# CATÉGORIES SINGULIÈRES ET DUALITÉ DE KOSZUL

par

MOHAMMED BOUHADA

Thèse présentée au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de Philosophæ Doctor (Ph. D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, novembre 2019

Le 19 novembre 2019

le jury a accepté la thèse de Monsieur Mohammed Bouhada dans sa version finale

Membres du jury

Professeur Shiping Liu

Directeur de recherche

Département de mathématiques

Professeur Thomas Brüstle

Président rapporteur

Département de mathématiques

Professeur Kiyoshi Igusa

Membre externe

Brandeis university

Professeur Ibrahim Assem

Membre interne

Département de mathématiques

# SOMMAIRE

Les questions traitées dans ce travail tirent leur origine des articles [6, 7, 10] sur le revêtement galoisien des catégories dérivées et la dualité de Koszul.

Dans la première partie, Bouhada-Huang-Liu [12] ont développé une théorie d'homologie des complexes doubles, ce qui leur a permis de généraliser le fameux théorème de Beilinson-Ginzburg-Soergel pour un couple infini de sous-catégories triangulées des catégories dérivées non bornées. Rappelons que des généralisations de ce théorème pour certaines algèbres différentielles ont été prouvés par Floystad [22] et pour des catégories positivement graduées par Mazorchuk-Ovsienko-Stroppel [44].

Dans la deuxième partie, en s'appuyant sur le théorème de Bautista-Liu, l'auteur [13] a prouvé une équivalence triangulée qui l'a aidé à bien comprendre le structure de la catégorie singulière bornée des algèbres monomiales quadratiques.

**Mots-clefs** : catégorie triangulée, catégories singulières, catégories dérivées, revêtement galoisien, module sur une catégorie, dualité de Koszul, complexe de Koszul, algèbre de Koszul, complexe total d'un complexe double.

À MA FAMILLE

TO MY FAMILLY

# REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de thèse Mr Shiping Liu. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Ma reconnaissance va également à Mr Assem Ibrahim, à Mr Thomas Brüstle et à Mr Kiyoshi Igusa pour l'honneur qu'ils m'apportent en acceptant de faire partie du jury.

J'adresse toute ma gratitude à ma famille et à toutes les personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

Je remercie tous les membres du groupe de recherche en structures algébriques et géométriques.

Mohammed Bouhada

Sherbrooke, Octobre 2019

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

L'histoire de la théorie de Koszul remonte à la manière dont Cartan et Eilenberg calculent les groupes de cohomologie des algèbres de Lie en utilisant la résolution de Koszul ; voir [16, Chapitre 8, Section 7]. Plus tard, diverses résolutions de Koszul ont été utilisées pour calculer l'homologie et la cohomologie des algèbres de Hopf, des algèbres de Lie restreintes de caractéristique 2 et l'algèbre de Steenrod ; voir [14, 43]. En traitant des algèbres graduées issues de la topologie algébrique, Priddy a formalisé la théorie de Koszul des algèbres de Koszul et des complexes de Koszul et a découvert une dualité parmi les algèbres d'homologie de certaines algèbres de Koszul ; voir [47]. Cette belle théorie a des applications dans des nombreuses branches des mathématiques telles que, la topologie algébrique ; voir [29, 48], géométrie algébrique ; voir [9, 10], groupes quantiques ; voir [38], algèbre commutative ; voir [21], et la théorie des représentations des algèbres de Lie ; voir [10, 51] et des algèbres associatives ; voir [26, 27, 39, 40].
Beilinson, Ginzburg et Soegel ont décrit la dualité de Koszul en termes des catégories dérivées graduées de deux algèbres de Koszul duales ; voir [10], et pour des considérations similaires, voir [9, 22, 32, 42]. Plus précisément,

**Théorème [10].** Soit $A$ une algèbre de Koszul finie à gauche. Alors il existe une équivalence de catégories triangulées $D^{\downarrow}(\mathrm{Gmod}A) \cong D^{\uparrow}(\mathrm{Gmod}A^{!})$.

Dans [44], Mazorchuk, Ovsienko et Stroppel ont généralisé la théorie de Koszul à des catégories positivement graduées ; voir aussi [41]. En particulier, ils ont obtenu une dualité de Koszul entre un couple, identique à celui décrit dans [10],voir [44, Théorème 30]

Rappelons que ce résultat a été déjà généralisé par Bautista et Liu pour les catégories dérivées bornées

[7] dans le cas où $A = kQ/(kQ^+)^2$ dont $Q$ est graduable, ( voir la définition 1.2.1, page 7). Donc, la question qui se pose maintenant, est-ce que ce dernier résultat rest vrai pour n'importe quelle catégorie localement bornée $kQ/R$ où $Q$ est un carquois graduable localement fini et $R$ un ideal quadratique ?

La réponse est dans le théorème suivant :

**Théorème [12].** Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul, où $Q$ est un carquois graduable localement fini. Soient $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 0$, alors le foncteur dérivé de Koszul $F^D : D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \to D^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ est une équivalence triangulée avec quasi-inverse $G^D : D^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda) \to D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$.

**Remarque :** Lorsque $p = 1$ et $q = 0$ on obtient exactement les catégories $D^{\downarrow}(\mathrm{Gmod}A)$ et $D^{\uparrow}(\mathrm{Gmod}A^!)$.

Maintenant sous certaines conditions [10] ont obtenu une version de la dualité de Koszul pour les catégories dérivées bornées. Plus présicement :

**Théorème [10].** Soit $A$ une algèbre de Koszul. Supposons que $A$ est un bimodule de type fini sur $A_0$, et que $A_i = 0$ pour $i >> 0$. Supposons de plus que $A^!$ est noethérien à gauche. Alors la dualité de Koszul induit une équivalence de catégories triangulées $D^b(\mathrm{Gmod}A) \cong D^b(\mathrm{Gmod}A^!)$.

Notre version est la suivante :

**Théorème [12].** Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul, où $Q$ est un carquois graduable localement fini. Si $\Lambda$ localement bornée à droite (ou à gauche) et $\Lambda^!$ est localement bornée à gauche (ou à droite, respectivement) , Alors, $D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda^!) \cong D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda)$ et $D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda^!) \cong D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$.

**Corollaire [12].** Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul, où $Q$ est un carquois graduable localement fini. Si $Q$ n'a pas de chemin infini à droite ou n'a pas de chemin infini à gauche, alors $D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda^!) \cong D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda)$ et $D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda^!) \cong D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$.

Les techniques de revêtements galoisiens ont été introduites en théorie des représentations des algèbres et développés par P. Gabriel, K. Bongartz, C. Riedtmann, E. Green, J. A. de la Peña, R. Martinez-Villa et al., et ont été un outil important pour étudier la catégorie des modules d'une algèbre. Cette théorie réduit les problèmes de la catégorie des modules d'une algèbre $\Lambda$ à ceux d'une catégorie $\mathscr{C}$ avec une action d'un groupe $G$ telle que $\Lambda$ soit équivalente à la catégorie orbitale $\mathscr{C}/G$, qui est plus facile à traiter et mieux comprise. Un des résultats les plus importants de cette théorie a été prouvé par Gabriel [25] qui

affirme que si $\mathscr{C}$ est une catégorie localement bornée avec une action libre d'un groupe $G$ sur ind$\mathscr{C}$, alors $\mathscr{C}$ est localement de représentation-finie si et seulement si $\mathscr{C}/G$ est aussi localement de représentation-finie. Asashiba a transmis ce point de vue aux problèmes des équivalences dérivées des algèbres [1, 2].
D'autre part, Bautista et Liu [6, 7], ont étudié le revêtement galoisien sur les catégories linéaires générales. Plus précisément, ils ont étudié, quand un revêtement galoisien de catégories linéaires localement bornées induit un revêtement galoisien de catégories dérivées bornées de modules de dimension finie et infinie. Comme application de ce résultat, pour une catégorie $\mathscr{C}$ élémentaire localement bornée de radical carré nul, ils ont donné une description complète des objets indécomposables et de la théorie de Auslander-Reiten de ses catégories dérivées bornées.
Notre objectif dans la deuxième partie de cette thèse est de continuer sur la même voie, et d'étudier les catégories singulières de plusieurs algèbres, notamment, les algèbres de radical carré nul, les algèbres aimables et plus généralement, les algèbres monomiales quadratiques. Pour aboutir à ces résultats, on utilisera les techniques de revêtement galoisien introduites par Bongartz-Gabriel [11], et généralisées récemment par Bautista-Liu [6, 7] et indépendemment par Asashiba [1, 2], Asashiba-Hafezi-Vahed [3] aux catégories dérivées et singulières. Rappelons que lorsque $Q$ est un carquois fini, Xiao-Wu Chen [17], (voir aussi les travaux de Smith [53]) ont obtenu une description de $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$ à travers une équivalence de catégories triangulées. Notre approche est complètement différente de cette dernière et est plus générale, c-à-d, elle fonctionne pour les algèbres de dimension finie ou infinie. On verra que par un simple calcul sur le carquois de $\mathscr{C}$ on peut trouver une liste complète des objets de $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$ à isomorphisme près. De plus, on obtiendra des nouvelles descriptions de $D^b_{sg}(A)$ des algèbres aimables de dimension finie (comparer avec [30]) et plus généralement des algèbres monomiales quadratiques de dimension finie (comparer avec [18]).

Plus précisément, on a le théorème suivant qui nous donne des descriptions complètes et explicites.

**Théorème [13]**. Considérons l'algèbre $kQ/(kQ^+)^2$, et soient $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ deux groupes engendrés par les automorphismes $\rho[-r_Q]$ et $\rho^{-1}[r_Q]$, respectivement. Alors le revêtement graduable minimal $\tilde{Q}^{op} \to Q$ induit les équivalences suivantes :

i. $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2) \cong D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}$.

ii. $D_{sg}^{+,b}(\mathrm{inj}kQ/(kQ^{+})^{2}) \cong D^{b}(\mathrm{rep}^{+,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{H}$.

Maintenant considérons une algèbre $\Lambda$ de dimension finie. Grâce à notre théorème et au théorème de Chen [18] , on a obtenu des nouvelles descriptions :

**Théorème [13]**. Soit $\Lambda$ une algèbre monomiale quadratique de dimension finie. Alors,

i. $D_{sg}^{b}(\mathrm{mod}^{b}\Lambda) \cong \prod_{i=1}^{n} D^{b}(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}_{i}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}_{i}$.

ii. $D_{sg}^{+,b}(\mathrm{inj}\Lambda) \cong \prod_{i=1}^{n} D^{b}(\mathrm{rep}^{+,\mathrm{b}}(\tilde{Q}_{i}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{H}_{i}$.

