors, par le théorème de Chern-Gauss-Bonnet,

$$\chi(M/\tilde{G}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_{M/\tilde{G}} \text{eu}(E) = |G/\tilde{G}| (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_F \text{eu}(E) \quad (1.33)$$

où E est un fibré vectoriel de M .

Par conséquent,

$$\chi(M/G) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_F \text{eu}(E). \quad (1.34)$$

□

Évidemment, on peut aussi utiliser la n ième classe de Chern et la remarque sur le choix de la base réelle associée et du facteur $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ est toujours valide.

Chapitre 2

Matrices

Comme nous allons considérer un espace formé de matrices, des résultats sur celles-ci seront nécessaires. Notons \mathcal{M}_n l'espace des matrices $n \times n$.

2.1 Décomposition de matrices

Certaines décompositions matricielles nous seront très utiles en particulier la décomposition en valeurs propres et la décomposition LDL. Pour cette section, les matrices sont à coefficients réels.

Définition 37. Soient $M \in \mathcal{M}_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que $v \neq 0$ est un vecteur propre de la valeur propre λ pour la matrice M si

$$Mv = \lambda v. \tag{2.1}$$

Pour trouver les valeurs propres λ de la matrice M , il suffit de résoudre $\det(M - \lambda I_n) = 0$. On pourra alors trouver les vecteurs propres v associés en résolvant $(M - \lambda I_n)v = 0$.

Proposition 12. Supposons que $M \in \mathcal{M}_n$ ait n vecteurs propres linéairement indépendants, alors il existe une matrice Q dont les colonnes sont des vecteurs propres de M et une matrice D diagonale formée des valeurs propres de M telles que

$$M = QDQ^{-1}. \tag{2.2}$$

De plus, la i -ième colonne de Q est un vecteur propre associé à la valeur propre D_{ii} . Cette décomposition s'appelle la décomposition en valeurs propres.

Nous nous intéresserons particulièrement au cas des matrices symétriques et réelles.

Proposition 13. *Toute matrice M symétrique et réelle admet une décomposition en valeurs propres. De plus les valeurs propres et les vecteurs propres sont réelles et on peut prendre des vecteurs propres orthonormaux.*

Démonstration. Supposons que v soit un vecteur propre associé à une valeur propre λ . Alors, puisque $M = M^*$ et si l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien,

$$0 \leq \langle Mv, Mv \rangle = v^* M^* M v = v^* M^2 v = \lambda^2 \|v\|^2. \quad (2.3)$$

Ainsi λ^2 est un réel positif, et λ et v sont réels.

Si l'on a des vecteurs propres associés à la même valeur propre on peut, par le procédé de Gram-Schmidt, supposer qu'ils sont orthonormaux. Supposons que l'on a deux vecteurs propres v et w associés à deux valeurs propres distinctes λ et μ . Alors,

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle Mv, w \rangle = \langle v, Mw \rangle = \mu \langle v, w \rangle. \quad (2.4)$$

Ainsi, $(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, $\langle v, w \rangle = 0$. On déduit que l'on peut choisir des vecteurs propres orthogonaux.

Il reste à montrer que les vecteurs propres forment une base. Supposons que les vecteurs propres ne forment pas une base. Soit u un vecteur orthogonal à tous les vecteurs propres. Pour un vecteur propre v d'une valeur propre λ , on a

$$\langle Mu, v \rangle = \langle u, Mv \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = 0. \quad (2.5)$$

Si l'on note $E \neq \{0\}$ l'espace orthogonal à l'espace des vecteurs propres, on déduit alors que l'application ϕ associée à M et restreinte à E est un endomorphisme de E . Soit N une matrice représentant l'application ϕ dans une certaine base de E . Il est évident que N admet au moins une valeur propre λ peut-être complexe, car $\det(M - \lambda I_n)$ est un polynôme. Il existe au moins un vecteur propre w associé à λ , car autrement $M - \lambda I_n$ serait inversible. Or, comme M est symétrique, N est aussi symétrique. Cela implique que λ et w sont réelles. Ce qui est une contradiction, car E ne contient aucun vecteur propre. \square

La conséquence de la proposition précédente est que toute matrice symétrique admet une décomposition en valeurs propres UDU^\top avec U orthogonal.

Définition 38. *Soit M une matrice symétrique, on dit que M est définie positive si ses valeurs propres sont strictement positives et on note $M \succ 0$. On dit que M est semi-définie positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles et on note $M \succeq 0$.*

Une autre décomposition qui nous sera utile est la décomposition LDL, qui suit de la décomposition de Cholesky introduite dans la proposition suivante.

Proposition 14. *Soit M une matrice symétrique définie positive. Alors, il existe une unique matrice triangulaire inférieure T dont les éléments diagonaux sont positifs et telle que $M = TT^\top$.*

Démonstration. Si $M \in \mathcal{M}_1$, on prend $T = \sqrt{M}$. Supposons que l'on peut faire la décomposition de Cholesky pour $n - 1$. Écrivons $M = \begin{pmatrix} M' & a \\ a^\top & \alpha \end{pmatrix}$. Soit $M' = L'L'^\top$ la décomposition de Cholesky de M' . Posons $L_1 = \begin{pmatrix} (L')^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$N := L_1^{-1}M(L_1^{-1})^\top = \begin{pmatrix} I_{n-1} & b \\ b^\top & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

avec $b = L_1 a$. Posons $L_2 = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -b^{-1} & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$N' := L_2^{-1}N(L_2^{-2})^\top = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha - b^\top b \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Remarquons que $\alpha - b^\top b$ est une valeur propre de M . Comme M est définie positive, on doit avoir $\alpha - b^\top b = \lambda^2 > 0$ avec $\lambda > 0$. Posons $L_3 = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Alors,

$$L_3^{-1}N'(L_3^{-1})^\top = I_n. \quad (2.8)$$

Ainsi, si $L = L_3 L_2 L_1$, alors $M = LL^\top$. \square

Corollaire 1. *Soit M une matrice symétrique définie positive. Il existe une matrice triangulaire inférieure L dont les éléments diagonaux sont 1 et une matrice diagonale $D \succ 0$ tel que $M = LDL^\top$. Cette décomposition se nomme la décomposition LDL.*

Démonstration. Soit TT^\top la décomposition de Cholesky de M et D la matrice diagonale telle que $D_{ii} = T_{ii}^2$. Alors, il suffit de prendre $L = TD^{-\frac{1}{2}}$. \square

2.2 Calcul matriciel

Dans cette section nous introduisons la notion de dérivée d'une matrice. Il est à noter que les matrices peuvent être à coefficients complexes.

Définition 39. *Soit $M : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit M' comme la dérivée de M exprimée sous forme matricielle et vue comme une application sur \mathbb{R}^{n^2} .*

La notion de différentielle matricielle sera très utile.

Définition 40. *Soit $f : \mathcal{M}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{M}_{n_k} \rightarrow \mathcal{M}_m$ une application. On définit la différentielle df de f telle que si l'on a une fonction $M : \mathcal{M}_m \rightarrow \mathbb{R}$, $(M \circ f)' = df(M')$.*

De plus, si $f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_m$, on pose $\frac{\partial f(M)}{\partial M_{ij}}$ comme la dérivée partielle exprimée sous forme matricielle par rapport à M_{ij} de f vue comme fonction de \mathbb{R}^{n^2} vers \mathbb{R}^{m^2} .

Nous pouvons obtenir plusieurs formules pour la différentielle d'application matricielle.

Proposition 15. *Soient $M, N \in \mathcal{M}_n$ deux matrices. Alors,*

1. $d(M + N) = dM + dN$;
2. $d\text{Tr}(M) = \text{Tr}(dM)$;
3. $d(MN) = (dM)N + M(dN)$;
4. $d(M \otimes N) = (dM) \otimes N + M \otimes (dN)$;
5. $d(M^{-1}) = -M^{-1}dMM^{-1}$

où \otimes désigne le produit de Kronecker.

Démonstration. La première et la deuxième égalité suivent de la linéarité de la dérivation. On a

$$(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^n M_{ik}N_{kj}.$$

Par la linéarité de la dérivation et la règle du produit, on déduit la troisième identité. Comme les éléments de $M \otimes N$ sont le produit d'un élément de M et d'un élément de N la quatrième identité suit de la règle du produit. On a $I_n = MM^{-1}$. En dérivant de chaque côté, on a $0 = (dM)M^{-1} + Md(M^{-1})$. Ainsi, on a la cinquième identité. \square

Nous pouvons calculer la différentielle du déterminant, mais cela demande plus de travail.

Lemme 2. *Soit $M, N \in \mathcal{M}_n$, alors $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}N_{ij} = \text{Tr}(M^T N)$*

Démonstration. On a $(M^T N)_{jk} = \sum_{i=1}^n M_{ij}N_{ik}$. Ainsi, $\text{Tr}(M^T N) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ij}N_{ij}$. \square

Proposition 16. *Soit $M \in \mathcal{M}$, on a $d\det(M) = \text{Tr}(\text{adj}(M)dM)$.*

Démonstration. On a, par la formule de Laplace, $\det(M) = \sum_{j=1}^n M_{ij}\text{adj}^T(M)_{ij}$ pour un i quelconque. Ainsi,

$$\frac{\partial \det(M)}{\partial M_{ij}} = \frac{\partial \sum_{k=0}^n M_{ik}\text{adj}^T(M)_{ik}}{\partial M_{ij}} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial M_{ik}\text{adj}^T(M)_{ik}}{\partial M_{ij}}. \quad (2.9)$$

Par la règle du produit,

$$\frac{\partial \det(M)}{\partial M_{ij}} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial M_{ik}}{\partial M_{ij}} \text{adj}^T(M)_{ik} + \sum_{k=1}^n A_{ik} \frac{\partial \text{adj}^T(M)_{ik}}{\partial M_{ij}}. \quad (2.10)$$

Puisque le cofacteur $\text{adj}^\top(M)_{ik}$ ne dépend pas de M_{ij} , on a $\frac{\partial \text{adj}^\top(M)_{ik}}{\partial M_{ij}} = 0$. De plus, $\frac{\partial M_{ik}}{\partial M_{ij}} = \delta_{jk}$. Ainsi,

$$\frac{\partial \det(M)}{\partial M_{ij}} = \text{adj}^\top(M)_{ij}. \quad (2.11)$$

Ainsi,

$$d \det(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{adj}^\top(M)_{ij} dM_{ij}. \quad (2.12)$$

Le résultat suit du Lemme 2. □

Chapitre 3

L'espace de Siegel

3.1 Définitions

L'espace de Siegel généralise le demi-plan de Poincaré et le disque de Poincaré en utilisant l'espace des matrices symétriques et complexes au lieu du plan complexe. Il y a deux modèles de l'espace de Siegel correspondant au demi-plan et au disque de Poincaré.

Posons $\text{Sym}(n, \mathbb{F})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients dans un corps \mathbb{F} .

Définition 41. On définit $\mathfrak{H}^n = \{M \in \text{Sym}(n, \mathbb{C}) \mid \text{Im } M \succ 0\}$. On appelle \mathfrak{H}^n le modèle du demi-espace supérieur de Siegel.

Définition 42. On définit $\mathfrak{D}^n = \{M \in \text{Sym}(n, \mathbb{C}) \mid I_n - M\bar{M} \succ 0\}$. On appelle \mathfrak{D}^n le modèle du disque de Siegel.

Nous voulons maintenant trouver un groupe de transformations préservant le modèle du demi-espace supérieur de Siegel de façon analogue à $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ et un groupe de transformations préservant le modèle du disque de l'espace de Siegel de façon analogue à $\text{PSU}(1, 1)$.

Définition 43. Soit \mathbb{F} un corps. On définit $\text{Sp}(2n, \mathbb{F})$ comme l'ensemble des matrices T de taille $2n \times 2n$ telles que

$$T^\top \Omega T = \Omega \tag{3.1}$$

avec $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Posons $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. L'équation (3.1) est équivalente aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} -C^\top A + A^\top C &= 0 \\ -C^\top B + A^\top D &= I_n \\ -D^\top A + B^\top C &= -I_n \\ -D^\top B + B^\top D &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Proposition 17. *L'ensemble $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F})$ forme un groupe.*

Ce groupe s'appelle le groupe symplectique de dimension $2n$ pour le corps \mathbb{F} . Il est évident que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$.

Le lemme suivant nous permettra de simplifier plusieurs propositions à venir. Nous ne donnerons pas de démonstration pour ce lemme, mais [4] la donne.

Lemme 3. *Soit $V_P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -P & I_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ et $M_L = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^{\top-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Alors, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est engendré par $\Omega \cup \{V_P \mid P \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})\} \cup \{M_L \mid L \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})\}$.*

Lemme 4. *Soit $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $T' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ et M une matrice symétrique et complexe de taille $n \times n$ telle que $\det(CM + D) \neq 0$ et $\det((C'A + D'C)M + (C'B + D'D)) \neq 0$. On peut définir $T \cdot M$ comme la matrice $(AM + B)(CM + D)^{-1}$. Alors, $T \cdot M$ est symétrique et $(T'T) \cdot M = T' \cdot (T \cdot M)$. De plus, $I_{2n} \cdot M = M$.*

Démonstration. La matrice $T \cdot M$ est symétrique si, et seulement si $(AM + B)(CM + D)^{-1} = (M^\top C^\top + D^\top)^{-1}(M^\top A^\top + B^\top)$ si, et seulement si $(M^\top A^\top + B^\top)(CM + D) = (M^\top C^\top + D^\top)(AM + B)$. En développant les deux côtés, on obtient que $M^\top(A^\top C - C^\top A)M + M^\top(A^\top D - C^\top B) + (B^\top C - D^\top A)M + (B^\top D - D^\top B) = 0$. Par les équations (3.2), on peut déduire l'égalité désirée et la matrice $T \cdot M$ est symétrique.

On a que

$$\begin{aligned} T' \cdot (T \cdot M) &= T' \cdot (AM + B)(CM + D)^{-1} \\ &= (A'((AM + B)(CM + D)^{-1}) + B')(C'((AM + B)(CM + D)^{-1}) + D')^{-1} \\ &= (A'(AM + B) + B'(CM + D))(C'(AM + B) + D'(CM + D))^{-1} \\ &= ((A'A + B'C)M + (A'B + B'D))((C'A + D'C)M + (C'B + D'D))^{-1} \\ &= (T'T) \cdot M. \end{aligned}$$

Il est trivial que $I_{2n} \cdot M = M$. □

Proposition 18. *L'application $A : \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{H}^n \rightarrow \mathfrak{H}^n$ définie par $A(T, M) = T \cdot M$ est une action de groupe.*

Démonstration. Soit $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ et $M \in \mathfrak{H}^n$. Montrons d'abord que $CM + D$ est inversible. Soit la matrice hermitienne $N = -i((\bar{M}C^\top + D^\top)(AM + B) - (\bar{M}A^\top + B^\top)(CM + D))$. En développant les produits et en utilisant les équations (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} N &= -i(\bar{M}(C^\top B - A^\top D) + (D^\top A) - B^\top C)M \\ &= -i(M - \bar{M}) \succ 0. \end{aligned}$$

Comme N est définie positive, cela implique que le noyau de $CM + D$ est trivial autrement, il y aurait un vecteur $\xi \neq 0$ tel que $(CM + D)\xi = 0$ et, ainsi, $\xi^* N \xi = 0$. Donc, $CM + D$ est inversible.

Posons $M' = (AM + B)(CM + D)^{-1}$ et montrons que $M' \in \mathfrak{H}^n$. On a que

$$-i(M' - \bar{M}') = -i((AM + B)(CM + D)^{-1} - (\bar{M}C^\top + D^\top)^{-1}(\bar{M}A^\top + B^\top)).$$

En postmultipliant par $CM + D$ et en prémultipliant par $(CM + D)^*$, on obtient la matrice N , qui est définie positive. Cela implique que $-i(M' - \bar{M}') \succ 0$ et $M' \in \mathfrak{H}^n$.

Par le Lemme 4, on déduit que T définit une action sur \mathfrak{H}^n . \square

Proposition 19. *Soit $\Phi : \mathfrak{D}^n \rightarrow \mathfrak{H}^n$ définie par $\Phi(M) = i(I_n + M)(I_n - M)^{-1}$. L'application Φ est bien définie et une bijection.*

Démonstration. Soit $M \in \mathfrak{D}^n$. Montrons d'abord que $I_n - M$ est inversible. Posons $N = (I - \bar{M})(I_n + M) + (I_n + \bar{M})(I_n - M)$. En développant, on obtient

$$N = 2(I_n - \bar{M}M) \succ 0.$$

Comme N est définie positive, le noyau de $I_n - M$ doit être trivial et, donc, $I_n - M$ est inversible. Posons $M' = i(I_n + M)(I_n - M)^{-1}$. On a $-i(M' - \bar{M}') = (I_n + M)(I_n - M)^{-1} + (I_n - \bar{M})^{-1}(I_n + \bar{M})$. En prémultipliant par $(I_n - \bar{M})$ et en postmultipliant par la matrice $(I_n - M)$, on obtient la matrice N , qui est définie positive. Ainsi, $M' \in \mathfrak{H}^n$. Par le Lemme 4, on déduit que Φ est une bijection. \square

3.2 Métriques

Définition 44. *On définit la métrique ds^2 sur \mathfrak{H}^n comme*

$$ds^2 = -4 \mathrm{Tr}((M - \bar{M})^{-1}dM(M - \bar{M})^{-1}d\bar{M}).$$

Proposition 20. *La métrique $dr^2 = 4 \mathrm{Tr}((I_n - M\bar{M})dM(I_n - \bar{M}M)d\bar{M})$ sur \mathfrak{D}^n est le pullback de la métrique ds^2 par l'application Φ de la Proposition 19. C'est-à-dire que $dr^2(M) = ds^2(d\Phi(M))$.*

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned}
d\Phi(M) &= i \left(d(I_n + M)(I_n - M)^{-1} - (I_n + M)(I_n - M)^{-1}d(I_n - M)(I_n - M)^{-1} \right) \\
&= i \left(dM(I_n - M)^{-1} + (I_n + M)(I_n - M)^{-1}dM(I_n - M)^{-1} \right) \\
&= i \left((I_n + (I_n + M)(I_n - M)^{-1})dM(I_n - M)^{-1} \right) \\
&= i \left(((I_n - M) + (I_n + M))(I_n - M)^{-1}dM(I_n - M)^{-1} \right) \\
&= 2i(I_n - M)^{-1}dM(I_n - M)^{-1}.
\end{aligned}$$

Soient $M \in \mathfrak{D}^n$ et $M' = \Phi(M) \in \mathfrak{H}^n$. On a que

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -4 \operatorname{Tr} \left((M - \bar{M})^{-1}dM(M - \bar{M})^{-1}d\bar{M} \right) \\
&= 16 \operatorname{Tr} \left((I_n + M)(I_n - M)^{-1} \right. \\
&\quad \left. + (I_n + \bar{M})(I_n - \bar{M})^{-1} \right)^{-1} (I_n - M)^{-1}dM(I_n - M)^{-1} \\
&\quad \left((I_n + M)(I_n - M)^{-1} + (I_n + \bar{M})(I_n - \bar{M})^{-1} \right)^{-1} (I_n - M)^{-1}d\bar{M}(I_n - M)^{-1}.
\end{aligned}$$

En conjuguant par $(I_n - \bar{M})$ et après quelques simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned}
ds^2 &= 16 \operatorname{Tr} \left((I_n + M)(I_n - \bar{M}) + (I_n - M)(I_n + \bar{M}) \right)^{-1}dM \\
&\quad \left((I_n + \bar{M})(I_n - M) + (I_n - \bar{M})(I_n + M) \right)^{-1}d\bar{M} \\
&= 16 \operatorname{Tr} \left((2I_n - 2M\bar{M})dM(2I_n - 2\bar{M}M)d\bar{M} \right) \\
&= 4 \operatorname{Tr} \left((I_n - M\bar{M})dM(I_n - \bar{M}M)d\bar{M} \right).
\end{aligned}$$

□

Proposition 21. *Les transformations induites par une matrice $T \in \operatorname{Sp}(2n, \mathbb{R})$ de \mathfrak{H}^n préservent la métrique ds^2 .*

Démonstration. Soit $M' = T \cdot M$.

Si $T = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, alors $M' = -M^{-1}$ et $dM' = M^{-1}dMM^{-1}$. Remarquons que $(\bar{M}^{-1} - M^{-1})^{-1} = (M^{-1}M(\bar{M}^{-1} - M^{-1})\bar{M}\bar{M}^{-1}) = \bar{M}(M - \bar{M})^{-1}M$ et, de même, $(\bar{M}^{-1} - M^{-1})^{-1} = M(M - \bar{M})^{-1}\bar{M}$. On a

$$\begin{aligned}
ds_{M'}^2 &= -4 \operatorname{Tr} \left((\bar{M}^{-1} - M^{-1})^{-1}M^{-1}dMM^{-1}(\bar{M}^{-1} - M^{-1})^{-1}\bar{M}^{-1}d\bar{M}\bar{M}^{-1} \right) \\
&= -4 \operatorname{Tr} \left(\bar{M}^{-1}(\bar{M}^{-1} - M^{-1})^{-1}M^{-1}dMM^{-1}(\bar{M}^{-1} - M^{-1})^{-1}\bar{M}^{-1}d\bar{M} \right) \\
&= -4 \operatorname{Tr} \left((M - \bar{M})^{-1}dM(M - \bar{M})^{-1}d\bar{M} \right) \\
&= ds_M^2.
\end{aligned}$$

Si $T = M_L = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^\top{}^{-1} \end{pmatrix}$, alors $M' = LML^\top$ et $dM' = LdML^\top$. Un calcul simple montre que $ds_{M'}^2 = ds_M^2$.

Si $T = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix}$ avec $P \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, alors $M' = M + P$ et $dM' = dM$. Il est trivial que $ds_{M'}^2 = ds_M^2$.

Si $T = V_P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix}$. Alors, $T = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ et $ds_{M'}^2 = ds_M^2$. Par le lemme 3, $ds_{M'}^2 = ds_M^2$ pour toutes matrices $T \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. \square

3.3 Produit de Kronecker symétrique et métrique

Dans cette section, nous allons exprimer la métrique ds^2 dans une coordonnée locale de \mathfrak{H}^n .

Si $M \in \text{Sym}(n, \mathbb{C})$, alors on peut définir le vecteur

$$\text{svec}(M) = (M_{11}, \sqrt{2}M_{21}, \dots, \sqrt{2}M_{n1}, M_{22}, \sqrt{2}M_{32}, \dots, \sqrt{2}M_{n2}, M_{33}, \sqrt{2}M_{43}, \dots, M_{nn})^\top. \quad (3.3)$$

On peut remarquer qu'il s'agit de coordonnées de matrices symétriques dans une certaine base.

Pour une matrice carrée M quelconque de taille $n \times n$, on définit

$$\text{vec}(M) = (M_{11}, M_{21}, \dots, M_{n1}, M_{12}, M_{22}, \dots, M_{n2}, \dots, M_{1n}, M_{2n}, \dots, M_{nn})^\top. \quad (3.4)$$

On sait que l'opération \otimes définie par $(M \otimes N) \text{vec}(X) = \text{vec}(NXM^\top)$ pour tous $X \in \mathcal{M}_n$ dite produit de Kronecker est importante. Elle peut, par exemple, nous permettre de résoudre l'équation matricielle $NXM^\top = C$ pour X en la transformant en équation linéaire. Il est possible de définir une opération analogue pour les matrices symétriques.

Soient \mathcal{S}_n et \mathcal{T}_n les bases de $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ et \mathcal{M}_n tels que svec et vec donnent les coordonnées de matrices dans ces bases.

Définition 45. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n$ et $M \in \text{Sym}(n, \mathbb{C})$. Le produit de Kronecker symétrique de A et B est l'unique matrice $A \otimes_s B$ telle que :

$$(A \otimes_s B) \text{svec}(S) = \frac{1}{2} \text{svec}(ASB^\top + BSA^\top). \quad (3.5)$$

Il vient immédiatement que le produit de Kronecker symétrique est commutatif. Les deux propositions suivantes sont tirées de [7].

Proposition 22. Il existe une matrice Q de taille $\frac{n(n+1)}{2} \times n^2$ telle que $QQ^\top = I_{\frac{n(n+1)}{2}}$ et pour toutes matrices A, B de taille $n \times n$

$$A \otimes_s B = \frac{1}{2} Q^\top (A \otimes B + B \otimes A) Q. \quad (3.6)$$

Démonstration. Considérons l'application linéaire $\iota : \text{Sym}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\iota(M) = M$. Posons Q la matrice représentant l'application linéaire ι de la base \mathcal{S}_n vers la base \mathcal{T}_n . Remarquons que les lignes de Q forment un ensemble orthonormal de vecteurs. La proposition suit alors des définitions de \otimes et \otimes_s . \square

Corollaire 2. *La dérivée du produit de Kronecker symétrique suit la règle usuelle, c'est-à-dire :*

$$d(A \otimes_s B) = dA \otimes_s B + A \otimes_s dB. \quad (3.7)$$

Proposition 23. *On a les égalités suivantes :*

1. $(A \otimes_s B)^\top = A^\top \otimes_s B^\top$;
2. $(A \otimes_s A)^{-1} = A^{-1} \otimes_s A^{-1}$ si A est inversible.
3. $(A \otimes_s B)(C \otimes_s D) = \frac{1}{2}(AC \otimes_s BD + AD \otimes_s BC)$;

Démonstration. La première égalité découle directement de la Proposition 22 et de l'égalité équivalente pour \otimes . Soit $S \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$, pour la troisième égalité, on a

$$\begin{aligned} (A \otimes_s B)(C \otimes_s D) \text{svec}(S) &= \frac{1}{2}(A \otimes_s B) \text{svec}(CSD^\top + DSC^\top) \\ &= \frac{1}{4} \text{svec}(ACSD^\top B^\top + ADSC^\top B^\top + BCSD^\top A^\top + BDSC^\top A^\top) \\ &= \frac{1}{2}(AC \otimes_s BD + AD \otimes_s BC) \text{svec} S. \end{aligned}$$

À partir de la troisième égalité, si $(A \otimes_s A)(B \otimes_s C) = I_{\frac{n(n+1)}{2}}$, alors $(AB \otimes_s AC) = I_{\frac{n(n+1)}{2}}$. On déduit que $B = A^{-1}$ et $C = A^{-1}$. \square

Remarque 2. *Par la troisième égalité de la proposition précédente, on déduit que $(A \otimes_s A)(C \otimes_s D) = (AC \otimes_s AD)$ et $(A \otimes_s B)(C \otimes_s C) = (AC \otimes_s BC)$.*

Posons $e_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{jr}\delta_{is}]_{r,s} \in \text{Sym}(n, \mathbb{C})$ pour $i < j$ et $e_{ii} = [\delta_{ir}\delta_{is}]_{r,s} \in \text{Sym}(n, \mathbb{C})$. Observons que les e_{ij} forment la base \mathcal{S}_n .