En particulier, si $\Lambda$ est une algèbre de Gorenstein, alors,

i. $D_{sg}^{b}(\mathrm{mod}^{b}\Lambda) \cong \prod_{i=1}^{n} D^{b}(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}((\mathbb{A}_{\infty}^{\infty})^{op}[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}_{i}$.

ii. $D_{sg}^{+,b}(\mathrm{inj}\Lambda) \cong \prod_{i=1}^{n} D^{b}(\mathrm{rep}^{+,\mathrm{b}}((\mathbb{A}_{\infty}^{\infty})^{op}[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{H}_{i}$.

# CHAPITRE 1

# Préliminaires

L'objectif de cette section est de rappeler quelques notions de base et de rassembler certains résultats préliminaires. Nous allons également introduire des nouvelles classes d'algèbres en théorie des représentations qui méritent d'être étudiées à l'avenir. La terminologie et les notations introduites dans cette section seront utilisées pour le reste de la thèse, [6, 7, 8, 12, 13].

## 1.1 Algèbre linéaire

Ici, on rappelera quelques notions de base d'algèbre linéaire qui nous serviront pour définir le dual d'une algèbre quadratique et un foncteur entre la catégorie des modules sur une algèbre quadratique et la catégorie des complexes sur son dual quadratique.

Soit $k$ un corps commutatif. Tous les produits tensoriels sont sur $k$. Soit $\operatorname{Mod} k$ la catégorie des espaces vectoriels, et $\operatorname{mod} k$ la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie. On va presque toujours utiliser le foncteur contravariant exact $D = \operatorname{Hom}_k(-, k) : \operatorname{Mod} k \to \operatorname{Mod} k$. Le $k$-espace vectoriel engendré par l'ensemble $S$ est noté $k\,S$.

**Lemme 1.1.1.** *Si $U, V \in \operatorname{mod} k$ et $M, N \in \operatorname{Mod} k$, alors on a un $k$-isomorphisme*

$$\varphi : \operatorname{Hom}_k(U, V) \otimes \operatorname{Hom}_k(M, N) \to \operatorname{Hom}_k(U \otimes M, V \otimes N) : f \otimes g \mapsto \varphi(f \otimes g)$$

*tel que* $\varphi(f \otimes g)(u \otimes m) = f(u) \otimes g(m)$ *pour tout* $u \in U$ *et* $m \in M$.

Remarque. Dans la suite, on va identifier l'application $\varphi(f \otimes g)$ définie dans le lemme 1.1.1 avec $f \otimes g$.

**Corollaire 1.1.2.** *Soient* $U, V$ *des* $k$*-espaces vectoriels.*

*i. Soit* $U \in \operatorname{mod} k$*, alors on obtient un* $k$*-isomorphisme naturel*

$$\theta : \operatorname{Hom}_k(U, k) \otimes V \to \operatorname{Hom}_k(U, V) : f \otimes v \mapsto \theta(f \otimes v)$$

*tel que* $\theta(f \otimes v)(u) = f(u)v$*, pour tout* $u \in U$ *et* $v \in V$.

*ii. Si* $U, V \in \operatorname{mod} k$*, alors on obtient un* $k$*-isomorphisme*

$$\varphi : DU \otimes DV \to D(V \otimes U) : f \otimes g \mapsto \varphi(f \otimes g),$$

*où* $\varphi(f \otimes g)(v \otimes u) = g(v)f(u)$*, pour tout* $u \in U$ *et* $v \in V$.

**Lemme 1.1.3.** *Soient* $f : U \to M$ *et* $g : N \to V$ *deux morphismes dans* $\operatorname{mod} k$*. On obtient un diagramme commutatif avec des isomorphismes verticaux*

$$\begin{tikzcd}
U \otimes DV \arrow[r, "f \otimes Dg"] \arrow[d, "\theta_{U,V}"'] & M \otimes DN \arrow[d, "\theta_{M,N}"] \\
D(V \otimes DU) \arrow[r, "D(g \otimes Df)"] & D(N \otimes DM).
\end{tikzcd}$$

*Démonstration.* Composons l'isomorphisme $U \otimes DV \to D^2U \otimes DV$, induit de l'isomorphisme $U \to D^2U$, avec l'isomorphisme $D^2U \otimes DV \to D(V \otimes DU)$ ; voir (1.1.2), on obtient un isomorphisme $\theta_{U,V}$ tel que $\theta_{U,V}(u \otimes \zeta)(v \otimes \xi) = \zeta(v)\xi(u)$, pour tout $u \in U$, $v \in V$, $\zeta \in DV$ et $\xi \in DU$. $\square$

Soit $U \in \operatorname{Mod} k$. Étant donné un sous-espace $V$ de $U$, On va noter par $V^\perp$, l'annulateur de $V$.

**Lemme 1.1.4.** *Soit* $U \in \operatorname{mod} k$*, et considérons des sous-espaces vectoriels* $V, W$ *de* $U$.

*i. On a* $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$ *et* $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$.

*ii. Si* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *et* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *sont des bases de* $U$ *avec les bases duales* $\{u_1^\star, \ldots, u_n^\star\}$ *et* $\{v_1^\star, \ldots, v_n^\star\}$ *respectivement, alors* $\sum_{i=1}^n u_i \otimes u_i^\star = \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^\star$ *dans* $U \otimes DU$.

*Démonstration.* (1) est évidente.

(2) En vertu du corollaire 1.1.2, on obtient un isomorphisme $\theta : U \otimes \mathrm{Hom}_k(U, k) \to \mathrm{End}_k(U) : u \otimes f \to \theta(u \otimes f)$. Étant donné une base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $U$, il est facile de voir que $\theta\left(\sum_{i=1}^n u_i \otimes u_i^\star\right) = 1_U$. □

## 1.2 Carquois

*Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois localement fini, où $Q_0$ est l'ensemble des points et $Q_1$ est l'ensemble des flèches. Étant donné une flèche $\alpha : x \to y$, on écrit $x = s(\alpha)$ et $y = e(\alpha)$. Étant donné $x \in Q_0$, on a un chemin trivial $\varepsilon_x$ de longueur 0 avec $s(\varepsilon_x) = e(\varepsilon_x) = x$. Un chemin de longueur $n > 0$ est une suite $\rho = \alpha_n \cdots \alpha_1$, with $\alpha_i \in Q_1$, tel que $s(\alpha_{i+1}) = e(\alpha_i)$, pour $i = 1, \ldots, n-1$ ; et dans ce cas, on écrit $s(\rho) = s(\alpha_1)$ and $t(\rho) = t(\alpha_n)$, et on l'appelle $\alpha_n$ la flèche terminale de $\rho$.*

*Soient $x, y \in Q_0$ and $n \geq 0$. On écrit $Q(x, y)$ pour l'ensemble des chemins de $x$ à $y$, et $Q_n$ pour l'ensemble des chemins de $Q$ de longueur $n$. Soit $Q_{\leq n}(x, y)$ le sous-ensemble de $Q(x, y)$ des chemins de longueur $\leq n$, et posons $Q_n(x, y) = Q_n \cap Q(x, y)$. De plus, $Q_n(x, -) = \cup_{z \in Q_0} Q_n(x, z)$, $Q_n(-, x) = \cup_{z \in Q_0} Q_n(z, x)$ and $Q_{\leq n}(x, -) = \cup_{z \in Q_0} Q_{\leq n}(x, z)$.*

*Si $x \in Q_0$, alors on note $x^-$ l'ensemble des flèches de but $x$ et $x^+$ l'ensemble des flèches de source $x$. Alors $Q$ est dit localement fini si les deux ensembles $x^-$ et $x^+$ sont finis. Un carquois $Q$ est dit fortement localement fini, si il est localement fini et pour tous $x, y \in Q_0$, $Q(x, y)$ est fini ; voir [8].*

*Le carquois opposé de $Q$ est le carquois $Q^{\mathrm{o}}$ défini par $(Q^{\mathrm{o}})_0 = Q_0$ et $(Q^{\mathrm{o}})_1 = \{\alpha^{\mathrm{o}} : y \to x \mid \alpha : x \to y \in Q_1\}$. Un chemin non trivial $\rho = \alpha_n \cdots \alpha_1$ dans $Q(x, y)$, où $\alpha_i \in Q_1$, correspond à un chemin $\rho^{\mathrm{o}} = \alpha_1^{\mathrm{o}} \cdots \alpha_n^{\mathrm{o}}$ dans $Q^{\mathrm{o}}(y, x)$. De plus, le chemin trivial dans $Q$ au point $x$ sera identifié avec celui dans $Q^{\mathrm{o}}$ au point $x$.*

### Carquois graduable

*Pour une marche $w$ dans un carquois $Q$, on définit son degré $\partial(w)$ de la façon suivante : Si $w$ est un chemin trivial, une flèche, ou l'inverse d'une flèche, alors $\partial(w) = 0, 1,$ ou $-1$, respectivement, et cette définition peut être étendue à toute marche par $\partial(uv) = \partial(u) + \partial(v)$. En particulier, le degré d'un chemin* *est égal à sa longueur.*

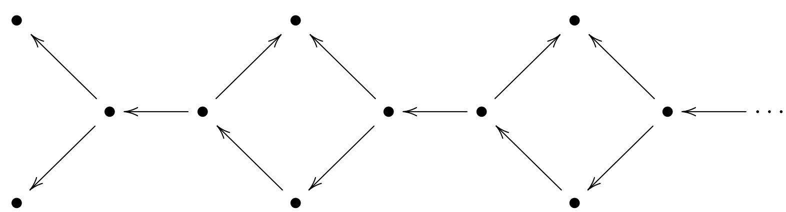
**Définition 1.2.1.** *Un carquois $Q$ est dit graduable si ses marches fermée ont toutes des degrés nuls.*

Remarque. Un carquois graduable ne contient pas de cycle orienté.

(2) Si $Q$ est graduable alors, pour tous points $a, b$, les marches de $a$ à $b$ ont le même degré noté $d(a, b)$.

**Example 1.2.2.** (1) $\mathbb{A}_\infty^\infty$ *est graduable.*

(2) *Le carquois suivant est clairement non graduable.*



Supposons que $Q$ est un carquois graduable. Soit $a \in Q_0$, on peut trouver une graduation à $Q$ comme suit. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, notons $Q^{(a,i)}$ l'ensemble des points $x$ tels que $d(a, x) = i$. De cette façons, toute flèche dans $Q$ est de la forme $x \to y$ avec $x \in Q^{(a,i)}$ et $y \in Q^{(a,i+1)}$ pour un $i$. De plus, si $b \in Q_0$, alors $Q^{(b,i)} = Q^{(a,i+d(a,b))}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Soit $Q$ un carquois localement fini, on définit un nouveau carquois $Q^\mathbb{Z}$ comme suit : les points sont les paires $(a, i)$ avec $a \in Q_0$ et $i \in \mathbb{Z}$, et les flèches sont $(\alpha, i) : (a, i) \to (b, i+1)$, où $i \in \mathbb{Z}$ et $\alpha : a \to b$ est une flèche dans $Q$. Comme prouvé ci-dessus, $Q^\mathbb{Z}$ est graduable.

## 1.3 Algèbres des chemins

Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois localement fini. On note $kQ$ l'algèbre des chemins de $Q$ sur $k$. Soit $R$ un idéal dans $kQ$. Soient $x, y \in Q_0$, on pose $R(x, y) = R \cap kQ(x, y)$ et $R_n(x, y) = R \cap kQ_n(x, y)$ pour tout $n \geq 0$. Un élément $\rho \in R(x, y)$ est dit une *relation* dans $R$ de $x$ à $y$. Une telle relation $\rho$ est dite *quadratique* si $\rho \in kQ_2(x, y)$; *homogène* si $\rho \in kQ_n(x, y)$ pour un $n \geq 2$; *monomiale* si $\rho \in Q(x, y)$ ; et *primitive ou minimale* si $\rho = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \rho_i$, avec $\lambda_i \in k$ et $\rho_i \in Q(x, y)$, tel que $\sum_{i \in \Sigma} \lambda_i \rho_i \notin R$ pour tout $\Sigma \subset \{1, \ldots, s\}$. On va dire que $R$ est *quadratique* (*homogène*, *monomiale*, respectivement) si il est engendré par un ensemble de relations quadratiques ( homogènes, monomiales, respectivement). Un *ensemble de générateurs minimaux* de $R$ est un ensemble $\Omega$ de relations primitives dans $R$ tel que $R$ est engendré par $\Omega$ mais pas par un sous-ensemble propre de $\Omega$, et dans ce cas, on pose $\Omega(x,y) = \Omega \cap kQ(x,y)$ et $\Omega(x,-) = \cup_{z \in Q_0} \Omega(x,z)$.

**Lemme 1.3.1.** *Soit $R$ un idéal homogène dans $kQ$ avec un ensemble de générateurs minimaux $\Omega$. Les classes des $\rho$ modulo $(kQ^+)R + R(kQ^+)$, avec $\rho \in \Omega$, sont $k$-linéairement indépendantes.*

*Démonstration.* Soient $\rho_1, \ldots, \rho_r \in \Omega(x,y)$, avec $x, y \in Q_0$, tels que $\lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_r\rho_r$ appartient à $(kQ^+)R + R(kQ^+)$, où certains $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ sont non nulles, on peut supposer que toutes les $\lambda_j$ non nulles valent -1. On a $\rho_1 = \rho_2 + \cdots + \rho_r$, donc on peut écrire $\rho_1 = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i \rho_1 \delta_i + \sum_{j=1}^{t} \xi_j \sigma_j \zeta_j$, où $\sigma_1, \ldots, \sigma_q \in \Omega \backslash \{\rho_1\}$, et $\gamma_i, \delta_i, \xi_j, \zeta_j \in kQ$ sont homogènes tel que $\gamma_i$ ou $\delta_i$ est de degré positif pour tout $1 \le i \le s$. Puisque $\rho_1$ et $\sigma_j$ sont homogènes, $\rho_1 = \sum_{j \in \Theta} \xi_j \sigma_j \zeta_j$, où $\Theta$ est l'ensemble des indices $j$ tels que $\xi_j \sigma_j \zeta_j$ et $\rho_1$ sont de même degré, contradiction. $\square$

Dans la suite, l'idéal $R$ est dit *faiblement admissible* si $R \subseteq (kQ^+)^2$, où $kQ^+$ est l'idéal dans $kQ$ engendré par les flèches. Un idéal faiblement admissible $R$ est dit *localement admissible* si, pour tout $(x,y) \in Q_0 \times Q_0$, il existe $n_{xy} > 0$ tel que $kQ_n(x,y) \subseteq R$ pour tout $n \ge n_{xy}$ ; *à droite* (respectivement, *à gauche*) *admissible* si, pour tout $x \in Q_0$, il existe $n_x > 0$ tel que $kQ_n(x,-) \subseteq R$ (respectivement $kQ_n(-,x) \subseteq R$) pour tout $n \ge n_x$ ; et *admissible* si il est admissible à droite et à gauche ; comparer avec [11, (2.1)].

L'algèbre opposée de $kQ$ est l'algèbre des chemins $kQ^{\text{o}}$. Soit $\gamma = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \rho_i \in kQ$, où $\lambda_i \in k$ et $\rho_i$ sont des chemins, on va noter $\gamma^{\text{o}} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \rho_i^{\text{o}}$. Cela donne un anti-isomorphisme d'algèbres $kQ \to kQ^{\text{o}} : \gamma \mapsto \gamma^{\text{o}}$.

## 1.4 Algèbres des carquois lié

Soir $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est localement fini et $R$ un idéal faiblement admissible dans $kQ$. Une paire $(Q,R)$ est dit un *carquois lié*. Soit $\gamma \in kQ$, On note $\bar{\gamma} = \gamma + R \in \Lambda$. Notons $e_x = \bar{\varepsilon}_x$, on obtient un ensemble complet $\{e_x \mid x \in Q_0\}$ d'idempotents primitifs orthogonaux de $\Lambda$. On va dire que $\Lambda$ is *localement de dimension finie* si $e_y \Lambda e_x$ est de dimension fini pour tout $x, y \in Q_0$ ; *fortement localement de dimension finie* si $R$ est localement admissible ; *à droite* (respectivement, *à gauche*) *localement bornée* si $R$ es admissible à droite (respectivement, admissible à gauche) ; et *localement bornée* si $R$ est admissible ; comparer avec [11, (2.1)]. Il est évident que $\Lambda$ est fortement localement de dimension finie si elle est localement bornée à gauche et à droite.

Nous noterons $J$ l'idéal dans $\Lambda$ engendré par $\bar{\alpha}$ avec $\alpha \in Q_1$. On va dire que $J$ est *localement nilpotent* si, pour tout $(x, y) \in Q_0 \times Q_0$, il existe $n_{xy}$ tel que $e_y J^{n_{xy}} e_x = 0$.

**Proposition 1.4.1.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ un carquois localement fini et $R$ un idéal faiblement admissible dans $kQ$.*

(1) *Comme $k$-espace vectoriel, $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1 \oplus J^2$, où $\Lambda_0$ admet une $k$-base $\{e_x \mid x \in Q_0\}$ et $\Lambda_1$ admet une $k$-base $\{\bar{\alpha} \mid \alpha \in Q_1\}$.*

(2) *L'idéal $R$ est localement admissible si et seulement si $J$ est localement nilpotent*; *et dans ce cas, $J$ contient seulement des éléments nilpotents.*

(3) *Si $R$ est homogène, alors $\Lambda$ is localement de dimension finie si et seulement si $\Lambda$ est fortement localement de dimension finie.*

*Démonstration.* (1) est vraie car $J \subseteq (kQ^+)^2$. La première partie de (2) est évidente. Soit $u \in J$, on peut écrire $u = \sum_{i=1}^{s} u_i$, où $u_i \in e_{y_i} J e_{x_i}$ avec $x_i, y_i \in Q_0$. Si $J$ est localement nilpotent, alors il existe $n$ pour lequel $e_{y_i} J^n e_{x_i} = 0$ pour tout $1 \le i, j \le s$, et par conséquent, $u^n = 0$. Cela établit (2). Supposons que $R$ est homogène mais non localement admissible tel que $\Lambda$ est localement de dimension finie. Alors, $Q(x, y)$ pour un $x, y \in Q_0$ admet des chemins arbitraires qui ne sont pas dans $R$. Puisque $e_y \Lambda e_x$ est de dimension finie, $\lambda_1 \delta_1 + \cdots + \lambda_n \delta_n \in R(x, y)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ sont non nuls et $\delta_1, \ldots, \delta_n \in Q(x, y) \backslash R$ homogène de longueurs différentes. Puisque $R$ is homogène, $\lambda_1 \delta_1 + \cdots + \lambda_n \delta_n = \rho_1 + \cdots + \rho_s$, où $\rho_1, \ldots, \rho_s \in R(x, y)$ sont homogènes de longueurs différentes. Alors, chaque $\delta_i$ est une somme d'un unique $\rho_j$, disons $\rho_i$. Cela entraîne que $\sum_{i=1}^{n} (\rho_i - \lambda_i \delta_i) + (\sum_{j>n} \rho_j) = 0$, et $\lambda_i \delta_i = \rho_i$ for $i = 1, \ldots, n$, une contradiction. □

**Exemple 1.4.2.** *(1) Si $Q$ est un carquois fortement localement fini, alors $kQ$ est fortement localement de dimension finie.*

*(2) Si $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est une boucle $\alpha$ et $R$ est engendré par $\alpha^2 = \alpha^3$, alors $\Lambda$ est localement de dimension finie, mais pas fortement localement fini.*

L'algèbre opposée de $\Lambda$ est $\Lambda^{\mathrm{o}} = kQ^{\mathrm{o}}/R^{\mathrm{o}}$, où $R^{\mathrm{o}} = \{\rho^{\mathrm{o}} \mid \rho \in R\}$. Notons $\bar{\gamma}^{\mathrm{o}} = \gamma^{\mathrm{o}} + R^{\mathrm{o}}$ si $\gamma \in kQ$, on obtient un anti-isomorphisme $\Lambda \to \Lambda^{\mathrm{o}} : \bar{\gamma} \to \bar{\gamma}^{\mathrm{o}}$. Pour simplifier les choses, $\varepsilon_a + R^{\mathrm{o}}$ sera noté $e_a$ pour tout $a \in Q_0$.

Soit $Q$ un carquois fini. L'algèbre $kQ/I$ est dite monomiale quadratique, si l'idéal admissible $I$ est engendré par des chemins de longueur deux.

Une classe importante d'algèbres monomiales quadratiques est la classe d'algèbres aimables, introduite par Assem et Skowronski [5]. Plus précisément, l'algèbre $kQ/I$ est dite aimable, si les propriétés suivantes sont vérifiées :

i. Pour chaque sommet $x \in Q_0$, il y a au plus deux flèches de source $x$, et au plus deux flèches de but $x$.

ii. $I$ est un idéal engendré par des chemins de longueur deux.

iii. Pour chaque flèche $\beta \in Q_1$, il existe au plus une flèche $\alpha \in Q_1$ telle que $\alpha\beta \in I$ et au plus une flèche $\gamma \in Q_1$ telle que $\beta\gamma \in I$.

iv. Pour chaque flèche $\beta \in Q_1$, il existe une flèche $\alpha \in Q_1$ telle que $\alpha\beta \notin I$ et au plus une flèche $\gamma \in Q_1$ telle que $\beta\gamma \notin I$.