Proposition 24. *Dans la base réelle $\mathcal{B} = \{e_{ij} \mid i \leq j\} \cup \{ie_{ij} \mid i \leq j\}$, la métrique ds^2 au point $M \in \mathfrak{H}^n$ s'exprime avec la matrice $g = \begin{pmatrix} (Y^{\otimes_s Y})^{-1} & 0 \\ 0 & (Y^{\otimes_s Y})^{-1} \end{pmatrix}$ où $Y = \text{Im } M$.*

Démonstration. Soit UDU^\top la décomposition en valeur propre de Y . Posons $e'_{ij} = Ue_{ij}U^\top$. On a alors, au point M ,

$$\begin{aligned} ds_M^2(e'_{ij}, e'_{i'j'}) &= \text{Re}(\text{Tr}(UD^{-1}U^\top Ue_{ij}U^\top UD^{-1}U^\top Ue_{i'j'}U^\top)) = \text{Tr} D^{-1}e_{ij}D^{-1}e_{i'j'} ; \\ ds_M^2(e'_{ij}, ie'_{i'j'}) &= 0 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds_M^2(ie'_{ij}, e'_{i'j'}) &= 0; \\ ds_M^2(ie'_{ij}, ie'_{i'j'}) &= \text{Tr } D^{-1}e_{ij}D^{-1}e_{i'j'}. \end{aligned}$$

Des calculs simples montrent que $ds_M^2(e'_{ij}, e'_{i'j'}) = ds_M^2(ie'_{ij}, ie'_{i'j'}) = D_{ii}^{-1}D_{jj}^{-1}\delta_{ii'}\delta_{jj'}$.

En notant que $D^{-1}e_{ij}D^{-1} = D_{ii}^{-1}D_{jj}^{-1}e_{ij}$, on déduit que $(D \otimes_s D)^{-1} \text{svec}(e_{ij}) = D_{ii}^{-1}D_{jj}^{-1} \text{svec}(e_{ij})$. Ainsi, dans la base $\{e'_{ij} \mid i \leq j\} \cup \{ie'_{ij} \mid i \leq j\}$ au point M , la matrice de la métrique est

$$\begin{pmatrix} (D \otimes_s D)^{-1} & 0 \\ 0 & (D \otimes_s D)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{svec}(e'_{ij}) = (U \otimes_s U) \text{svec}(e_{ij})$, dans la base \mathcal{B} , la matrice de la métrique est

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} U \otimes_s U & 0 \\ 0 & U \otimes_s U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (D \otimes_s D)^{-1} & 0 \\ 0 & (D \otimes_s D)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U \otimes_s U)^\top & 0 \\ 0 & (U \otimes_s U)^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (UD^{-1}U^\top) \otimes_s (UD^{-1}U^\top) & 0 \\ 0 & (UD^{-1}U^\top) \otimes_s (UD^{-1}U^\top) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (Y \otimes_s Y)^{-1} & 0 \\ 0 & (Y \otimes_s Y)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Pour simplifier la notation, les lettres grecques représenteront un couple d'indices. Par exemple, $e_\mu = e_{ij}$. Notons aussi $f_\mu = ie_\mu$. Aussi, si $\mu = (i, j)$, on va aussi parfois noter, par abus de notation, que $\mu = \frac{j(j+1)}{2} + i$ de façon à numéroter tous les coefficients matriciels. Notons $m = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour conclure cette section, nous allons faire une remarque sur la forme de volume ω de \mathfrak{H}^n . On sait, par définition et en utilisant l'orientation définie par $(de_1, df_1, \dots, de_m, df_m)$ pour simplifier le calcul du signe, que

$$\omega = \det(Y \otimes_s Y)^{-1} de_1 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge de_m \wedge df_m. \quad (3.8)$$

Soit $dy_\mu \in T^*\mathfrak{H}^n$ tel que $dy_\mu(X + iY) = df_\mu(X + iY^{-1})$. Comme $dY^{-1} = -Y^{-1}dYY^{-1}$, on a

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = -(Y^{-1} \otimes_s Y^{-1}) \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Ainsi, par l'équivalence entre le déterminant et le volume,

$$\omega = (-1)^m de_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge de_m \wedge dy_m. \quad (3.10)$$

Cette dernière équation nous sera utile dans des chapitres suivants.

3.4 Les formes de connexions et de courbures de \mathfrak{H}^n

Nous avons obtenu une expression de la métrique de \mathfrak{H}^n dans une paramétrisation locale. Dans cette section, nous allons calculer les formes de connexions et les formes de courbures dans cette paramétrisation locale.

Soient μ, ν et $\alpha \leq m$. Nous pouvons maintenant calculer les symboles de Christoffel. Remarquons que $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial e_\alpha} = \frac{\partial g_{\mu+m, \nu+m}}{\partial e_\alpha} = 0$ et $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial f_\alpha} = \frac{\partial g_{\mu+m, \nu+m}}{\partial f_\alpha} = -2(Y^{-1}e_\alpha Y^{-1} \otimes_s Y^{-1})$.

— Par un calcul direct,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu, \nu+m}^\alpha &= \frac{1}{2} \sum_{\kappa \leq m} \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial f_\nu} g^{\kappa\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\kappa \leq m} g^{\alpha\kappa} \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial f_\nu} \\ &= -[(Y \otimes_s Y)(Y^{-1}e_\nu Y^{-1} \otimes_s Y^{-1})]_{\alpha\mu} \\ &= -(e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_{\alpha\mu}. \end{aligned}$$

— Par symétrie,

$$\Gamma_{\mu+m, \nu}^\alpha = \Gamma_{\nu, \mu+m}^\alpha = -(e_\mu Y^{-1} \otimes_s I_n)_{\alpha\nu}.$$

Avant de calculer les autres symboles de Christoffel, faisons l'observation suivante :

$$(e_\mu Y^{-1} \otimes_s I_n)_\nu = \frac{1}{2} \text{svec}(e_\nu Y^{-1} e_\mu + e_\mu Y^{-1} e_\nu) = (e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_\mu.$$

On a ainsi, grâce à la précédente observation,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{\kappa \leq m} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial f_\kappa} g^{\kappa\alpha} &= [(Y^{-1} \otimes_s Y^{-1})[(e_1 Y^{-1} \otimes_s I_n)_\nu \dots (e_m Y^{-1} \otimes_s I_n)_\nu](Y \otimes_s Y)]_{\mu\alpha} \\ &= [(Y^{-1} \otimes_s Y^{-1})(e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)(Y \otimes_s Y)]_{\mu\alpha} \\ &= (Y^{-1} e_\nu \otimes_s I_n)_{\mu\alpha} \\ &= (e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_{\alpha\mu}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer les autres symboles de Christoffel.

— Directement de ce qui précède,

$$\Gamma_{\mu, \nu}^{\alpha+m} = -\frac{1}{2} \sum_{\kappa \leq m} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial f_\kappa} g^{\kappa\alpha} = (e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_{\alpha\mu}.$$

— De même,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu+m, \nu+m}^{\alpha+m} &= \frac{1}{2} \sum_{\kappa \leq m} \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial f_\mu} g^{\kappa\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa \leq m} \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial f_\nu} g^{\kappa\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\kappa \leq m} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial f_\kappa} g^{\kappa\alpha} \\ &= -(e_\mu Y^{-1} \otimes_s I_n)_{\alpha\nu} - (e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_{\alpha\mu} + (e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_{\alpha\mu} \\ &= -(e_\mu Y^{-1} \otimes_s I_n)_{\alpha\nu}. \end{aligned}$$

On déduit, par l'équation 1.10, que les formes de connexions associées à la connexion de Lévi-Civita sont :

1. $[\psi_\nu^\mu] = -(0 (e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_\mu^\top)$;
2. $[\psi_{\nu+m}^\mu] = -((e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_\mu^\top 0)$;
3. $[\psi_\nu^{\mu+m}] = ((e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_\mu^\top 0)$;
4. $[\psi_{\nu+m}^{\mu+m}] = -(0 (e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_\mu^\top)$.

On remarque que le fibré tangent de \mathfrak{H}^n peut être vu comme un fibré complexe. De plus, on remarque que la connexion de Lévi-Civita définit alors une connexion complexe. En effet, $\psi_\nu^\mu = \psi_{\nu+m}^{\mu+m}$ et $\psi_\nu^{\mu+m} = -\psi_{\nu+m}^\mu$. Les formes de connexions associées sont

$$\omega_\nu^\mu = -i(e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_\mu^\top \begin{pmatrix} de_1 \\ \vdots \\ de_m \end{pmatrix} - (e_\nu Y^{-1} \otimes_s I_n)_\mu^\top \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

$$\text{Ainsi, } [\omega_\nu^\mu] = \begin{pmatrix} -iY^{-1}e_\nu \otimes_s I_n \\ -Y^{-1}e_\nu \otimes_s I_n \end{pmatrix}_\mu^\top.$$

Nous pouvons calculer les formes de courbure associées à cette connexion. On a

$$\begin{aligned} [\omega_\kappa^\mu \wedge \omega_\nu^\kappa] &= \begin{pmatrix} -iY^{-1}e_\mu \otimes_s I_n \\ -Y^{-1}e_\mu \otimes_s I_n \end{pmatrix}_\kappa \begin{pmatrix} -iY^{-1}e_\nu \otimes_s I_n \\ -Y^{-1}e_\nu \otimes_s I_n \end{pmatrix}_\kappa^\top \\ &\quad - \begin{pmatrix} -iY^{-1}e_\nu \otimes_s I_n \\ -Y^{-1}e_\nu \otimes_s I_n \end{pmatrix}_\kappa \begin{pmatrix} -iY^{-1}e_\mu \otimes_s I_n \\ -Y^{-1}e_\mu \otimes_s I_n \end{pmatrix}_\kappa^\top. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ainsi, à la matrice iI_n ,

$$\left[\sum_\kappa \omega_\kappa^\mu \wedge \omega_\nu^\kappa \right] = \begin{pmatrix} -ie_\mu \otimes_s I_n \\ -e_\mu \otimes_s I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ie_\nu \otimes_s I_n \\ -e_\nu \otimes_s I_n \end{pmatrix}^\top - \begin{pmatrix} -ie_\nu \otimes_s I_n \\ -e_\nu \otimes_s I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ie_\mu \otimes_s I_n \\ -e_\mu \otimes_s I_n \end{pmatrix}^\top \quad (3.13)$$

$$= \begin{pmatrix} -(e_\mu e_\nu - e_\nu e_\mu) \otimes_s I_n & i(e_\mu e_\nu - e_\nu e_\mu) \otimes_s I_n \\ i(e_\mu e_\nu - e_\nu e_\mu) \otimes_s I_n & (e_\mu e_\nu - e_\nu e_\mu) \otimes_s I_n \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f_i} (Y^{-1}e_\nu \otimes_s I_n)_\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial f_i} (Y^{-1}e_\nu \otimes_s I_n) \right)_\mu \\ &= -(Y^{-1}e_\nu Y^{-1}e_\nu \otimes_s I_n)_\mu \\ &= -\frac{1}{2} \text{svec}(Y^{-1}e_\nu Y^{-1}e_\nu e_\mu + e_\mu e_\nu Y^{-1}e_\nu Y^{-1}) \\ &= -(e_\mu e_\nu Y^{-1} \otimes_s Y^{-1})_\nu. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$[\partial \omega_\nu^\mu] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ iY^{-1}e_\nu e_\mu \otimes_s Y^{-1} & Y^{-1}e_\nu e_\mu \otimes_s Y^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

et, à la matrice iI_n ,

$$[d\omega_\nu^\mu] = [\partial\omega_\nu^\mu] - [\partial\omega_\nu^\mu]^\top = \begin{pmatrix} 0 & -ie_\mu e_\nu \otimes_s I_n \\ ie_\nu e_\mu \otimes_s I_n & (e_\nu e_\mu - e_\mu e_\nu) \otimes_s I_n \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

On peut alors obtenir une expression pour les formes de courbure à iI_n :

$$[\Omega_\nu^\mu] = \left[d\omega_\nu^\mu + \sum_\kappa \omega_\kappa^\mu \wedge \omega_\nu^\kappa \right] = \begin{pmatrix} (e_\nu e_\mu - e_\mu e_\nu) \otimes_s I_n & -ie_\nu e_\mu \otimes_s I_n \\ ie_\mu e_\nu \otimes_s I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

3.5 Une forme explicite des formes de courbure

Dans cette dernière section du chapitre, nous allons donner une formule explicite pour Ω_ν^μ .