# CHAPITRE 2

# Représentations et modules

L'objectif de cette section est d'étudier les modules sur une algèbre définie par un carquois localement fini avec des relations. La plupart des résultats sont des généralisations de certains résultats classiques des modules sur des catégories localement bornées, voir [11, 28] ou pour des représentations d'un carquois fortement localement fini ; voir [8]. Nous étudierons d'abord les $J$-couvertures projectives dans un cas plus général, puis nous examinerons les enveloppes injectives dans le cas localement de dimension finie et nous discuterons enfin les $n$-résolutions projectives dans le cas gradué. En particulier, nous montrerons qu'une algèbre graduée est quadratique si et seulement si chaque module simple admet une 2-résolution projective linéaire. Ceci généralise un résultat bien connu selon lequel une algèbre de Koszul est quadratique ; voir [10].

## 2.1 Représentations de carquois

*Soit $k$ un corps et $Q$ un carquois fortement localement fini. Une représentation $M$ de $Q$ sur $k$, ou simplement une $k$-représentation, est la donnée d'une famille de $k$-espaces vectoriels $M(x)$ avec $x \in Q_0$, et une famille d'applications $k$-linéaires $M(\alpha) : M(x) \to M(y)$ avec $\alpha : x \to y$ dans $Q_1$. Rappelons qu'un morphisme $f : M \to N$ de $k$-représentations de $Q$ est la donnée d'une famille d'applications $k$-linéaires $f(x) : M(x) \to N(x)$ avec $x \in Q_0$ telles aue $f(y)M(\alpha) = N(\alpha)f(x)$, pour toute flèche*

$\alpha : x \to y$. *Soit* $M$ *une* $k$*-représentation de* $Q$. *Le* socle *de* $M$, $\mathrm{soc}M$, *est la sous-représentation de* $M$ *tel que* $(\mathrm{soc}M)(x)$, *pour tout* $x \in Q_0$, *est l'intersection de tous les noyaux des applications linéaires* $M(\alpha)$ *avec* $\alpha \in x^+$ *; le* radical *de* $M$, $\mathrm{rad}M$, *est la sous-représentation de* $M$ *tel que* $(\mathrm{rad}M)(x)$, *pour tout* $x \in Q_0$, *est la somme des images des applications linaires* $M(\beta)$ *avec* $\beta \in x^-$. *Le* support *d'une représentation* $M$, $\mathrm{supp}M$, *est le sous-carquois plein de* $Q$ *engendré par les points* $x$ *tels que* $M(x) \neq 0$. *On va dire que* $M$ *est de support fini si* $\mathrm{supp}M$ *est fini. Finalement,* $M$ *est dit* localement de dimension finie *si* $M(x)$ *est de dimension finie pour tout* $x \in Q_0$ *; et* de dimension finie *si* $\sum_{x\in Q_0} \mathrm{dim}M(x)$ *est finie. On note* $\mathrm{Rep}(Q)$ *la catégorie abélienne de toutes les* $k$*-représentations de* $Q$*, qui est héréditaire, c-à-d, le foncteur* $\mathrm{Ext}^2(-,-)$ *est nul. De plus,* $\mathrm{rep}(Q)$ *et* $\mathrm{rep}^b(Q)$ *sont les sous-catégories pleines de* $\mathrm{Rep}(Q)$ *engendrées par les représentations localement de dimension finie, et par les représentation de dimension finie, respectivement. Les représentations suivantes joueront un rôle essentiel dans cette thèse. Soit* $a \in Q_0$. *La représentation simple* $S_a$ *en* $a$ *est définie par* $S_a(a) = k\,\varepsilon_a$ *et* $S_a(x) = 0$ *pour tout point* $x \neq a$. *Notons* $\mathcal{P}_a$ *la* $k$*-représentation projective telle que* $\mathcal{P}_a(x)$, *pour tout* $x \in Q_0$, *est le* $k$*-espace vectoriel engendré par* $Q(a,x)$ *; et* $\mathcal{P}_a(\alpha) : \mathcal{P}_a(x) \to \mathcal{P}_a(y)$, *pour* $\alpha : x \to y \in Q_1$, *est l'application* $k$*-linéaire qui envoie le chemin* $\rho$ *à* $\alpha\rho$. *Finalement,* $\mathcal{I}_a$ *est la* $k$*-représentation injective telle que* $\mathcal{I}_a(x)$, *pour* $x \in Q_0$, *est le* $k$*-espace vectoriel engendré par* $Q(x,a)$ *; et* $\mathcal{I}_a(\alpha) : \mathcal{I}_a(x) \to \mathcal{I}_a(y)$, *for* $\alpha : x \to y \in Q_1$, *est l'application* $k$*-linéaire qui envoie* $\rho\alpha$ *à* $\rho$ *et nulle sur les chemins qui ne se factorise pas à travers* $\alpha$. *Puisque* $Q$ *est fortement localement fini, les représentations* $\mathcal{P}_a, \mathcal{I}_a$ *sont localement de dimension finies. De plus,* $\mathcal{P}_a$ *et* $\mathcal{I}_a$ *sont indécomposables. Notons* $\mathrm{inj}\,(Q)$ *et* $\mathrm{proj}\,(Q)$ *les sous-catégories additives pleines engendrées par les représentations* $\mathcal{I}_a$, *et par* $\mathcal{P}_a$, *respectivement.*

**Définition 2.1.1.** *Soit* $M$ *un objet dans* $\mathrm{rep}(Q)$. *On dit que* $M$ *est* de coprésentation finie *si il admet une co-resolution injective*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{I}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_1 \longrightarrow 0$$

$\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1 \in \mathrm{inj}(Q)$. *Dualement,* $M$ *est dit présentation finie si il admet une résolution projective*

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

*avec* $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_0 \in \mathrm{proj}(Q)$.

Notons $\text{rep}^{+,b}(Q)$ et $\text{rep}^{-,b}(Q)$ les sous-catégories pleines de $\text{rep}(Q)$ engendrés par les représentations de coprésentation finie et de présentation finie, respectivement.

**Proposition 2.1.2.** *Les catégories* $\text{rep}^{+,b}(Q)$ *et* $\text{rep}^{-,b}(Q)$ *sont abéliennes, héréditaires, et de Krull-Schmidt dans* $\text{rep}(Q)$.

## 2.2 Catégorie des modules

Tout au long de cette section, on va considérer l'algèbre $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ est un idéal faiblement admissible dans $kQ$. Soit $M$ un $\Lambda$-module à gauche. Le module $M$ est dit *unitaire* si $M = \sum_{x \in Q_0} e_x M$ et un élément $u \in M$ est dit *normalisé* si $u \in e_x M$ pour un $x \in Q_0$. Nous noterons par $\text{Mod}\,\Lambda$ la catégorie des $\Lambda$-modules à gauche unitaires, et $\text{Mod}^b\Lambda$ et $\text{mod}^b\Lambda$ les sous-catégories pleines de $\text{Mod}\,\Lambda$ des modules de support fini et des modules de dimension finie, respectivement.

D'autre part, comme ci-dessus, une *représentation* $M$ d'un carquois lié $(Q, R)$ est une famille d'espaces vectoriels $M(x)$ avec $x \in Q_0$ et une famille d'applications linéaires $M(\alpha) : M(x) \to M(y)$ avec $\alpha : x \to y \in Q_1$, telles que $M(\rho) = 0$ pour toute relation $\rho \in R(x, y)$ avec $x, y \in Q_0$. Ici, $M(\gamma) = \sum_i \lambda_i M(\alpha_{i,m_i}) \circ \cdots \circ M(\alpha_{i,1})$ pour chaque $\gamma = \sum_i \lambda_i \alpha_{i,m_i} \cdots \alpha_{i,1} \in kQ(x, y)$ avec $\lambda_i \in k$ et $\alpha_{ij} \in Q_1$. En particulier, on va écrire $M(\bar{\gamma}) = M(\gamma)$, où $\bar{\gamma} = \gamma + R \in \Lambda$. Nous noterons $\text{Rep}(Q, R)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}(Q)$ des représentations de $(Q, R)$. Il est bien connu que nous pouvons considérer un module $M \in \text{Mod}\,\Lambda$ comme une représentation $M \in \text{Rep}(Q, R)$ de telle sorte que $M(x) = e_x M$ pour $x \in Q_0$, et $M(\alpha) : M(x) \to M(y)$ avec $\alpha \in Q_1(x, y)$ est donnée par la multiplication à gauche par $\bar{\alpha}$. Et on peut considérer un morphisme $f : M \to N$ dans $\text{Mod}\,\Lambda$ comme un morphisme $(f(x))_{x \in Q_0} : M \to N$ dans $\text{Rep}(Q, R)$, où $f(x) : M(x) \to N(x)$ est obtenue par restriction à partir de $f$. Étant donné un $a \in Q_0$, on obtient le module projectif $P_a = \Lambda e_a$ dans $\text{Mod}\,\Lambda$ et le module simple $S_a = \Lambda e_a / J e_a$. Considéré comme une représentation, $P_a(x) = e_x \Lambda e_a$ pour $x \in Q_0$, et $P_a(\alpha) : P_a(x) \to P_a(y)$ avec $\alpha \in Q_1(x, y)$ est multiplication à gauche par $\bar{\alpha}$. Nous noterons $\text{Proj}\,\Lambda$ la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}\,\Lambda$ engendrée par les modules isomorphes à $P_x \otimes V$ avec $x \in Q_0$ et $V \in \text{Mod}\,k$, et $\text{proj}\,\Lambda$ celle engendrée par les modules qui sont isomorphes à $P_x$ avec $x \in Q_0$.

**Lemme 2.2.1.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre fortement localement de dimension finie.*

(1) *Si $a \in Q_0$, alors $JP_a$ est le plus grand sous-module propre de $P_a$.*

(2) *Si $P \in \mathrm{Proj}\Lambda$, alors $JP$ est le radical de Jacobson $P$.*

*Démonstration.* Soit $M$ un sous-module de $P_a$ qui n'est pas contenu dans $JP_a$, pour un $a \in Q_0$. Alors, $e_a - u \in M$ pour un $u \in JP_a$. En vertu du lemme 1.4.1(2), $u^n = 0$ pour un $n \geq 2$. Puisque $ue_a = u$, on a $(e_a + e_a u + \cdots + e_a u^{n-1})(e_a - u) = e_a \in M$. Donc, $M = P_a$. (2) vient de (1).

□

Remarque. En vertu du lemme 2.2.1(1), $P_a$ est indécomposable dans le cas où $\Lambda$ est fortement localement de dimension finie. Par contre, cela n'est pas vrai même si $\Lambda$ est localement de dimension finie, Par exemple, si $\Lambda$ est donnée par une boucle $\alpha$ avec une relation $\alpha^2 = \alpha^3$.
On va étudier les morphismes entre les modules dans $\mathrm{Proj}\Lambda$. Soit $\gamma \in kQ(x, y)$ dans $x, y \in Q_0$, la multiplication à gauche $\bar{\gamma}$ donne une application linéaire $P_a(\bar{\gamma}) : P_a(y) \to P_a(x)$ pour chaque $a \in Q_0$, tandis que la multiplication à droite par $\bar{\gamma}$ donne un morphisme $\Lambda$-linéaire $P[\bar{\gamma}] : P_y \to P_x$.

**Lemme 2.2.2.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un idéal faiblement admissible. Considérons $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$ et $V \in \mathrm{Mod}\, k$. Soient $a, b \in Q_0$, on obtient*

(1) *un isomorphisme $k$-linéaire $\mathcal{P}_{a,b} : e_b \Lambda e_a \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P_b, P_a) : u \mapsto P[u]$;*

(2) *un isomorphisme $k$-linéaire $\mathcal{M}_a : \mathrm{Hom}_\Lambda(P_a, M) \to e_a M : f \mapsto f(e_a)$;*

(3) *un isomorphisme $k$-linéaire $\psi_M : \mathrm{Hom}_\Lambda(P_a \otimes V, M) \to \mathrm{Hom}_k(V, e_a M) : f \mapsto g$, avec $g(v) = f(e_a \otimes v)$ ;*

(4) *une application $k$-linéaire $\mathcal{M}_{a,b} : e_b \Lambda e_a \to \mathrm{Hom}_k(e_a M, e_b M) : u \mapsto M(u)$, où $M(u)$ est la multiplication à gauche par $u$.*

Dans le cas où $\Lambda$ est localement de dimension finie, le lemme suivant décrit tous les morphismes dans $\mathrm{Proj}\Lambda$ ; comparer avec [6, (7.6)].

**Lemme 2.2.3.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre localement de dimension finie. Soient $a, b \in Q_0$ et $V, W \in \mathrm{Mod}\, k$, tout morphisme $\Lambda$-linéaire $f : P_a \otimes V \to P_b \otimes W$ est uniquement écrit comme $f = \sum P[u] \otimes f_u$, où $u$ est dans $e_a \Lambda e_b$, et $f_u \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$.*

*Démonstration.* Soit $f : P_a \otimes V \to P_b \otimes W$ un morphisme $\Lambda$-linéaire. Alors, $f(e_a \otimes V) \subset e_a \Lambda e_b \otimes W$. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base finie de $e_a \Lambda e_b$. Si $v \in V$, alors $f(e_a \otimes v) = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes w_i$, pour des vecteurs uniques $w_1, \ldots, w_n \in W$. Cela donne une application $k$-linéaire $f_i : V \to W : v \mapsto w_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Maintenant si $p \in P_a$, alors $f(p \otimes v) = pf(e_a \otimes v) = \sum_{i=1}^{n} pu_i \otimes w_i$, On voit que $f = \sum_{i=1}^{n} P[u_i] \otimes f_i$, et cette expression est unique.

□

Soit $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$, un épimorphisme $d : P \to M$ avec $P \in \mathrm{Proj}\,\Lambda$ est dit une *$J$-couverture projective* de $M$ si $\mathrm{Ker}(d) \subseteq JP$. Par exemple, pour $a \in Q_0$, la projection canonique $d_a : P_a \to S_a$ est une $J$-couverture projective de $S_a$. En général, nous posons $T(M) = M/JM$, dit *$J$-coiffe* de $M$. Un ensemble générateur $\{u_1, \ldots, u_s\}$ de $M$ est dit une *base $J$-coiffe* si $\{u_1 + JM, \ldots, u_s + JM\}$ est un base de $T(M)$, et une telle base $J$-coiffe est *normalisée* si $u_1, \ldots, u_s$ sont normalisés. Le résultat suivant est bien connu ; voir [36, (1.1)].

**Lemme 2.2.4.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est localement fini et $R$ un idéal faiblement admissible. Un module $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$ admet une base $J$-coiffe $\{u_1, \ldots, u_s\}$ avec $u_i \in e_{a_i}M$ si et seulement si il admet une $J$-couverture projective $d : P_{a_1} \oplus \cdots \oplus P_{a_s} \to M$ avec $d(e_{a_i}) = u_i$, où $a_1, \ldots, a_s \in Q_0$.*

Étant donné un module $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$, Nous appellerons une suite exacte

$$P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} P^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^{0} \xrightarrow{d^{0}} M \longrightarrow 0$$

une *$n$-résolution projective $J$-minimale* de $M$ sur $\mathrm{proj}\,\Lambda$ si $P_i \in \mathrm{proj}\,\Lambda$ et $d^{-i}$ est une co-restriction à une $J$-couverture projective de $\mathrm{Im}(d^{-i})$, pour $i = 0, \ldots, n$. Le corollaire suivant est bien connu dans le cas où $Q$ est fini ; comparer avec [26, (2.5)].

**Corollaire 2.2.5.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un idéal faiblement admissible dans $kQ$. Soit $a \in Q_0$ avec $Q_1(a, -) = \{\alpha_i : a \to b_i \mid i = 1, \ldots, r\}$. Alors $S_a$ admet une* 1*-resolution projective $J$-minimale*

$$P_{b_1} \oplus \cdots \oplus P_{b_r} \xrightarrow{(P[\bar{\alpha}_1], \cdots, P[\bar{\alpha}_r])} P_a \xrightarrow{d_a} S_a \longrightarrow 0.$$

*Démonstration.* En effet, $\mathrm{Ker}(d_a) = JP_a$, admet une base $J$-coiffe $\{\bar{\alpha}_1, \cdots, \bar{\alpha}_r\}$. Considérant l'inclusion $j : JP_a \to P_a$. En vertu du lemme 2.2.4, on obtient une $J$-couverture $d : P_{b_1} \oplus \cdots \oplus P_{b_r} \to JP_a$ tel que$(P[\bar{\alpha}_1], \cdots, P[\bar{\alpha}_r]) = j \circ d$.

□

Nous définirons un foncteur exact $D : \mathrm{Mod}\varLambda \to \mathrm{Mod}\varLambda^{\mathrm{o}}$, afin de définir des modules injectifs. Il est plus pratique d'identifier les modules unitaires à des représentations. Soit un module $M \in \mathrm{Mod}\varLambda$, on définit un module $DM \in \mathrm{Mod}\varLambda^{\mathrm{o}}$ par $(DM)(x) = \mathrm{Hom}_k(M(x), k)$ pour $x \in Q_0$, et $(DM)(\alpha^{\mathrm{o}}) = \mathrm{Hom}_k(M(\alpha), k)$ pour $\alpha \in Q_1$. Soit un morphisme $f : M \to N$, on définit un morphisme $Df : DN \to DM$ par $(Df)(x) = \mathrm{Hom}_k(f(x), k) : (DN)(x) \to (DM)(x)$ pour $x \in Q_0$.

Soient $a \in Q_0$, $P_a^{\mathrm{o}} = \varLambda^{\mathrm{o}} e_a \in \mathrm{Mod}\varLambda^{\mathrm{o}}$ et $I_a = DP_a^{\mathrm{o}} \in \mathrm{Mod}\varLambda$. Plus explicitement, $I_a(x) = \mathrm{Hom}_k(e_x \varLambda^{\mathrm{o}} e_a, k)$ pour tout $x \in Q_0$ ; et si $u \in e_y \varLambda e_x$ et $f \in I_a(x)$, alors $uf \in I_a(y)$ tel que $(uf)(v^{\mathrm{o}}) = f(u^{\mathrm{o}} v^{\mathrm{o}})$, pour tout $v \in e_a \varLambda e_y$. En général, $I_a$ n'est ni indécomposable ni injectif dans $\mathrm{Mod}\varLambda$. Par abus de notation, nous noterons par $\mathrm{Inj}\varLambda$ la sous-catégorie additive pleine de $\mathrm{Mod}\varLambda$ engendrée par les modules isomorphes à $I_x \otimes V$, où $x \in Q_0$ et $V \in \mathrm{Mod}\, k$, et par $\mathrm{inj}\varLambda$ celle engendrée par les modules isomorphes à $I_x$ avec $x \in Q_0$. Si $\varLambda$ est localement de dimesion finie, la proprosition suivante nous dit que $I_a \otimes V$ est en effet injectif dans $\mathrm{Mod}\varLambda$ pour tout espace vectoriel $V$ ; comparer avec [8, (1.3)].

**Proposition 2.2.6.** *Soit $\varLambda = kQ/R$ une algèbre localement de dimension finie. Considérons $M \in \mathrm{Mod}\varLambda$ et $V \in \mathrm{Mod}k$. Soit $a \in Q_0$, on obtient un isomorphisme $k$-linéaire*

$$\phi_{_M} : \mathrm{Hom}_\varLambda(M, I_a \otimes V) \to \mathrm{Hom}_k(e_a M, V).$$

*Démonstration.* Fixons $a \in Q_0$. Pour chaque $x \in Q_0$, puisque $e_x \varLambda^{\mathrm{o}} e_a$ est de dimension finie, on déduit du corollaire 1.1.2 un isomorphisme $k$-linéaire

$$\sigma_x : I_a(x) \otimes V = \mathrm{Hom}_k(e_x \varLambda^{\mathrm{o}} e_a, k) \otimes V \to \mathrm{Hom}_k(e_x \varLambda^{\mathrm{o}} e_a, V)$$

tel que $\sigma_x(h \otimes v)(u^{\mathrm{o}}) = h(u^{\mathrm{o}})v$, pour $h \in I_a(x)$, $v \in V$ et $u \in e_a \varLambda e_x$. De plus, on a une application $k$-linéaire $\psi_a : \mathrm{Hom}_k(e_a \varLambda^{\mathrm{o}} e_a, V) \to V : g \mapsto g(e_a)$. Observant que chaque morphisme $\varLambda$-linéaire $f : M \to$

$I_a \otimes V$ consiste en une famille d'applications $k$-linéaire $f_x : e_xM \to I_a(x) \otimes V$ avec $x \in Q_0$, on obtient une application $k$-linéaires

$$\phi_{_M} : \mathrm{Hom}_\Lambda(M, I_a \otimes V) \to \mathrm{Hom}_k(e_aM, V) : f \to \psi_a \circ \sigma_a \circ f_a.$$

Supposons que $\phi_{_M}(f) = 0$. Nous prétendons que $f = 0$. Soit $x \in Q_0$. pour tout $m \in e_xM$, on écrit $f_x(m) = \sum_{i=1}^s h_i \otimes v_i$, où $h_i \in \mathrm{Hom}_k(e_x\Lambda^{\mathrm{o}}e_a, k)$ et $v_i \in V$. Nous pouvons supposer que les $v_i$ sont $k$-linéairement indépendants. Soit $u \in e_a\Lambda e_x$, on obtient $um \in e_aM$. Puisque $f$ est $\Lambda$-linéaire, $f_a(um) = uf_x(m) = \sum_{i=1}^s (uh_i) \otimes v_i$. Donc,

$$0 = \phi_{_M}(f)(um) = \textstyle\sum_{i=1}^s \sigma_a(uh_i \otimes v_i)(e_a) = \sum_{i=1}^s (uh_i)(e_a)v_i = \sum_{i=1}^s h_i(u^{\mathrm{o}})v_i.$$