Soient $m_{ij} = [\delta_{ir}\delta_{js}]_{rs}$ et $\tilde{e}_{ij} = m_{ij} + m_{ji}$. On a que les \tilde{e}_{ij} nous donnent une autre base des matrices symétriques. De plus \tilde{e}_{ij} est proportionnel à e_{ij} . Le déterminant de la matrice de passage de la base formée des e_{ij} vers la base formée des \tilde{e}_{ij} est $(\sqrt{2})^{m+n}$. Cette autre base nous aidera à trouver une expression pour la forme de courbure.

Remarquons que

$$\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{kl} = (\delta_{ik}m_{jl} + \delta_{il}m_{jk} + \delta_{jk}m_{il} + \delta_{jl}m_{ik}). \quad (3.18)$$

Ainsi, $\Omega_\nu^\mu \neq 0$ si, et seulement si μ et ν partage une de leurs composantes.

Posons $\kappa_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \delta_{ij})$. On a

$$\begin{aligned} (m_{ij} \otimes_s I_n)_{(r,s)} &= \text{svec} \left(\frac{m_{ij}e_{rs} + e_{rs}m_{ji}}{2} \right) \\ &= \kappa_{rs} \text{svec} (\delta_{jr}\kappa_{is}e_{is} + \delta_{js}\kappa_{ir}e_{ir}) \end{aligned}$$

Soit $\tilde{\Omega}_\nu^\mu$ les formes de courbure dans la base donnée par les \tilde{e}_{ij} . Supposons que $\mu = (i, k)$ et $\nu = (i, l)$ avec $i \neq k$, $i \neq l$ et $k \neq l$ de sorte que $\tilde{e}_\nu \tilde{e}_\mu = m_{lk}$, alors,

$$\tilde{\Omega}_\nu^\mu = -i \sum_{r=1}^n \kappa_{rl}\kappa_{rk} de_{rl} \wedge df_{rk} + \sum_{r=1}^n \kappa_{rl}\kappa_{rk} de_{rl} \wedge de_{rk} \quad (3.19)$$

en supposant par abus de notation que $de_{ij} = de_{ji}$ et $df_{ij} = df_{ji}$.

Si l'on veut calculer un représentant de la nième classe de Chern, on peut utiliser quelques astuces pour simplifier les calculs. Comme le résultat du déterminant de la matrice des formes de courbure est une $2m$ -formes de courbures et que, dans le calcul du déterminant, on fait le produit de m 2-formes de courbures, chaque élément de base

e_{ij} ou f_{ij} doit apparaître qu'une fois. Par un simple argument combinatoire, on voit que l'on peut ignorer les termes $de_{..} \wedge de_{..}$ dans chaque forme de courbure. De plus, on peut ignorer les $\kappa_{rl}\kappa_{rk}$ dans 3.19 en corrigeant le résultat par $\prod_{\alpha=1}^m \kappa_{\alpha}^2 = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. En considérant l'effet du changement de base vers les \tilde{e}_{ij} , on obtient un facteur de correction de $\left[((\sqrt{2})^{m+n})^2 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{-1} = 2^{-2m}$.

Ainsi, on peut obtenir un représentant de la nième classe de Chern en calculant $\pi^{-m} 2^{-3m} \det \Psi$ où Ψ est une matrice $m \times m$ et

$$\Psi_{\nu}^{\mu} = \sum_{r=1}^n de_{rl} \wedge df_{rk} \quad (3.20)$$

où $\mu = (i, k)$ et $\nu = (i, l)$ avec $i \neq k$, $i \neq l$ et $k \neq l$. Pour être compatible avec la forme de volume ω dans le théorème de Chern-Gauss-Bonnet, il faut exprimer la $2m$ -forme différentielle comme $K de_1 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge de_m \wedge df_m$ avec $K \in \mathbb{R}$.

En effectuant les calculs à l'aide d'un programme fait par l'auteur [10], on obtient,

- Pour $n = 1$, $\frac{1}{2\pi} de_{11} \wedge df_{11}$;
- Pour $n = 2$, $\frac{3}{16\pi^3} de_{11} \wedge df_{11} \wedge de_{12} \wedge df_{12} \wedge de_{22} \wedge df_{22}$;
- Pour $n = 3$, $\frac{45}{512\pi^6} de_{11} \wedge df_{11} \wedge de_{12} \wedge df_{12} \wedge de_{13} \wedge df_{13} \wedge de_{22} \wedge df_{22} \wedge de_{23} \wedge df_{23} \wedge de_{33} \wedge df_{33}$;
- Pour $n = 4$, $\frac{4725}{65536\pi^{10}} de_{11} \wedge df_{11} \wedge \dots \wedge de_{44} \wedge df_{44}$;
- pour $n = 5$, $-\frac{4465125}{33554432\pi^{15}} de_{11} \wedge df_{11} \wedge \dots \wedge de_{55} \wedge df_{55}$.

Chapitre 4

Les groupes modulaires et leurs domaines fondamentaux

Dans ce chapitre, on introduit le n -ième groupe modulaire $\Gamma(n)$, qui correspond simplement à $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z})$. Remarquons que chaque matrice de $\Gamma(n)$ a un déterminant de 1. Ainsi, pour $\phi \in \Gamma(n)$, $\phi^{-1} = \mathrm{adj}(\phi)$ et $\Gamma(n)$ forme bien un groupe. Un domaine fondamental d'un groupe G agissant sur un ensemble E est un sous-ensemble connexe F de E tel que pour tous $g \in G$, l'orbite de G ne contient qu'un seul élément de F . L'objectif de ce chapitre est de trouver un domaine fondamental F de $\Gamma(n)$ dans \mathfrak{H}^n ou plutôt l'adhérence d'un tel domaine. C'est un fait connu que pour le cas du demi-plan supérieur de Poincaré la région du plan hyperbolique définie par $z \geq 1$ et $\mathrm{Re} z \leq \frac{1}{2}$ est un domaine fondamentale pour $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$. Il est possible de généraliser pour \mathfrak{H}^n et $\Gamma(n)$. Comme $\Gamma(n)$ est muni de la topologie discrète, il suit que $\mathrm{int}(F) \neq \emptyset$. Ce chapitre s'inspire fortement de [9].

4.1 Les matrices symétriques symplectiques

Il est possible de définir une application Ψ de \mathfrak{H}^n vers l'espace S_n des matrices symplectiques symétriques définies positives de taille $2n \times 2n$. Cette application nous permettra de trouver des conditions pour le domaine F .

Lemme 5. *On a une application lisse Ψ de \mathfrak{H}^n vers S_n définie par*

$$\Psi(M) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -X & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -X \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

avec $M = X + iY$ et X, Y réelles. De plus, si l'on a une matrice $\phi \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, qui définit une transformation sur \mathfrak{H}^n , alors la transformation induite sur S est $\Phi(N) = (\phi^{-1})^\top N \phi^{-1}$ pour $N \in S$.

Démonstration. Soit $M = X + iY \in \mathfrak{H}^n$. Comme $\begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 \\ -XY^{-1} & XY^{-1}X+Y \end{pmatrix}$ est définie positive, on voit aisément que $\Psi(M)$ est définie positive. Il est clair que $\Psi(M)$ est symétrique. Observons que

$$\Psi(M) = \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1}X \\ -XY^{-1} & XY^{-1}X+Y \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Si l'on pose $\Psi(M) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, on vérifie alors que $-C^\top A + A^\top C = 0$, $-C^\top B + A^\top D = I_n$, $-D^\top A + B^\top C = -I_n$ et $-D^\top B + B^\top D$. Ainsi, les images de Ψ sont bien des matrices de S .

Pour la seconde partie du lemme, on veut montrer que $\Phi(\Psi(M)) = \Psi(\phi \cdot M)$. Pour $\phi = \begin{pmatrix} I_n & -P \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \Phi(\psi(M)) &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ P & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1}X \\ -XY^{-1} & XY^{-1}X+Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & P \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1}(X-P) \\ -(X-P)Y^{-1} & (X-P)Y^{-1}(X-P)+Y \end{pmatrix} = \Psi(\phi \cdot M). \end{aligned}$$

Pour $\phi = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & (L^{-1})^\top \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \Phi(\psi(M)) &= \begin{pmatrix} (L^{-1})^\top & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1}X \\ -XY^{-1} & XY^{-1}X+Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & L^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (L^{-1})^\top Y^{-1} L^{-1} & -(L^{-1})^\top Y^{-1} (X-P) L^\top \\ -L(X-P)Y^{-1} L^{-1} & L(X-P)Y^{-1} (X-P) L^\top + L Y L^\top \end{pmatrix} = \Psi(\phi \cdot M). \end{aligned}$$

Finalement, pour $\phi = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$,

$$\Phi(\psi(M)) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1}X \\ -XY^{-1} & XY^{-1}X+Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -XY^{-1}X-Y & -XY^{-1} \\ -Y^{-1}X & -Y^{-1} \end{pmatrix}.$$

Or, si l'on pose $Y' = -\frac{i}{2}((-M)^{-1} - (-\bar{M})^{-1})$, en prémultipliant et en postmultipliant par M et \bar{M} , on obtient $Y' = -M^{-1}Y\bar{M}^{-1}$. Ainsi, $(Y')^{-1} = -\bar{M}Y^{-1}M = -XY^{-1}X - Y$. Comme $\phi^{-1} = -\phi$, on a également que $-Y^{-1} = X'(Y')^{-1}X' + Y'$ avec $X' = \frac{1}{2}((-M)^{-1} + (-\bar{M})^{-1})$. Finalement, comme $XY^{-1}M = MY^{-1}X$ par la symétrie de ces matrices, on déduit que $-XY^{-1} = -MY^{-1}XM^{-1} = -MY^{-1}\bar{M}^{-1}\bar{M}XM^{-1} = Y'^{-1}X$. \square

Notons P l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de taille $n \times n$. On sait, par la décomposition LDL, que chaque matrice de P se factorise comme LDL^\top avec $D \succ 0$ et diagonale et L une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont 1. Pour $t > 0$, on peut définir le sous-ensemble compact $Q(t)$ de P par les conditions $D_{ii} \leq tD_{i+1,i+1}$ et $|L_{ij}| \leq t$ pour $i < j \leq n$. Pour un t assez grand, tout sous-ensemble compact de P est contenu dans $Q(t)$.

Soit U une matrice à coefficients entiers de taille $n \times n$ et dont le déterminant est ± 1 . Comme l'inverse de la matrice de U est plus ou moins sa matrice adjointe, on voit aisément que les matrices de la forme de U forment un groupe. On considère alors l'application \mathcal{U} sur P définie par $\mathcal{U}(P) = U^\top P U$. Par la théorie de réduction de Minkowski, il existe un domaine fondamental R de P pour l'action du groupe des matrices à coefficients entiers et dont le déterminant est ± 1 . Le domaine R est défini par les g inégalités suivantes avec au plus une égalité :

$$L_i(M) \geq 0 \quad (4.3)$$

pour $i \leq g$ et L_i des fonctions linéaires des éléments de M à coefficients rationnels.

Lemme 6. *Soit deux points M_1 et M_2 de $Q(t)$ tels qu'il existe une matrice F à coefficients entiers telle que $M_2 = F^\top M_1 F$. Alors, il existe un τ tel que $|F_{ij}| \leq \tau$ pour tous $i, j \leq n$. De plus, τ ne dépend que de t, n et $\det(F)$.*

Comme R est compact, on sait qu'il est contenu dans $Q(t_1)$ pour un certain t_1 . Soit $M = LDL^\top$ un point de R , alors

$$M_{ii} = \sum_{k=i}^n D_{kk} L_{ki}^2 = D_{ii} \left(1 + \sum_{k=i}^n \frac{D_{kk}}{D_{ii}} L_{ki}^2 \right) \quad (4.4)$$

pour $i \leq n$. On sait que $\prod_{i=1}^n D_{ii} = \det(M)$. Par définition de $Q(t_1)$, $\frac{D_{kk}}{D_{ii}} \leq t^{k-i} \leq \max\{1, t^n\}$ et $L_{ki}^2 \leq t^2$. Ainsi, il existe $t_2 = (\max\{1, t^n\} t^2 + 1)^n$ dépendant de n tel que

$$\prod_{i=1}^n M_{ii} \leq t_2 \det(M). \quad (4.5)$$

4.2 Le minimum de la distance

Soit $\rho(\cdot, \cdot)$ l'application donnant la distance entre deux points de \mathfrak{H}^n . Pour trouver le domaine fondamental, nous nous intéresserons à trouver le minimum de $\rho(\phi \cdot M, M)$ où $\phi \in \Gamma(n)$ et $M \in \mathfrak{H}^n$. En effet, tous points à une distance moins grande de M que ce minimum seront alors inclus dans le domaine fondamental. Il faut par contre avoir la formule de la distance entre deux points. Nous ne ferons que l'énoncer, la démonstration est dans [9].