Puisque les $v_i$ sont supposés être $k$-linéairement indépendants, $h_i(u^{\mathrm{o}}) = 0$, et donc, $h_i = 0$, for $i = 1, \ldots, s$. Par conséquent, $f_x(m) = 0$.
Inversement, considérons l'application $k$-linéaire $g_a : e_aM \to V$. Soit $x \in Q_0$ et $m \in e_xM$. On obtient une application $k$-linéaire $g_x(m) : e_x\Lambda^{\mathrm{o}}e_a \to V : u^{\mathrm{o}} \to g_a(um)$, et donc, une application $k$-linéaire $f_x : e_xM \to I_a(x) \otimes V : m \mapsto \sigma_x^{-1}(g_x(m))$. Nous prétendons que cela donne un morphisme $\Lambda$-linéaire $f = (f_x)_{x \in Q_0} : M \to I_a \otimes V$. En effet, soit $w \in e_y\Lambda e_x$ and $m \in e_xM$, on obtient $\sigma_y(f_y(wm))(u^{\mathrm{o}}) = g_y(wm)(u^{\mathrm{o}}) = g_a((uw)m)$. D'autre part, nous pouvons écrire $g_x(m) = \sum_{i=1}^s \sigma_x(h_i \otimes v_i)$, pour un $h_i \in I_a(x)$ et $v_i \in V$. Maintenant, $wf_x(m) = w\sigma_x^{-1}(g_x(m)) = \sum_{i=1}^s (wh_i) \otimes v_i$. Pour tout $u \in e_a\Lambda e_y$, on voit que

$$\sigma_y(wf_x(m))(u^{\mathrm{o}}) = \textstyle\sum_{i=1}^s h_i(w^{\mathrm{o}}u^{\mathrm{o}})v_i = \sum_{i=1}^s \sigma_x(h_i \otimes v_i)((uw)^{\mathrm{o}}) = g_a((uw)m).$$

Donc, $\sigma_y(wf_x(m)) = \sigma_y(f_y(wm))$, et par conséquent, $f_y(wm)) = wf_x(m)$. Ceci établit notre deuxième affirmation. Évidemment, $\phi_{_M}(f) = g_a$.

$\square$

Nous allons maintenant décrire les morphismes dans $\mathrm{Inj}\Lambda$. Soit $u \in e_b\Lambda e_a$ avec $a, b \in Q_0$, on obtient un morphisme $\Lambda^{\mathrm{o}}$-linéaire $P[u^{\mathrm{o}}] : P_a^{\mathrm{o}} \to P_b^{\mathrm{o}}$. Appliquons le foncteur exact $D : \mathrm{Mod}\,\Lambda^{\mathrm{o}} \to \mathrm{Mod}\,\Lambda$, on obtient un foncteur $\Lambda$-linéaire $I[u] = DP[u^{\mathrm{o}}] : I_b \to I_a$ tel que $I[u](f)(v^{\mathrm{o}}) = f(v^{\mathrm{o}}u^{\mathrm{o}})$, pour tout $f \in I_a(x)$ et $v \in e_a\Lambda e_x$ avec $x \in Q_0$.

**Lemme 2.2.7.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre localement de dimension finie. Soient $a, b \in Q_0$ et $V, W \in \operatorname{Mod} k$, tout morphisme $\Lambda$-linéaire $f : I_a \otimes V \to I_b \otimes W$ est uniquement écrit comme $f = \sum I[u] \otimes f_u$, où $u$ est un élement de la base de $e_a \Lambda e_b$ et $f_u \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$.*

*Démonstration.* Fixons $a, b \in Q_0$. Puisque $e_a \Lambda e_b$ est de dimension finie, on obtient un isomorphisme $k$-linéaire $\theta_{a,b} : e_a \Lambda e_b \to \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Hom}_k(e_b \Lambda^{\mathrm{o}} e_a, k), k) : u \mapsto \theta_{a,b}(u)$, où $\theta_{a,b}(u)$ envoie $f \in I_a(u)$ to $f(u^{\mathrm{o}})$. Soit $V, W \in \operatorname{Mod} k$, on a un isomorphisme $k$-linéaire $\theta_{a,b} \otimes 1$ et un diagramme,

$$\begin{tikzcd}
e_a \Lambda e_b \otimes \operatorname{Hom}_k(V, W) \arrow[r, "\theta_{a,b} \otimes 1"] & \operatorname{Hom}_k(I_a(b), k) \otimes \operatorname{Hom}_k(V, W) \arrow[d, "\varphi"] \\
\operatorname{Hom}_\Lambda(I_a \otimes V, I_b \otimes W) \arrow[r, "\phi"] & \operatorname{Hom}_k(I_a(b) \otimes V, W),
\end{tikzcd}$$

où $\varphi$ est tel que défini dans le lemme 1.1.1, et $\phi$ comme défini dans la Proposition 2.2.6. Nous prétendons que, pour $u \in e_a \Lambda e_b$ et $h \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$, que $\phi(I[u] \otimes h) = (\varphi \circ (\theta_{a,b} \otimes 1))(u \otimes h)$. En effet, $\phi(I[u] \otimes h)$ est le composé des morphismes dans la suite (il suffit de remplacer les espaces vectoriels $M$ et $I_a \otimes V$ dans la proposition 2.2.6, par les espaces vectoriels $I_a \otimes V$ et $I_b \otimes W$, respectivement)

$$I_a(b) \otimes V \xrightarrow{I[u] \otimes h} I_b(b) \otimes W \xrightarrow{\sigma_b} \operatorname{Hom}_k(e_b \Lambda^{\mathrm{o}} e_b, W) \xrightarrow{\psi_b} W,$$

où $\sigma_b$ et $\psi_b$ sont tels que définis dans la preuve de la proposition 2.2.6. Maintenant, Soit $g \in I_a(b)$ et $v \in V$, on obtient $(\varphi(\theta_{a,b}(u) \otimes h))\,(g \otimes v) = \theta_{a,b}(u)(g)h(v) = g(u^{\mathrm{o}})h(v)$ et $\phi(I[u] \otimes h)(g \otimes v) = \sigma_b(I[u](g) \otimes h(v))(e_b) = I[u](g)(e_b)\,h(v) = g(u^{\mathrm{o}})\,h(v)$. Ceci établit ce qu'on veut. Par conséquent, on obtient un isomorphisme $k$-linéaire

$$\phi^{-1} \circ \varphi \circ (\theta_{a,b} \otimes 1) : e_a \Lambda e_b \otimes \operatorname{Hom}_k(V, W) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(I_a \otimes V, I_b \otimes W) : u \otimes h \to I[u] \otimes h.$$

□

Soit un module $M \in \operatorname{Mod} \Lambda$, nous écrirons $S(M) = \{m \in M \mid Jm = 0\}$, dit le *$J$-socle* de $M$.

**Lemme 2.2.8.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ un carquois localement fini et $R$ un idéal faiblement admissible. Si $a \in Q_0$, alors*

(1) *$S(I_a)$ admet comme base $\{e_a^\star\}$, où $e_a^\star \in I_a(a)$ avec $e_a^\star(e_a) = 1$ et $e_a^\star(e_a J^{\mathrm{o}} e_a) = 0$;*

(2) $S(I_a/S(I_a))$ *admet comme base* $\{\alpha^\star + S(I_a) \mid \alpha : x \to a \in Q_1(-,a)\}$*, où* $\alpha^\star \in I_a(x)$ *tel que* $\alpha^\star(\bar{\alpha}^{\circ}) = 1$*, et* $\alpha^\star(\bar{\gamma}^{\circ}) = 0$ *pour tout* $\gamma \in Q(x,a)$ *avec* $\gamma \neq \alpha$.

*Démonstration.* Fixons un $a \in Q_0$. Évidemment, $e_a^\star \in S(I_a)$. Si $f \in I_a(x)$ pour un $x \in Q_0$, qui n'est ni zéro ni un multiple de $e_a^\star$, alors $f(u^{\circ}) \neq 0$ pour un $u \in e_a J e_x$, c-à-d, $(u \cdot f)(e_a^\star) \neq 0$. Donc, $f \notin S(I_a)$. D'où, $S(I_a) = k e_a^\star$.

Soit $\alpha \in Q_1(x,a)$. l'existence de $\alpha^\star$ vient du Lemme 1.4.1(1). C'est évident que $\bar{\alpha} \cdot \alpha^\star = e_a^\star$. Considérons $\beta \in Q_1(x,y)$ avec $\beta \neq \alpha$. Pour $\delta \in Q(y,a)$, puisque $\delta\beta \neq \alpha$, on obtient $(\bar{\beta} \cdot \alpha^\star)(\bar{\delta}^{\circ}) = \alpha^\star(\bar{\beta}^{\circ}\bar{\delta}^{\circ}) = 0$. Donc, $\alpha^\star + S(I_a) \in S(I_a/S(I_a))$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in Q_1(x,a)$ tel que $\sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i^\star \in S(I_a)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ sont non nuls. Puisque $(\sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i^\star)(\alpha_1) = \lambda_1$, par (1), $\sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i^\star = \lambda e_a^\star$, où $\lambda \in k$ est non nul. Alors, $x = a$ et $e_a^\star(\alpha_1) = \lambda^{-1}\lambda_1 \neq 0$, une contradiction. Donc les classes $\alpha^\star + S(I_a)$, avec $\alpha \in Q_1(-,a)$, sont $k$-linéairement indépendantes dans $S(I_a/S(I_a))$.

Considérons $g + S(I_a) \in S(I_a/S(I_a))$, où $g \in I_a(x)$ pour un $x \in Q_0$. Soit $\rho \in Q(x,a)$ de longueur au moins deux. Posons $\rho = \delta\alpha$, où $\alpha : x \to y$ est une flèche et $\delta : y \to a$ un chemin non trivial. Puisque $\bar{\alpha} g \in S(I_a)$ et $\delta : y \to a$ est non trivial, on obtient $g(\bar{\rho}^{\circ}) = (\bar{\alpha} g)(\bar{\delta}^{\circ}) = 0$. Donc $g(e_x(J^{\circ})^2 e_a) = 0$. En vertu du lemme 1.4.1(1), $g = \sum_{\gamma \in Q_{\leq 1}(x,a)} g(\bar{\gamma}^{\circ})\gamma^\star$, et donc, $g + S(I_a) = \sum_{\alpha \in Q_1(x,a)} g(\bar{\alpha}^{\circ})(\alpha^\star + S(I_a))$.