Proposition 25. *Soit M_1 et $M_2 \in \mathfrak{H}^n$ et $R = (M_1 - M_2)(M_1 - \bar{M}_2)^{-1}(\bar{M}_1 - \bar{M}_2)(\bar{M}_1 - M_2)^{-1}$, la distance $\rho(M_1, M_2)$ vérifie*

$$\rho^2(M_1, M_2) = \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1 + \sqrt{r_i}}{1 - \sqrt{r_i}} \right) \quad (4.6)$$

avec r_i les valeurs propres de R .

Lemme 7. *Le minimum de $\rho(\phi \cdot M, M)$ en fonction de $\phi \in \Gamma(n)$, est bornée par $\frac{\ln(\det(\operatorname{Im}(\phi \cdot M))^{-1})}{\sqrt{n}}$ pour tous $\phi \in \Gamma(n)$.*

Démonstration. Si $M_2 = i\lambda I_n$, alors

$$\begin{aligned} R &= (M_1 - i\lambda I_n)(M_1 + i\lambda I_n)^{-1}(\bar{M}_1 + i\lambda I_n)(\bar{M}_1 - i\lambda I_n)^{-1} \\ &= (\lambda^{-1}M_1 - iI_n)(\lambda^{-1}M_1 + iI_n)^{-1}(\lambda^{-1}\bar{M}_1 + iI_n)(\lambda^{-1}\bar{M}_1 - iI_n)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Posons $S(\nu) = (\nu M_1 - iI_n)(\nu M_1 + iI_n)^{-1}$. Remarquons que $R = S(\lambda^{-1})\overline{S(\lambda^{-1})}$. De plus, $S(0) = -I$ et

$$\frac{dS}{d\nu} = M_1(\nu M_1 + iI_n)^{-1} - (\nu M_1 - iI_n)(\nu M_1 + iI_n)^{-1}M_1(\nu M_1 + iI_n)^{-1}. \quad (4.8)$$

Ainsi, $S'(0) = -2iM_1$. Donc, $(S\bar{S})'(0) = 2iM_1 - 2i\bar{M}_1 = 2i(M_1 - \bar{M}_1)$. On déduit alors que $R = I_n - \lambda^{-1}4\operatorname{Im}(M_1) + O(\lambda^{-2})$. Ainsi, si s_i sont les valeurs propres de $\operatorname{Im}(M_1)$, alors $r_i = 1 - \lambda^{-1}4s_i + O(\lambda^{-2})$.

Donc, $\sqrt{r_i} = 1 - 2s_i\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})$, $\frac{1+\sqrt{r_i}}{1-\sqrt{r_i}} = s_i^{-1}\lambda \left(\frac{1-s_i\lambda^{-1}+O(\lambda^{-2})}{1+O(\lambda^{-1})} \right)$ et $\ln \left(\frac{1+\sqrt{r_i}}{1-\sqrt{r_i}} \right) = \ln(s_i^{-1}\lambda) + O(\lambda^{-1})$. Finalement, $\ln^2 \left(\frac{1+\sqrt{r_i}}{1-\sqrt{r_i}} \right) = \ln^2(s_i^{-1}\lambda) + \ln(s_i^{-1}\lambda)O(\lambda^{-1}) + O(\lambda^{-2})$. Ainsi,

$$\rho^2(M_1, i\lambda I_n) = \sum_{i=1}^n \ln^2(s_i^{-1}\lambda) + O(\lambda^{-1}). \quad (4.9)$$

On a alors,

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\rho(M_1, i\lambda I_n) - \sqrt{n} \ln(\lambda)) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n \ln^2(s_i^{-1}\lambda) + O(\lambda^{-1})} - \sqrt{n} \ln(\lambda) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{n \ln^2(\lambda) + \sum_{i=1}^n \ln(s_i^{-1})(\ln(s_i^{-1}) + 2 \ln(\lambda)) + O(\lambda^{-1})} - \sqrt{n} \ln(\lambda) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n} \ln(\lambda)} \left(\sum_{i=1}^n \ln(s_i^{-1})(\ln(s_i^{-1}) + 2 \ln(\lambda)) + O(\lambda^{-1}) \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \ln(s_i^{-1})}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{\ln(\det(Y^{-1}))}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

où $Y = \operatorname{Im}(M_1)$.

Par conséquent, comme $\rho(M_1, iI_n) \leq \rho(M_1, i\lambda I_n) - \rho(iI_n, i\lambda I_n)$ pour tous $\lambda > 0$,

$$\rho(M_1, iI_n) \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\rho(M_1, i\lambda I_n) - \sqrt{n} \ln(\lambda)) = \frac{\ln(\det(Y^{-1}))}{\sqrt{n}}. \quad (4.10)$$

□

Si $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, alors, on peut montrer que

$$\det(\operatorname{Im}(\phi \cdot M)^{-1}) = \det(\operatorname{Im}(M))^{-1} |\det(CM + D)|^2. \quad (4.11)$$

Lemme 8. Soient $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\phi' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$. Posons $\phi_0 := \phi' \phi^{-1} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$. Supposons que

$$|\det(CM + D)| = |\det(C'M + D')| \quad (4.12)$$

pour tous $M \in \mathfrak{H}^n$. Alors, il existe une matrice L à coefficients entiers de déterminant ± 1 et une matrice symétrique à coefficients entiers P telles que

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} (L^\top)^{-1} & PL \\ 0 & L \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

De plus, réciproquement, si (4.13) est vérifiée, alors l'équation (4.12) est vérifiée.

Démonstration. Posons $M' = (D^\top M - B^\top)(-C^\top M + A^\top)^{-1}$. Alors, un calcul simple montre que l'équation précédente est équivalente à $|\det(C_0 M + D_0)| = 1$ pour tous $M \in \mathfrak{H}^n$. Il. Comme $\det(C_0 M + D_0)$ est une fonction holomorphe en termes des coefficients de M , on déduit que $\det(C_0 M + D_0) = c$ où c est une constante de module 1 pour toutes matrices symétriques M . En particulier, si $M = 0$, $\det(D_0) = c$. Comme D_0 est à coefficients entiers, on déduit que $c = \pm 1$.

On a que $\det(D_0^{-1} C_0 M + I_n) = \det(D_0^{-1}) \det(C_0 M + D_0) = 1$. Ainsi, en calculant la différentielle par rapport à M ,

$$\begin{aligned} 0 &= d \det(D_0^{-1} C_0 M + I_n) = \operatorname{Tr}(\operatorname{adj}(D_0^{-1} C_0 M + I_n) D_0^{-1} C_0 dM) \\ &= \operatorname{Tr}((D_0^{-1} C_0 M + I_n)^{-1} D_0^{-1} C_0 dM). \end{aligned}$$

On sait que $C_0 D_0^\top$ est symétrique. On peut facilement montrer que $D_0^{-1} C_0$ est aussi symétrique. En évaluant la différentielle précédente à $M = 0$, on obtient $0 = \operatorname{Tr}(D_0^{-1} C_0 dM)$ où dM peut être une matrice symétrique quelconque. Si $U \Lambda U^\top$ est la décomposition en valeurs propres de $D_0^{-1} C_0$, en posant $dM = U e_{ii} U^\top$ on peut facilement voir que $\Lambda = 0$. Donc, $D_0^{-1} C_0 = 0$ et $C_0 = 0$.

Soit $\phi_0 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ avec $C = 0$. On peut facilement voir qu'il existe une matrice L à coefficients entiers et de déterminant ± 1 et une matrice symétrique à coefficients entiers P tel que (4.13) est vérifiée.

Si $\phi' = \phi_0 \phi$ avec $\phi \in \operatorname{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est une matrice arbitraire et $\phi_0 = \begin{pmatrix} (L^\top)^{-1} & PL \\ 0 & L \end{pmatrix} \in \operatorname{Sp}(2n, \mathbb{R})$, alors l'équation (4.12) est vérifiée. □

Dans le lemme précédent, on a que $C' = LC$ et $D' = LD$. De plus, si ϕ' et ϕ respectent ces égalités pour une certaine matrice L , alors, ϕ_0 sera de la forme (4.13). On peut en faire une définition.

Définition 46. *On dit alors que $\phi' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ et $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ sont associées s'il existe une matrice L à coefficients entiers de déterminant ± 1 telle que $C' = LC$ et $D' = LD$.*

Si Y , Y_0 et Y' sont les parties imaginaires de M , $\phi' \cdot M$ et $\phi \cdot M$, on a alors

$$(MC'^{\top} + D'^{\top})^* Y^{-1} (MC'^{\top} + D'^{\top}) = LY'^{-1} L^{\top} = Y_0^{-1}. \quad (4.14)$$

Si $M = X + iY$ est un point de \mathfrak{H}^n et $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$. On considère une matrice L à coefficients entiers et de déterminant ± 1 telle que si $Y' = \text{Im}(\phi \cdot M)$, alors $Y_0 = L(Y')^{-1} L^{\top}$ est dans le domaine fondamental R défini par les équations 4.3.

Lemme 9. *Soit $a > 0$, alors il n'existe qu'un nombre fini de couples (C', D') tels que $\phi' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ et $|\det(C'M + D')|^2 < a$ sous la condition que $Y_0^{-1} = \text{Im}(\phi' \cdot M)^{-1} \in R$ où R est défini par les équations 4.3.*

Démonstration. Posons y_1, y_2, \dots, y_n les éléments diagonaux de Y_0^{-1} , et c_i et d_i les i -ièmes colonnes de C' et D' . Directement des équations (4.14), si $X = \text{Re}(M)$, alors $Y_0^{-1} = (C'X + D')^{\top} Y^{-1} (XC'^{\top} + D'^{\top}) + C'Y C'^{\top}$ et

$$y_i = (c_i^{\top} X + d_i^{\top}) Y^{-1} (X c_i + d_i) + c_i^{\top} Y c_i. \quad (4.15)$$

Si $|\det(C'M + D')|^2 < a$, par les équations (4.15) et (4.5),

$$\prod_{i=1}^n y_i < t_2 \det(Y_0)^{-1} < t_2 a \det(Y)^{-1}. \quad (4.16)$$

De plus, puisque Y et Y^{-1} sont définies positives, par l'équation (4.15), on déduit que $(c_i^{\top} X + d_i^{\top}) Y^{-1} (X c_i + d_i) \leq y_i$ et $c_i^{\top} Y c_i \leq y_i$. Si $c_i = 0$, alors $d_i^{\top} Y^{-1} d_i = y_i$. Comme $\det(C'M + D') \neq 0$, on ne peut pas avoir $c_i = d_i = 0$. Ainsi, $y_i > y$ avec y une constante positive dépendante de Y . On a alors, par l'équation (4.16),

$$y_i < \frac{\prod_{j=1}^n y_j}{y^{n-1}} < t_2 a y^{1-n} \det Y^{-1}. \quad (4.17)$$

Par (4.15), on n'obtient donc qu'un nombre fini de paires (C_0, D_0) puisque ce sont des matrices à coefficients entiers bornées par une constante dépendant seulement de M . \square

Pour tous $M \in \mathfrak{H}^n$, on sait ainsi qu'il existe une transformation $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ minimisant $|\det(CM + D)|$. Sous la condition que $Y_0 \in R$ avec $Y_0 = L \operatorname{Im}(\phi \cdot M)^{-1} L^\top$ pour une matrice L à coefficients entiers de déterminant ± 1 . En effet, selon le Lemme 9, pour un $a > 0$ assez grand, il existe un nombre fini et non-nul de matrices $\phi' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ tel que $|\det(C'M + D')| < a$. Comme l'équation (4.12) est alors vérifiée, on a que $|\det(CM + D)|$ sera minimisée.

Pour une matrice symétrique P à coefficients entiers arbitraire, on pose

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} (L^\top)^{-1} & PL \\ 0 & L \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $M_0 := \phi_0 \cdot \phi \cdot M = (L^{-1})^\top \phi \cdot ML^{-1} + P$ de sorte que $\operatorname{Im}(M_0) = Y_0 \in R$. On peut prendre P de sorte la partie réelle de tous les éléments de M_0 soient dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Si $\phi' = \phi_0 \phi = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, par le Lemme 8, $|\det(CM + D)| = |\det(CM' + D)|$ et $\det(\operatorname{Im}(\phi' \cdot M)^{-1})$ est minimal.

4.3 La définition du domaine fondamental F

Dans cette section nous allons décrire l'adhérence du domaine fondamental F de \mathfrak{H}^n .

Définition 47. *On définit l'ensemble $F \subset \Gamma(n)$ tel que pour un point $M \in F$, on ait les inégalités suivantes :*

1. $L_i(\operatorname{Im}(M)^{-1}) \geq 0$ pour tous $i \leq g$;
2. $|\operatorname{Re}(M)_{ij}| \leq \frac{1}{2}$ pour tous $i, j \leq n$;
3. $|\det(CM + D)| \geq 1$ pour tous $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ avec $C \neq 0$.

Rappelons que les fonctions L_i permettent de définir le domaine fondamentale R .

Notons que dans la dernière condition, si $C = 0$, alors $|\det(CM + D)| = |\det(D)|$ est un entier non-nul, donc plus grand ou égal à 1.

Par ce que l'on a vu précédemment, l'image de F par des éléments de $\Gamma(n)$ couvre tout \mathfrak{H}^n . En effet, pour un point $M \in \mathfrak{H}^n$, on considère $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ tel que $|\det(CM + D)|$ soit minimal. Par l'équation (4.11), $|\det(\operatorname{Im}(\phi \cdot M))|$ est aussi minimal. On prend ensuite $\phi' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ tel que si $M' = \phi' \cdot M$, alors $L_i(\operatorname{Im}(M')^{-1}) \geq 0$, $|\operatorname{Re}(M)_{ij}| \leq \frac{1}{2}$. Par les équations (4.11) et (4.12), on doit alors avoir $|\det(\tilde{C}M + \tilde{D})| \geq 1$ pour tous $\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ puisque $\det(\operatorname{Im}(M')^{-1})$ est minimal.

Pour un point $M = X + iY$, notons LDL^\top la décomposition LDL de Y^{-1} . Posons $K = [\delta_{i+j, n+1}]_{ij}$ pour $i, j \leq n$, $D_0 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & K^\top D^{-1} K \end{pmatrix}$, $L_0 = \begin{pmatrix} L & \\ -L \operatorname{Re}(M) & K(L^{-1})^\top K \end{pmatrix}$ et $K_0 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$.

Lemme 10. *Il existe τ_3 tel que $K_0^\top \Psi(M) K_0 \in Q(\tau_3)$.*

Démonstration. Remarquons que

$$K_0^\top \Psi(M) K_0 = L_0 D_0 L_0^\top.$$

Comme $R \subset Q(t_1)$ et puisque $|\operatorname{Re}(M)_{ij}| \leq \frac{1}{2}$, on a que la matrice L_0 est bornée par un terme dépendant seulement de n . Posons d_1, d_2, \dots, d_{2n} les éléments diagonaux de D_0 . Pour $i < n$, on a

$$d_i d_{i+1}^{-1} = D_{ii} D_{i+1, i+1}^{-1}$$

et

$$d_{i+n} d_{i+n+1}^{-1} = D_{i-n, i-n} D_{i-n+1, i-n+1}^{-1}.$$

De plus, $d_n d_{n+1}^{-1} = D_{nn}^2$. Ainsi, on a, pour $k \neq n$,

$$0 < d_i \leq \tau_1 d_{i+1}. \quad (4.18)$$

où τ_1 ne dépend que de $m = 2n$.

Soient $A = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Notons $z_n = x_n + iy_n$ la dernière composante diagonale de M . La condition $|\det(CM + D)| \geq 1$ devient alors $x_n^2 + y_n^2 \geq 1$. Comme on a supposé que $|x_n| \leq \frac{1}{2}$, on a alors que $y_n^2 \geq \frac{3}{4}$. Comme $Y = (L^{-1})^\top D^{-1} L^{-1}$ avec L^{-1} triangulaire inférieure, on déduit que $D_{nn}^{-2} = y_n^2 \geq \frac{3}{4}$. Ainsi,

$$0 < d_n < \frac{4}{3} d_{n+1}. \quad (4.19)$$

Ainsi, $K_0^\top \Psi(M) K_0 \in Q(\tau_3)$ avec $\tau_3 = \max\{\frac{4}{3}, \tau_1\}$ dépendant seulement de n . \square

Lemme 11. *Il n'existe qu'un nombre fini de matrices ϕ telles que pour un point $M \in F$, $\phi \cdot M \in F$.*

Démonstration. Par le lemme précédent, $K_0^\top \Psi(M) K_0 \in Q(\tau_3)$. Posons $M' = \phi \cdot M \in F$. Par le Lemme 5, on a que $\Psi(M) = \phi^\top \Psi(M') \phi$. Ainsi,

$$K_0 \Psi(M) K_0 = K_0 \phi^\top K_0 (K_0 \Psi(M') K_0) K_0 \phi K_0. \quad (4.20)$$

Par le Lemme 6, les coefficients de $K_0 \phi K_0$ sont bornés. Ainsi, ϕ est bornée et il n'existe donc qu'un nombre fini de telles ϕ . \square

Notons $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_h$ les matrices données par le lemme précédent.

Pour un des $\phi_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$, si l'on prend un $M \in F$ tel que $\phi \cdot M \in F$ et $\det(\operatorname{Im}(M))^{-1}$ soient maximal, comme $|\det(CM + D)| \geq 1$,

$$\det(\operatorname{Im}(M)) = \det(\operatorname{Im}(\phi \cdot M))$$

et

$$|\det(CM + D)| = 1.$$

En effet,

$$\det(\operatorname{Im}(\phi \cdot M))^{-1} = \overline{\det((MC^\top + D^\top))} \det(\operatorname{Im}(M))^{-1} \det(MC^\top + D^\top) \geq \det(\operatorname{Im}(M))^{-1}. \quad (4.21)$$

Par conséquent, si $C \neq 0$, une condition $|\det(CM + D)| \geq 1$ de F est satisfaite avec égalité. Si $C = 0$, alors $\phi = \begin{pmatrix} (L^\top)^{-1} & PL \\ 0 & L \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Im}(\phi \cdot M)^{-1} = L \operatorname{Im}(M)^{-1} L^\top$. Si $L \neq \pm I_n$, alors $L_i(\operatorname{Im}(M)^{-1}) = 0$ pour un certain i . Si $L = \pm I_n$, alors $\phi \cdot M = M + P$ et on doit satisfaire $|\operatorname{Re}(M)_{ij}| = \frac{1}{2}$ pour un couple (i, j) . Ainsi, deux points de F sont équivalents par une transformation ϕ si au moins une des conditions de F est satisfaite avec égalité. Ainsi, si l'on a deux points M et M' de F tels qu'il existe $\phi \in \Gamma(n)$ telle que $M' = \phi \cdot M$, on a que $\phi = \phi_i$ pour un certain $i < h$ et au moins une des inégalités définissant F est satisfaite avec égalité.

4.4 Des conditions simplifiées pour F

Il est évident que tous les points M de F satisfont $|\det(C_i M + D_i)| \geq 1$ pour tous $i < h$ si $\phi_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$. Nous allons maintenant montrer que l'on peut changer la condition $|\det(CM + D)| \geq 1$ pour tous $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ avec $C \neq 0$ par la condition que $|\det(C_i M + D_i)| \geq 1$ pour tous $\phi_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$. Nous montrerons en même temps que $|\det(CM + D)| > 1$ si le couple (C, D) n'est pas associé à aucun couple (C_i, D_i) pour tous $i < h$.

Lemme 12. *Si $M = X + iY \in \mathfrak{H}^n$, pour $\lambda > \mu > 0$, on pose $M_\lambda = X + i\lambda Y$ et $M_\mu = X + i\mu Y$. Pour $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \operatorname{Sp}(2n, \mathbb{R})$ avec $C \neq 0$, on a $|\det(CM_\lambda + D)| > |\det(CM_\mu + D)|$. De plus, $|\det(CM_\lambda + D)|$ ne converge pas quant λ tend vers l'infinie.*

Démonstration. On a que $\zeta(\lambda) := \det(CM_\lambda + D)$ est un polynôme en terme de λ . Pour tous λ de partie réelle positive, M_λ est un point de \mathfrak{H}^n . Ainsi, $\zeta(\lambda) \neq 0$. De plus, on observe que, $\overline{\zeta(\lambda)} = \zeta(-\lambda)$. Ainsi, tous les zéros de ζ doivent être des imaginaires purs. Autrement, on aurait un zéro avec une partie réelle positive. On déduit que pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\det(CM_\lambda + D)|^2$ est un polynôme en λ^2 à coefficients réels positifs. Il suffit alors de montrer qu'il n'est pas constant.

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \det(CM_\lambda + D) &= i \operatorname{Tr}(\operatorname{adj}(CM_\lambda + D)CY) \\ &= i \det(CM_\lambda + D) \operatorname{Tr}((CM_\lambda + D)^{-1}CY). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} |\det(CM_\lambda + D)|^2 &= -2 |\det(CM_\lambda + D)|^2 \operatorname{Tr}(\operatorname{Im}((CM_\lambda + D)^{-1})CY) \\ &= -2 |\det(CM_\lambda + D)|^2 \operatorname{Tr}(\operatorname{Im}((CM_\lambda + D)^{-1})CY) \end{aligned}$$

Posons $N(\lambda) = 4 |\det(CM_\lambda + D)|^2 \operatorname{Tr}^2(\operatorname{Im}((CM_\lambda + D)^{-1})CY)$. On a $N(0) = 0$ puisqu'alors $CM_\lambda + D$ est réelle. Si $U^\top DU$ est la décomposition en valeurs propres de Y , en $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} |\det(CM_\lambda + D)|^2 &= N(0) + 2 |\det(CX + D)|^2 \operatorname{Tr}((CX + D)^{-1}CY(CX + D)^{-1}CY) \\ &= 2 |\det(CX + D)|^2 \operatorname{Tr}(((CX + D)^{-1}C)^\top Y(CX + D)^{-1}CY) \\ &= 2 |\det(CX + D)|^2 \operatorname{Tr}((U(CX + D)^{-1}CU^\top)^\top DU(CX + D)^{-1}CU^\top D). \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité suit de fait que $(CX + D)^{-1}C$ est symétrique. Comme $D \succ 0$, on déduit que $U(CX + D)^{-1}CU^\top = 0$. Par conséquent, $(CX + D)^{-1}C = 0$ et $C = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $C \neq 0$.

Comme $|\det(CM_\lambda + D)|^2$ est un polynôme non-constant en terme de λ , il suit que cette quantité ne converge pas quand λ tend vers l'infinie. \square

Soit $M \in \mathfrak{H}^n$ tel que $|\det(C_i M + D_i)| \geq 1$ pour $i < h$, $L_i(\operatorname{Im}(M)^{-1}) \geq 0$ et $|\operatorname{Re}(M)_{ij}| \leq \frac{1}{2}$ pour tous i, j . Si $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ avec $C \neq 0$, supposons que $|\det(CM + D)| \leq 1$ et que (C, D) n'est pas associé à une paire $(C_i M + D_i)$ pour $i \leq h$. Par les lemmes 9 et 8, il n'y a qu'un nombre fini de couples non-associés (C, D) étant le bloc inférieur d'une matrice de $\Gamma(n)$ tels que $|\det(CM + D)|$ inférieures à 1 pour $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$. Par le lemme 12, il existe $\lambda > 1$ tel que $|\det(CM_\lambda + D)| \geq 1$ pour toutes matrices $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ telles que $|\det(CM + D)| \leq 1$. Ainsi, pour λ assez grand, on a que $|\det(CM_\lambda + D)| \geq 1$ pour tous $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ avec (C, D) non associé à (C_i, D_i) pour tous $i \leq h$. On peut également supposer par continuité que, pour un $\phi_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$, $|\det(C_0 M_\lambda + D_0)| = 1$ pour un certain $\lambda > 0$ où (C_0, D_0) n'est pas associé à (C_i, D_i) pour tous $i \leq h$.

On a que $|\operatorname{Re}(M_\lambda)_{ij}| = |\operatorname{Re}(M)_{ij}| \leq \frac{1}{2}$ et, par linéarité de L_i , $L_i(\operatorname{Im}(M_\lambda)^{-1}) = \lambda^{-1} L_i(\operatorname{Im}(M)^{-1})$. Ainsi, $M_\lambda \in F$.

L'expression $|\det(CM_\lambda + D)|$ atteint son minimum de 1 pour $(C, D) = (C_0, D_0)$. Ainsi, il existe $\phi' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ telle que $\phi' \cdot M_\lambda \in F$ et (C', D') est associé à (C_0, D_0) . On déduit que $(C', D') = (C_i, D_i)$ pour un certain $i \leq h$, ce qui est une contradiction. Ainsi, si $|\det(C_i M + D_i)| \geq 1$ pour tous $i \leq h$, alors $|\det(CM + D)| \geq 1$ pour tous $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$.

4.5 Les propriétés de F

Remarquons que $|\operatorname{Re}(M)_{ij}|$ est linéaire en fonction de $M \in \mathfrak{H}^n$. En effet, $|\operatorname{Re}(\lambda M)_{ij}| = \lambda |\operatorname{Re}(M)_{ij}|$, car $\lambda M \in \mathfrak{H}^n$ implique que $\lambda > 0$. On a ainsi que F est défini par un nombre fini d'inégalités. Il vient alors que F est fermé. Par le Lemme 12 et comme L_i est linéaire et $|\operatorname{Re}(M)_{ij}|$ est linéaire en fonction de $M \in \mathfrak{H}^n$ (puisque $M \in \mathfrak{H}^n$, on ne peut que multiplier par un facteur positif), on déduit que les points sur la frontière de F sont les points satisfaisant au moins une des égalités suivantes : $|\det(C_i M + D_i)| = 1$ pour $i \leq h$, $L_i(\operatorname{Im}(M)^{-1}) = 0$ ou $|\operatorname{Re}(M)_{ij}| = \frac{1}{2}$.

Si F' est l'image de F par une transformation modulaire $\phi \neq \pm I_{2n}$ et si F et F' ont un point M en commun, alors $\phi = \phi_i$ pour un $i \leq h$ et $M \in \partial F$. On déduit que les images F' recouvrent \mathfrak{H}^n et leurs intersections deux à deux ne contiennent pas d'ouvert. De plus, il n'existe qu'un nombre fini de ϕ tel que $F \cap F' \neq \emptyset$.