□

**Corollaire 2.2.9.** *Soit* $\Lambda = kQ/R$ *fortement localement de dimension finie. Si* $a \in Q_0$*, alors* $S(I_a)$ *et* $S(I_a/S(I_a))$ *sont des socles essentiels de* $I_a$ *et* $I_a/S(I_a)$*, respectivement.*

*Démonstration.* Par la proposition 1.4.1(2), $J$ est le radical de Jacobson de $\Lambda$. Donc, le $J$-socle d'un module est le socle. Soit $h \in I_a(x) \backslash S(I_a)$, pour un $x \in Q_0$. Alors, $h(e_x J^{\circ} e_a) \neq 0$. Puisque $J^{\circ}$ est localement nilpotent, il existe un entier positif maximal $s$ tel que $h(e_x (J^{\circ})^s e_a) \neq 0$. Alors, $h(\bar{\zeta}^{\circ}) = \lambda \neq 0$, pour un $\zeta \in Q_s(x,a)$. Premièrement, $\bar{\zeta} h \in I_a(a)$ avec $(\bar{\zeta} h)(e_a) = h(\bar{\zeta}^{\circ}) = \lambda$. Par la maximalité de $s$, on voit que $(\bar{\zeta} h)(e_a J^{\circ} e_a) = 0$, et donc, $\bar{\zeta} h = \lambda e_a^\star$. Par conséquent, $S(I_a)$ est essentiel dans $I_a$.

Ensuite, posons $\zeta = \beta\xi$, où $\beta \in Q_1(b,a)$ et $\xi \in Q_{s-1}(x,b)$ pour un $b \in Q_0$. Alors, $\bar{\xi} f \in I_a(b)$ avec $(\bar{\xi} h)(\bar{\beta}^{\circ}) = h(\bar{\zeta}^{\circ}) \neq 0$. En particulier, $\bar{\xi}(h + S(I_a)) \neq 0$. Par la maximalité de $s$, $(\bar{\xi} h)(e_b (J^{\circ})^2 e_a) = 0$. D'après le lemme 1.4.1(1), on voit que $\bar{\xi}(h + S(I_a)) = \bar{\xi} h + S(I_a) = \sum_{\alpha \in Q_1(b,a)} (\bar{\xi} h)(\bar{\alpha}^{\circ}) \cdot (\alpha^\star + S(I_a))$.

Cela montre que $S(I_a/S(I_a))$ est essentiel dans $I_a/S(I_a)$. $\square$

Un ensemble $\{u_1, \ldots, u_s\}$ d'éléments normalisés d'un module $M \in \operatorname{Mod} \Lambda$ est dit une *base-socle essentielle* de $M$ si $\{u_1, \ldots, u_s\}$ est une base de $S(M)$, tandis que $S(M)$ est essentiel dans $M$. Le lemme suivant est bien connu si $\Lambda$ est une algèbre de dimension finie.

**Lemme 2.2.10.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre fortement localement de dimension finie. Un module $M \in \operatorname{Mod}\Lambda$ admet une base-socle essentielle $\{u_1, \ldots, u_s\}$ avec $u_i \in e_{a_i}M$ si et seulement si $M$ admet une enveloppe injective $j : M \to I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_s}$ with $j(u_i) = e^{\star}_{a_i}$, où $a_1, \ldots, a_s \in Q_0$.*

**Corollaire 2.2.11.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre fortement localement de dimension finie. Si $a \in Q_0$ avec $Q_1(-, a) = \{\beta_i : b_i \to a \mid i = 1, \ldots, s\}$, alors*

$$0 \longrightarrow S_a \xrightarrow{j_a} I_a \xrightarrow{\left(I[\bar{\beta}_1], \ldots, I[\bar{\beta}_s]\right)^t} I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_s},$$

*est une co-présentation minimale injective de $S_a$, où $j_a$ envoie $e_a + Je_a$ à $e^{\star}_a$.*

*Démonstration.* Soit $a \in Q_0$ avec $Q_1(-, a) = \{\beta_i : b_i \to a \mid i = 1, \ldots, s\}$. En vertu du corollaire 2.2.9 et le lemme 2.2.10, $j_a$ est l'enveloppe injective de $S_a$ avec $\operatorname{Im}(j_a) = S(I_a)$. En vertu du lemme 2.2.8 et le corollaire 2.2.9, $I_a$ admet une base-socle essentielle $\{\beta^{\star}_1 + S(I_a), \ldots, \beta^{\star}_s + S(I_a)\}$. En vertu du lemme 2.2.10, on obtient une enveloppe injective $j : I_a/S(I_a) \to I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_s}$, qui envoie $\beta^{\star}_i + S(I_a)$ à $e^{\star}_{b_i}$, for $i = 1, \ldots, s$. Il est facile de voir que $I[\bar{\beta}_i](\beta^{\star}_i) = e^{\star}_{b_i}$. Par conséquent, $\left(I[\bar{\beta}_1], \ldots, I[\bar{\beta}_s]\right)^t$ est la composition de la projection canonique $I_a \to I_a/S(I_a)$ et l'enveloppe injective $j$.

$\square$

**Lemme 2.2.12.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre fortement localement de dimension finie. Supposons que $M \in \operatorname{Mod}\Lambda$ admet un socle essentiel avec un support fini. Si $N$ est un sous-module de $M$, alors $M/N$ admet un socle essentiel.*

*Démonstration.* Par la proposition 1.4.1(2), $J$ est le radical de Jacobson de $\Lambda$. Supposons que $S(M)$ est supporté par $a_1, \ldots, a_r \in Q_0$. Soit $N$ un sous-module de $M$ qui contient $S(M)$. Considérons un élément non nul $w + N \in M/N$, où $w \in e_{b_1}M + \cdots + e_{b_s}M$, pour un $b_1, \ldots, b_s \in Q_0$. Puisque $J$

est localement nilpotent, il existe un $t > 0$ tel que $e_{a_j} J^t e_{b_i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq r$. Supposons que $v(w+N) \neq 0$ pour un $v \in J^t$. Puisque $S(M)$ est essentiel dans $M$, il existe un $u \in \Lambda$ tel que $0 \neq (uv)w \in S(M)$. En particulier, $e_{b_j}(uv)e_{a_i} \neq 0$ pour un $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$, ce qui est absurbe. Donc, $J^t(w+N) = 0$. Par conséquent, il existe un entier maximal $n$ avec $0 \leq n < t$ pour lequel $J^n(w+N) \neq 0$. c-à-d, $0 \neq J^n(w+N) \subseteq S(M/N)$.

□

Dans le reste de cette section, nous supposerons que $\Lambda = kQ/R$, où $R$ est un idéal homogène dans $kQ$. Alors, $\Lambda$ est positivement graduée avec $\Lambda = \oplus_{i \geq 0} \Lambda_i$, dite la *graduation $J$-radicale* , où $\Lambda_i$ est un sous-espace vectoriel de $\Lambda$ engendré par $\bar{\gamma}$ avec $\gamma \in Q_i$. On dit que $\Lambda$ est *quadratique* si $R$ est un idéal quadratique. Soit $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ et $N = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} N_i$ deux modules gradués dans $\operatorname{Mod} \Lambda$. On dit que $M$ est *engendré* en degré $n$ si $M = \Lambda M_n$. Soit $a \in Q_0$, on voit que $P_a$ et $S_a$ sont des modules gradués engendrés en degré 0, mais $I_a$ n'est pas nécessairement gradué. Un morphisme $\Lambda$-linéaire $f : M \to N$ est dit *homogène de degré* $n$ si $f(M_i) \subseteq N_{i+n}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ ; et dans ce cas, on écrit $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, où $f_i : M_i \to N_{i+n}$ est obtenu par une restriction de $f$. Remarquons que $f$ est *gradué* si il est homogene de degré 0.

**Lemme 2.2.13.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre graduée. Si $L, M, N \in \operatorname{Mod} \Lambda$ sont gradués, alors la suite $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ des morphismes homogènes de degré $n$ est exacte si et seulement si $L_{i-n} \xrightarrow{f_{i-n}} M_i \xrightarrow{g_{i+n}} N_{i+n}$ est exacte, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

**Lemme 2.2.14.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est localement fini et $R$ un idéal homogène. Soit $M \in \operatorname{Mod}\Lambda$ gradué est de type fini avec une $J$-couverture projective homogène $f : P \to M$ et $f' : P' \to M$. Alors $f' = f \circ g$, pour un isomorphisme gradué $g$.*

Le resultat suivant décrit la 2-résolution $J$-minimal projective d'un module simple dans le cas gradué ; comparer avec [28, (2.4)].

**Lemme 2.2.15.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est localement fini et $R$ un idéal homogène avec un ensemble générateur minimal $\Omega$. Soit $a \in Q_0$ avec $Q_1(a, -) = \{\alpha_i : a \to b_i \mid i = 1, \ldots, r\}$ et $\Omega(a, -) =$*

$\{\rho_1, \ldots, \rho_s\}$. *Si* $\rho_j = \sum_{j=1}^r \gamma_{ij}\alpha_i$ *avec* $\gamma_{ij} \in kQ(b_i, c_j)$, *alors* $S_a$ *admet une* 2*-résolution* $J$*-minimal projective*

$$P_{c_1} \oplus \cdots \oplus P_{c_s} \xrightarrow{(P[\bar{\gamma}_{ij}])_{r\times s}} P_{b_1} \oplus \cdots \oplus P_{b_r} \xrightarrow{(P[\bar{\alpha}_1], \cdots, P[\bar{\alpha}_r])} P_a \xrightarrow{d_a} S_a \longrightarrow 0.$$

*Démonstration.* Soit $\rho_j = \sum_{j=1}^r \gamma_{ij}\alpha_i$, où $\gamma_{ij} \in kQ(b_i, c_j)$. Posons $d_1 = (P[\bar{\alpha}_1], \cdots, P[\bar{\alpha}_r])$ et $d_2 = (P[\bar{\gamma}_{ij}])_{r\times s}$. En vertu du corollaire 2.2.5, il suffit de prouver que $d_2$ est la co-restriction d'une $J$-couverture projective de $\mathrm{Ker}(d_1)$. Puisque $u_j = (\bar{\gamma}_{1j}, \ldots, \bar{\gamma}_{rj}) \in \mathrm{Ker}(d_1)$, en vertu du lemme 2.2.4, cela revient à montrer que $\{u_1, \ldots, u_s\}$ est une base $J$-coiffe de $\mathrm{Ker}(d_1)$.