Proposition 26. *Tout sous-ensemble compacte G de \mathfrak{H}^n est recouvert par un nombre fini d'images de F par des transformations $\phi \in \Gamma(n)$.*

Démonstration. On sait que $\Psi(G) \subset Q(t)$ pour un certain $t > 0$. On peut prendre $t \geq \tau_3$. Soit $M' = \phi \cdot M$ un point d'intersection de F' et G . Rappelons que $\Psi(M') = (\phi^{-1})^\top \Psi(M) \phi^{-1}$ par le Lemme 5. Par le Lemme 10, $K_0^\top \Psi(M) K_0 = K_0^\top \phi^\top \Psi(M') \phi K_0$ est un point de $Q(\tau_3) \subset Q(t)$. Or, $\Psi(M')$ est aussi un point de $Q(t)$. Par le Lemme 6, on déduit que ϕ est bornée, donc appartient à un nombre fini de transformations. Par conséquent, seul un nombre fini d'images F' recouvrent G . \square

On a que $iI \in F$. En effet, $\det(iC + D)$ est un entier gaussien non-nul, donc

$$|\det(iC + D)| \geq 1.$$

De plus, $\operatorname{Re}(iI_n) = 0$ et $I_n = \operatorname{Im}(iI)^{-1}$ est un point du domaine R . Par le Lemme 12, on voit facilement que $\lambda iI_n \in F$ pour tous $\lambda \geq 1$. On déduit que F n'est pas compact.

On a vu que pour tous $M \in F$, les matrices $\operatorname{Re}(M)$ et $\operatorname{Im}(M)^{-1}$ sont bornées. On déduit que le volume de F est fini par l'équation (3.10).

Chapitre 5

Le volume du domaine fondamental du groupe modulaire

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à calculer le volume du domaine fondamental F déterminé dans le chapitre précédent. Celui-ci nous permettra, à l'aide du théorème de Chern-Gauss-Bonnet de calculer la caractéristique d'Euler de $\mathfrak{H}^n/\Gamma(n)$ en connaissant la classe d'Euler de \mathfrak{H}^n . Comme pour le chapitre précédent, ce chapitre s'inspire fortement de ce qui a été fait dans [9].

5.1 La fonction ψ

Soit $f_n(x)$ une fonction monotone décroissante tel que $\int_0^1 f_n(x)x^{n-1}dx = 1$ et $f_n(x) = 0$ pour $x \geq 1$. Par exemple, $f_n(x) = n(n-1)(1-x)$ pour $x \leq 1$ et 0 sinon. Soit $M \in \mathfrak{H}^n$, pour $\epsilon > 0$, posons

$$\pi(\epsilon, M) = \epsilon^{2n} \sum_{0 \neq v \in \mathbb{Z}^{2n}} f_n((\epsilon v)^\top \Psi(M)(\epsilon v)). \quad (5.1)$$

Cette fonction π ressemble à une somme de Riemann dont on peut calculer la limite.

Lemme 13. *On a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi(\epsilon, M) = \frac{\pi^n}{(n-1)!}$.*

Démonstration. Observons que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi(\epsilon, M) = \int_{v^\top \Psi(M)v \leq 1} f_n(v^\top \Psi(M)v) dv$. Le volume de l'ellipsoïde défini par $v^\top \Psi(M)v \leq x$ est $J(x) = \frac{\pi^n}{n!} x^n \sqrt{\det(\Psi(M))^{-1}} = \frac{\pi^n}{n!} x^n$ puisque

$\Psi(M)$ est symplectique, donc de déterminant 1. Ainsi,

$$\int_{v^\top \Psi(M)v \leq 1} f_n(v^\top \Psi(M)v) dv = \int_0^1 f_n(x) J'(x) dx = \frac{\pi^n}{(n-1)!} \int_0^1 f_n(x) x^{n-1} dx = \frac{\pi^n}{(n-1)!}. \quad (5.2)$$

□

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 14. *Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, alors il existe au plus $(1 + 2b^{\frac{1}{2}})$ entiers c tels que $(c - b)^2 \leq a$.*

Démonstration. Les solutions c réelles à $(c - b)^2 \leq a$ forment un intervalle de longueur $2a^{\frac{1}{2}}$. Il ne peut y avoir plus de $1 + 2a^{\frac{1}{2}}$ entiers dans cette intervalle. □

Rappelons que ω désigne la forme de volume de \mathfrak{H}^n .

Lemme 15. *Il existe une fonction intégrable g sur F tel que pour tous $0 < \epsilon \leq 1$ et $M = X + iY \in F$, nous avons $\pi(\epsilon, M) \leq g(M)$ et l'intégrale*

$$\gamma := \int_F g(M) \omega \quad (5.3)$$

converge.

Démonstration. Pour un $\rho > 0$, posons $h(\rho, M)$ le nombre de points w de \mathbb{Z}^{2n} satisfaisant $w^\top \Psi(M)w \leq \rho$. Si $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, un calcul simple montre que

$$w^\top \Psi(M)w = (u^\top - v^\top X)Y^{-1}(v - Xv) + v^\top Yv. \quad (5.4)$$

Puisque $Y \succ 0$, alors $h(\rho, M)$ est inférieur ou égal au nombre de solutions dans \mathbb{Z}^n de $(u^\top - v^\top X)Y^{-1}(v - Xv) \leq \rho$ et $v^\top Yv \leq \rho$.

Soit LDL^\top la décomposition LDL de Y^{-1} . Posons $r = Xv$ et u_i, v_i, r_i les éléments de u, v et r .

Notons p_k les éléments diagonaux de Y^{-1} . La condition $(u^\top - v^\top X)Y^{-1}(v - Xv) \leq \rho$ devient alors

$$\left((u_k - r_k) + \sum_{l=k+1}^n L_{lk}(u_l - r_l) \right)^2 p_k \leq \rho \quad (5.5)$$

pour $k = 1, \dots, n$. Par le Lemme 14, il ne peut y avoir plus de $\prod_{k=1}^n (1 + 2p_k^{-\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}})$ vecteurs entiers u satisfaisant ces relations.

La condition $v^\top Yv \leq \rho$ devient alors

$$(v_k + \sum_{l=1}^{k-1} (L^{-1})_{lk} v_l)^2 p_k^{-1} \leq \rho \quad (5.6)$$

pour $k = 1, \dots, n$. Par le Lemme 14, il ne peut y avoir plus de $\prod_{k=1}^n (1 + 2p_k^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}})$ vecteurs entiers v satisfaisant ces relations.

La quantité $h(\rho, M)$ est bornée par le produit de $\prod_{k=1}^n (1 + 2p_k^{-\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}})$ et $\prod_{k=1}^n (1 + 2p_k^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}})$. Ainsi,

$$h(\rho, M) \leq \prod_{k=0}^n (1 + 2\rho^{\frac{1}{2}} (p_k^{\frac{1}{2}} + p_k^{-\frac{1}{2}}) + 4\rho). \quad (5.7)$$

Comme $\Psi(M) \in Q(\tau_3)$, il existe γ_1 tel que $p_k < \gamma_1$ pour tous $k \leq n$ pour tous $M \in F$. Ainsi, on peut montrer qu'il existe $\gamma_2 > 0$ tel que

$$h(\rho, M) < \gamma_2 (1 + \rho)^n \prod_{k=1}^n p_k^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.8)$$

En effet, prenons $\gamma_2 = (\max\{\gamma_1 + 1, \sqrt{\gamma_1}\})^n$. Alors,

$$\begin{aligned} h(\rho, M) &\leq \prod_{k=1}^n (1 + 2\rho^{\frac{1}{2}} (p_k^{\frac{1}{2}} + p_k^{-\frac{1}{2}}) + 4\rho) \\ &= \prod_{k=1}^n (p_k^{\frac{1}{2}} + 2\rho^{\frac{1}{2}} (p_k + 1) + 4\rho p_k^{\frac{1}{2}}) p_k^{-\frac{1}{2}} \\ &< \gamma_2 (1 + 2\rho^{\frac{1}{2}} + 4\rho)^n \prod_{k=1}^n p_k^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \gamma_2 (1 + \rho)^n \prod_{k=1}^n p_k^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puisque la fonction f atteint son maximum en $x = 0$, on a, par définition de h ,

$$\pi(\epsilon, M) \leq \epsilon^{2n} f(0) h(\epsilon^{-2}, M). \quad (5.9)$$

Ainsi, pour $\epsilon \leq 1$, il existe une constante $\gamma_3 = \gamma_2 2^n$ telle que

$$\begin{aligned} \pi(\epsilon, M) &\leq f_n(0) \gamma_2 \epsilon^{2n} (1 + \epsilon^{-2})^n \prod_{k=1}^n p_k^{-\frac{1}{2}} \\ &= f_n(0) \gamma_2 (1 + \epsilon^2)^n \prod_{k=1}^n p_k^{-\frac{1}{2}} \\ &= f_n(0) \gamma_3 \prod_{k=1}^n p_k^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On pose $g(M) = f_n(0) \gamma_3 \prod_{k=1}^n p_k^{-\frac{1}{2}}$ de sorte que $\pi(\epsilon, M) \leq g(M)$. Montrons maintenant que $\int_F g(M) \omega$ converge. Rappelons que $\omega = (-1)^m de_1 de_2 \dots de_m dy_1 dy_2 \dots dy_m$ par l'équation (3.10).

Dans F , les matrices X, Y^{-1} et donc les éléments p_k sont bornés. On déduit que l'intégrale

$$\int_F g(M)\omega = f(0)\gamma_3 \int_F \prod_{k=1}^n p_k^{-\frac{1}{2}} \omega$$

converge. □

On déduit ainsi le corollaire suivant.

Corollaire 3. *L'intégrale $\psi(\epsilon) = \int_F \pi(\epsilon, M)\omega = \epsilon^{2n} \sum_{0 \neq w \in \mathbb{Z}^{2n}} \int_F f((\epsilon w)^\top \Psi(M)(\epsilon w))\omega$ converge et*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(\epsilon) = \frac{\pi^n}{(n-1)!} \int_F \omega. \quad (5.10)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les Lemmes 13 et 15. □

5.2 Le sous-groupe Δ_1

On pose W l'ensemble des vecteurs entiers de \mathbb{R}^{2n} dont les éléments sont copremiers. Posons également $e = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Lemme 16. *Soit $w \in W$, il existe une matrice $\phi \in \Gamma(n)$ tel que w soit la première colonne de ϕ . Réciproquement, la première colonne de toutes matrices $\phi \in \Gamma(n)$ est un élément de W .*

Démonstration. Puisque les matrices $\phi \in \Gamma(n)$ sont à coefficients entiers et de déterminant 1, les éléments de leur première colonne doivent avoir un plus grand diviseur commun positif de 1. Ainsi, la première colonne de $\Gamma(n)$ est élément de W .

Soit $w \in W$, on cherche $\phi \in \Gamma(n)$ tel que $\phi^{-1}w = e$. Posons $w_1 = \phi^{-1}w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Posons a et b les plus grands diviseurs communs positifs de u et v avec $a = 0$ si $u = 0$ et $b = 0$ si $v = 0$. Prenons la matrice $\phi \in \Gamma$ telle que $a + b$ soit minimale. Si $a < b$, alors on remplace ϕ par $\phi \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ de sorte qu'alors $a > b$. On peut ainsi supposer que $a \geq b$.

Si $b > 0$, on prend U une matrice $n \times n$ à coefficients entiers et de déterminant 1 dont la première ligne est $b^{-1}v^\top$ et ayant une colonne t tel que le vecteur $u_1 := Uu - bt$ soit de norme inférieure ou égale à $\frac{v}{2}$. Alors, le plus grand diviseur commun positif c des éléments de u_1 est borné par $\frac{1}{2}b$ donc $c < a$. Soit J une matrice $n \times n$ symétrique à coefficients entiers ayant t comme première colonne. Posons

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} U^{-1} & U^{-1}J \\ 0 & U^\top \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Comme $(U^{-1})^\top v = be$ et $J(U^{-1})^\top v = bt$, on a que $(\phi\phi_1)^{-1}w = \phi_1^{-1}w_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ be \end{pmatrix}$. Le plus grand diviseur commun des éléments de u_1 est c , alors que pour be_1 , c'est b . Or, $\phi\phi_1 \in \Gamma(n)$ et comme $c + b < a + b$, on obtient une contradiction puisque ϕ devait minimiser $a + b$.

Ainsi, on doit avoir $b = 0$ et $a = 1$. En effet, les éléments de $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ sont copremiers. Soit U_1 une matrice $n \times n$ à coefficients entiers de déterminant 1 dont la première ligne est u^\top et

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} U_1^\top & 0 \\ 0 & U_1^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

On a alors $(\phi\phi_2)^{-1}w = e$. \square

Soit Δ_1 le sous-groupe de $\Gamma(n)$ tel que pour $\phi \in \Delta_1$, la première colonne de ϕ est e . Deux éléments ϕ_1 et ϕ_2 de $\Gamma(n)/\Delta_1$ sont dans la même classe d'équivalence à gauche si leur première colonne est identique. Par le Lemme 16, si $\mathcal{I} = \{I_{2n}, -I_{2n}\}$, on a la décomposition

$$\Gamma(n)/\mathcal{I} = \sum_{w \in W} \phi_w(\Delta_1/\mathcal{I}) = \sum_{w \in W} (\Delta_1/\mathcal{I})\phi_w^{-1} \quad (5.13)$$

où les $\phi_w \in \Gamma(n)$ ont w comme première colonne. On peut prendre $\phi_{-w} = -\phi_w$ de sorte que ϕ_{-w} et ϕ_w soient la même transformation.

Soit F_w l'image de F par ϕ_w^{-1} alors les F_w couvrent deux fois un domaine fondamental F_0 de Δ_1 . De plus, par le Lemme 5,

$$\int_F f_n((\epsilon w)^\top \Psi(M)(\epsilon w))\omega = \int_{F_w} f_n((\epsilon e)^\top \Psi(M)(\epsilon e))\omega. \quad (5.14)$$

On déduit que, si $p = e^\top \Psi(M)e^\top$,

$$\sum_{w \in W} \int_F f_n((\epsilon e)^\top \Psi(M)(\epsilon e))\omega = 2 \int_{F_0} f_n(\epsilon^2 p)\omega. \quad (5.15)$$

Comme tout vecteur non-nul de \mathbb{Z}^{2n} est un multiple entier positif d'un vecteur de W , on déduit que

$$\psi(\epsilon) = \epsilon^{2n} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{w \in W} \int_F f_n((\epsilon l e)^\top \Psi(M)(\epsilon l e))\omega = 2\epsilon^{2n} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{F_0} f_n(\epsilon^2 l^2 p)\omega. \quad (5.16)$$

Une matrice $\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Delta_1$ est telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} * \\ * & B_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} * \\ * & D_1 \end{pmatrix}$ où A_1 , B_1 , C_1 et D_1 sont de taille $n-1$. On peut vérifier que

$$\begin{aligned} A_1 B_1^\top &= B_1 A_1^\top \\ C_1 D_1^\top &= D_1 C_1^\top \\ A_1 D_1^\top - B_1 C_1^\top &= I_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\phi_1 := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in \Gamma(n-1)$. On pose $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ et

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \in \Gamma(n). \quad (5.17)$$

Si $\phi_0 = \phi\phi_1^{-1} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$, alors on peut montrer que $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & I_{n-1}^* \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$, $C_0 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_0 = \begin{pmatrix} * & * \\ * & I_{n-1}^* \end{pmatrix}$. Comme ϕ_0 est symplectique, on a que $C_0D_0^\top = D_0C_0^\top$. Ainsi, $C_0 = 0$. De plus, $A_0D_0^\top = I_n$ et $A_0B_0^\top = B_0A_0^\top$ de sorte qu'il existe $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & I_{n-1} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} b & v^\top \\ v & 0 \end{pmatrix}$ avec $u, v \in \mathbb{Z}^{n-1}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} U^\top & PU^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma(n). \quad (5.18)$$

On a que $\phi = \phi_0\phi_2$. Il est évident que le groupe Δ_2 des matrices de la même forme que ϕ_2 forme un groupe isomorphe à $\Gamma(n-1)$. De plus, $\Delta_2 \subset \Delta_1$. Les classes d'équivalences à gauche du quotient de Δ_1/Δ_2 peuvent être représentées par un élément de la même forme que ϕ_0 .

Ceci nous permettra de trouver un autre domaine fondamental pour Δ_1 .

5.3 Un autre domaine fondamental pour Δ_1

Supposons que $N = \phi_2 \cdot M$ avec $M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & M_1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} * & * \\ * & N_1 \end{pmatrix}$. On a alors,

$$\begin{aligned} A_2M + B_2 &= \begin{pmatrix} * & * \\ * & A_1M+B_1 \end{pmatrix}; \\ C_2M + D_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & C_1M+D_1 \end{pmatrix}; \\ (C_2M + D_2)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & (C_1M+D_1)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $N_1 = \phi_1 \cdot M_1$. Pour tous $M \in \mathfrak{H}^n$, on prend $\phi_1 \in \Gamma(n-1)$ tel que $\phi_1 \cdot M_1 \in F_1$ avec F_1 le domaine fondamental de $\Gamma(n-1)$. Comme on peut remplacer la matrice ϕ_1 par $-\phi_1$, il y a deux possibilités pour la matrice ϕ_2 définie à partir de (5.17).

Soit $O = \phi_0 \cdot N$, alors $O = U^\top NU + P$. Avec la même notation d'indice que précédemment, on a

$$\begin{aligned} O_1 &= N_1, \\ \text{Im}(O)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & I_{n-1} \end{pmatrix} \text{Im}(N)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -u^\top \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \\ \text{Re}(O) &= \begin{pmatrix} 1 & u^\top \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \text{Re}(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & I_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & v^\top \\ v & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par définition de $\Psi(N)$, $\Psi(N)$ et $\text{Im}(N)^{-1}$ ont le même premier élément diagonal p . Si $\text{Im}(N)^{-1} = [y_{ij}]_{ij}$ et $\text{Im}(O)^{-1} = [y'_{ij}]_{ij}$, on a que $y'_{1l} = y_{1l} - pu_{l-1}$ pour $l > 1$. Choisissons u tel que $|y'_{1l}| \leq \frac{p}{2}$ pour $l > 1$, puis b et v de sorte que $|\text{Re}(O)_{1j}| \leq \frac{1}{2}$ pour $j > 0$.

Il suit que tout point de \mathfrak{H}^n peut être envoyé par une transformation de Δ_1 vers un point $N = X + iY$ satisfaisant

$$N_1 \in F_1, \quad (5.19)$$

$$|Y_{1l}^{-1}| \leq \frac{p}{2}, |X_{1j}| \leq \frac{1}{2} \quad (5.20)$$

pour $l > 1$ et $j > 0$. Comme ϕ_2 n'est définie qu'au signe de ϕ_1 près, cette région ne définit pas un domaine fondamental de Δ_1 . La transformation $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ envoie ce domaine sur lui-même. Si l'on ajoute la condition que $|Y_{12}^{-1}| \geq 0$, nous obtiendrons un domaine fondamental F^* pour le groupe Δ_1 .

Dans le cas particulier où $n = 1$, la seule condition définissant F^* est que $|X_{11}| \leq \frac{1}{2}$.

5.4 Une formule pour le volume du domaine fondamental

Par le Lemme 5, le premier élément diagonal p de $\Psi(M)$ est invariant en appliquant une transformation de Δ_1 . Comme F_0 et F^* sont des domaines fondamentaux pour Δ_1 ,

$$\int_{F_0} f_n(\epsilon^2 l^2 p) \omega = \int_{F^*} f_n(\epsilon^2 l^2 p) \omega. \quad (5.21)$$

On peut faire la décomposition suivante de Y^{-1} : il existe des matrices $L = \begin{pmatrix} p & 0 \\ v & I_{n-1} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & Y_1^{-1} \end{pmatrix}$ telles que

$$Y^{-1} = LDL^T = \begin{pmatrix} p & v^T \\ v & Y_0 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Il s'agit d'une décomposition similaire à la décomposition de Cholesky ou LDL. On a que $Y_1^{-1} = Y_0 - p^{-1}vv^T$ et Y_1 est la partie imaginaire de M_1 .

Posons ω_1 la forme de volume de \mathfrak{H}^{n-1} . Associons Y_1^{-1} à un point de \mathfrak{H}^{n-1} . Comme

$$\text{svec}(M) = (M_{11}, \sqrt{2}M_{21}, \dots, \sqrt{2}M_{n1}, \text{svec}(M_1)), \quad (5.23)$$

par l'équation (3.10),

$$\omega = (-1)^n de_{11} dy_{11} \dots de_{n1} dy_{n1} \omega_1. \quad (5.24)$$

Posons $\eta_n = 2 - \delta_{n1}$. Par définition du domaine F^* , si $m = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$\begin{aligned} (-1)^n \eta_n \int_{F^*} f(\epsilon^2 l^2 p) \omega &= \int_{F^*} f(\epsilon^2 l^2 p) de_{11} dy_{11} \dots de_{1n} dy_{1n} \omega_1 \\ &= V_{n-1} \int_0^\infty 2^{n-1} p^{n-1} f(\epsilon^2 l^2 p) dp \\ &= 2^{n-1} V_{n-1} (\epsilon l)^{-2n} \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx \end{aligned}$$

$$= 2^{n-1} V_{n-1}(\epsilon l)^{-2n}$$

où V_{n-1} est le volume du domaine fondamental de $\Gamma(n-1)$. Ainsi,

$$\psi(\epsilon) = (-1)^n 2 \epsilon^{2n} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{F_0} f(\epsilon^2 l^2 p) \omega = (-1)^n 2^n \eta_n^{-1} V_{n-1} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2n} = (-1)^n 2^n \eta_n^{-1} V_{n-1} \zeta(2n) \quad (5.25)$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann.

Par conséquent, le volume V du domaine fondamental F est

$$V = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1} \prod_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{\pi^k} \zeta(2k). \quad (5.26)$$

Il est possible d'obtenir une expression à un multiple rationnel de π près. Il est possible de réécrire cette dernière équation comme [3],

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) \quad (5.27)$$

où B_n est le nième nombre de Bernoulli.

Ainsi,

$$V = (-1)^n 2^{\frac{3n^2-n+2}{2}} \pi^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{(i-1)!}{(2i)!} B_{2i}. \quad (5.28)$$

On obtient en particulier que

- $V_1 = -\frac{\pi}{3}$;
- $V_2 = -\frac{\pi^3}{135}$;
- $V_3 = \frac{8\pi^6}{127575}$;
- $V_4 = \frac{64\pi^{10}}{200930625}$;
- $V_5 = -\frac{8192\pi^{15}}{6266021540625}$.

À priori, il n'est pas possible d'appliquer le théorème de Chern-Gauss-Bonnet au quotient de l'espace de Siegel par le groupe modulaire, car ce n'est pas un espace compact. Toutefois, dans [6], on y montre un moyen de donner un sens à la caractéristique d'Euler et à généraliser le théorème de Chern-Gauss-Bonnet à ce cas précis.

En résumé, on borne le déterminant de la partie imaginaire des points de F par η^n et obtient ainsi un orbifold compact avec bord. Pour calculer la caractéristique d'Euler de cette espace, il faut ajouter un terme pour prendre en compte le bord. Il s'avère que lorsque η tend vers l'infini, le terme tend vers zéro.

En appliquant le théorème de Chern-Gauss-Bonnet en suivant [6] avec les nièmes classes de Chern, on obtient

- $\chi_1 = -\frac{1}{6}$;

- $\chi_2 = -\frac{1}{720}$;
- $\chi_3 = \frac{1}{181400}$;
- $\chi_4 = \frac{1}{43545600}$;
- $\chi_5 = -\frac{1}{5748019200}$.

Ces résultats peuvent être confirmés dans [6]. On note χ_n la caractéristique d'Euler du quotient de l'espace de Siegel de dimension n par le groupe modulaire associé.

Conclusion

En conclusion, nous avons réussi à calculer la caractéristique d'Euler du quotient des espaces de Siegel par un groupe modulaire. Pour cela, nous avons utilisé le théorème de Chern-Gauss-Bonnet, qui nous permet de calculer la caractéristique d'Euler en fonction de la connexion de Lévi-Civita d'une métrique quelconque. Pour simplifier, à la place de calculer la classe d'Euler, nous avons calculé la n -ième classe de Chern en remarquant que la connexion de Lévi-Civita associée à notre métrique correspond à une connexion complexe regardée comme une connexion réelle.

Nous avons trouvé une carte locale, qui correspond à la vectorisation des matrices symétriques. Nous avons pu exprimer simplement la métrique choisie à l'aide d'une opération, le produit de Kronecker symétrique, ce qui nous a permis de calculer la connexion de Lévi-Civita, sa version complexe, et les formes de courbure associées.

Nous n'avons, par contre, pas réussi à trouver une formule explicite pour la caractéristique d'Euler des espaces de Siegel.

Bibliographie

- [1] Carl B. Allendoerfer. The euler number of a riemann manifold. *American Journal of Mathematics*, 62(1) :243–248, 1940.
- [2] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1993.
- [3] George Arfken. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, 2 edition.
- [4] Hartmut Führ and Ziemowit Rzeszutnik. A note on factoring unitary matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 547 :32–44, 2018.
- [5] Shigeyuki Morita. *Geometry of Differential Forms*. Iwanami Shoten, 1997, 1998.
- [6] Ichiro Satake. The Gauss-Bonnet theorem for v-manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 9(4) :464–492, 1957.
- [7] Kathrin Schäcke. On the Kronecker product. <https://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/henry/reports/kronthesis-schaecke04.pdf>, 2013.
- [8] Carl Ludwig Siegel. Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. *Mathematische Annalen*, 116 :617–657, 1939.
- [9] Carl Ludwig Siegel. Symplectic geometry. *American Journal of Mathematics*, 65(1) :1–86, 1943.
- [10] Kevin Thouin. det-cpp. <https://github.com/thouin/det-cpp>. Accessed : 2021-05-29.