Soit $v = (\bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_r) \in \mathrm{Ker}(d_1)$, où $\delta_i \in kQ(b_i, -)$. Nous pouvons supposer que $\delta_i \in kQ(b_i, c)$, pour un $c \in Q_0$. Puisque $d_1(v) = 0$, on obtient $\sum_{i=1}^r \delta_i\alpha_i \in R(a, c)$, et donc, $\sum_{i=1}^r \delta_i\alpha_i = \sum_{j=1}^s \omega_j\rho_j + \sum_{i=1}^r \eta_i\alpha_i = \sum_{i=1}^r(\sum_{j=1}^s \omega_j\gamma_{ij} + \eta_i)\alpha_i$, où $\omega_j \in kQ(c_j, c)$ and $\eta_i \in R(b_i, c)$. Cela donne $\delta_i = \sum_{j=1}^s \omega_j\gamma_{ij} + \eta_i$, et donc, $\bar{\delta}_i = \sum_{j=1}^s \bar{\omega}_j\bar{\gamma}_{ij}$, for $i = 1, \ldots, r$. Par conséquent, $v = \sum_{j=1}^s \bar{\omega}_j u_j$.

Supposons maintenant que $\sum_{j=1}^s \lambda_j u_j \in J\mathrm{Ker}(d_1)$, où $\lambda_j \in k$. Comme montré ci-dessus, $\sum_{j=1}^s \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^s \bar{\nu}_j u_j$, avec $\nu_j \in kQ^+$. Donc, $\sum_{j=1}^s \lambda_j\gamma_{ij} = \sum_{j=1}^s(\nu_j\gamma_{ij} + \eta_{ij})$, où $\eta_{ij} \in R(b_i, c_j)$, for $i = 1, \ldots, r$. Calculant $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \lambda_j\gamma_{ij}\alpha_i$, on obtient $\sum_{j=1}^s \lambda_j\rho_j = \sum_{j=1}^s \nu_j(\rho_j + \zeta_j)$, où $\zeta_j \in R(a, c_j)$. En vertu du lemme 1.3.1, $\lambda_j = 0$, for $i = 1, \ldots, s$.

□

Soit $M$ un module gradué dans $\mathrm{Mod}\mathit{\Lambda}$. Une $n$-résolution $J$-minimale projective de $M$ sur $\mathrm{proj}\,\mathit{\Lambda}$ est dite une *$n$-résolution linéaire projective* si les morphismes entre les modules projectifs sont homogènes de degré zéro. Le théorème suivant étend un résultat bien connu qui dit qu'une algèbre de Koszul est quadratique ; voir [10, (2.3.3)].

**Théorème 2.2.16.** *Soit* $\mathit{\Lambda} = kQ/R$, *où* $Q$ *est localement fini et* $R$ *un idéal homogène. Alors,* $\mathit{\Lambda}$ *est quadratique si et seulement si tout* $\mathit{\Lambda}$*-module simple admet une* 2*-résolution linéaire projective sur* $\mathrm{proj}\,\mathit{\Lambda}$.

*Démonstration.* Soit $\mathit{\Omega}$ un ensemble générateur minimal de $R$. Fixons $a \in Q_0$. Puisque $\mathit{\Omega}(a, -)$ contient un nombre fini de relations quadratiques, la nécessité découle immédiatement du lemme 2.2.15. Supposons que $S_a$ admet une 2-résolution linéaire projective sur $\mathrm{proj}\,\mathit{\Lambda}$. Prenons $Q_1(a, -) = \{\alpha_i : a \to b_i \mid i =$

$1, \ldots, r\}$, on déduit des lemmes 2.2.7, 2.2.14 et 2.2.15 un diagramme commutatif avec lignes exacts

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, equal] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_a \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & S_a \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
P_{c_1} \oplus \cdots \oplus P_{c_s} \arrow[r, "(P[\bar{\gamma}_{ij}])_{r\times s}"] & P_{b_1} \oplus \cdots \oplus P_{b_r} \arrow[r, "P[\bar{\alpha}_1], \cdots, P[\bar{\alpha}_r]"] & P_a \arrow[r, "d_a"] & S_a \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où la ligne supérieure est une 2-resolution linéaire projective, $f_0, f_1$ sont des isomorphismes gradués, et $\gamma_{ij} \in kQ(b_i, c_j)$. Puisque $f_1 \circ d_2$ est homogène de degré 1, $\gamma_{ij} \in kQ_1(b_i, c_j)$ et $\eta_j = \sum_{i=1}^r \gamma_{ij}\alpha_i \in R_2(a, c_j)$, for $j = 1, \ldots, s$. En vertu du lemme 2.2.4, $\{u_j = (\bar{\gamma}_{1j}, \ldots, \bar{\gamma}_{rj}) \mid j = 1, \ldots, s\}$ est une base $J$-coiffe de $\mathrm{Ker}(P[\bar{\alpha}_1], \cdots, P[\bar{\alpha}_r])$.

Soit $\rho \in \Omega(a, c)$ une relation de degré $n > 2$. Posons $\rho = \sum_{i=1}^r \gamma_i\alpha_i$, pour un $\gamma_i \in kQ_{n-1}(b_i, c)$. Puisque $(\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_r) \in \mathrm{Ker}(P[\bar{\alpha}_1], \cdots, P[\bar{\alpha}_r])$, on voit que $(\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_r) = \sum_{j=1}^s \bar{\delta}_j u_j$, pour un $\delta_j \in kQ_{n-2}(c_j, c)$. Alors, $\gamma_i = \sigma_i + \sum_{j=1}^s \delta_j\gamma_{ij}$, où $\sigma_i \in R(b_i, c)$, for $i = 1, \ldots, r$. Cela donne $\rho = \sum_{i=1}^r \sigma_i\alpha_i + \sum_{j=1}^s \delta_j\eta_j$. Puisque $n > 2$, on voit que $\rho \in R(kQ^+) + (kQ^+)R$, cela contredit le lemme 1.3.1. $\square$

Soit $M$ un module gradué dans $\mathrm{Mod}\,\Lambda$. Considérons une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} P^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} M \longrightarrow 0,$$

où $d^{-n}$ est une co-restriction d'une $J$-couverture projective de $\mathrm{Im}(d^{-n})$ pour tout $n \geq 0$. Si tous les $d^{-n}$ avec $n > 0$ sont homogènes de degré 1, alors le complexe

$$\cdots \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} P^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

est dit une *résolution linéaire projective* de $M$ sur $\mathrm{proj}\,\Lambda$.

**Définition 2.2.17.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un idéal homogène dans $kQ$. On dit que $\Lambda$ est de Koszul si tout $\Lambda$-module simple admet une résolution linéaire projective sur* $\mathrm{proj}\,\Lambda$.

Remarque. En vertu du théorème 2.2.16, une algèbre de Koszul est quadratique ; comparer avec [10, (2.3.3)].

# CHAPITRE 3

# Localisation

L'idée de la localisation vient de l'algèbre commutative. En effet, soit $A$ un anneau commutatif et $S$ un sous-ensemble de $A$. Supposons que $S$ contient l'élément neutre et est stable par multiplication. Alors il existe un anneau commutatif $S^{-1}A$ qui vérifie les propriétés suivantes :

i. Il existe un morphisme d'anneau $f : A \to S^{-1}A$ tel que, pour tout $s \in S$, $f(s)$ est inversible dans $S^{-1}A$.

ii. Pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $g : A \to B$ tel que $g(s)$ est inversible pour tout $s \in S$, il existe un unique morphisme d'anneaux $h : S^{-1}A \to B$ tel que $hf = g$.

Notre objectif est de faire la même chose pour les catégories, c-à-d, étant donné une catégorie $\mathscr{D}$ et une classe de morphismes $\mathscr{W}$ de $\mathscr{D}$, on veut construire une catégorie $\mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ et un foncteur $P : \mathscr{D} \to \mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ tels que $P(f)$ est un isomorphisme pour tout $f \in \mathscr{W}$ et qui vérifie la propriété universelle [24].

## 3.1 Localisation des catégories

**Définition 3.1.1.** *Soit $\mathscr{D}$ une catégorie et $\mathscr{W}$ une classe de morphismes de $\mathscr{D}$. $\mathscr{W}$ est dite une classe localisante si les propriétés suivante sont vérifiées :*

*i. L'identité de tout objet de $\mathscr{D}$ et la composée de deux morphismes de $\mathscr{W}$ sont dans $\mathscr{W}$.*

*ii. Pour tous morphismes $g \in \mathcal{D}$ et $t \in \Sigma$, il existe des morphismes $f \in \mathcal{D}$ et $s \in \Sigma$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & Z^{'} \arrow[d, dashed, "s"] \\ Y^{'} \arrow[r, dashed, "f"] & Z^{''} \end{tikzcd}$$

*commute.*

*iii. Pour tous morphismes $f \in \mathcal{D}$ et $s \in \Sigma$, il existe des morphismes $g \in \mathcal{D}$ et $t \in \Sigma$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "t"] & Z^{'} \arrow[d, "s"] \\ Y^{'} \arrow[r, "f"] & Z^{''} \end{tikzcd}$$

*Commute.*

*iv. Pour tous morphismes $f, g : X \to Y$ et $t \in \mathscr{W}$ tels que $f \circ t = g \circ t$ il existe un morphisme $s \in \mathscr{W}$ tel que $s \circ f = s \circ g$ et pour tous morphismes $f, g : X \to Y$, et $s \in \mathscr{W}^{'}$ tels que $s \circ f = s \circ g$ il existe un morphisme $t \in \mathscr{W}^{'}$ tel que $f \circ t = g \circ t$*

Considérons un digramme de la forme

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

où $s_1 \in \Sigma$ et $f_1$ un morphisme quelconque dans $\mathcal{D}$. Pour simplifier les notations, on va noter un tel diagramme $(f_1 : X_1 \to Y, s_1 : X_1 \to X)$.

On dit que deux paires de morphismes $(f_1 : X_1 \to Y, s_1 : X_1 \to X)$ et $(f_2 : X_2 \to Y, s_2 : X_2 \to X)$ sont équivalentes si il existe une paire de morphismes $(f_3 : X_3 \to Y, s_3 : X_3 \to X)$ et des morphismes $u : X_3 \to X_1$, $v : X_3 \to X_2$ tels que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\ X & X_3 \arrow[l, "s_3"'] \arrow[r, "f_3"] \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "v"] & Y \\ & X_2 \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

**Définition 3.1.2.** *Soient $\mathscr{D}$ une catégorie et $\mathscr{W}$ une classe localisante de morphismes de $\mathscr{D}$. Alors on définit la catégorie $\mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ comme suit :*

*i.* *On pose* $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]) = \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$

*ii.* *les morphismes $X \to Y$ dans $\mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ sont des classes d'équivalences des paires $(f : X' \to Y, s : X' \to X)$ avec $s \in \mathscr{W}$. On va noter une telle paire $fs^{-1} : X \to Y$*

Remarque. La composition de deux morphismes est définie de la manière suivante :

Soit $(f : X' \to Y, s : X' \to X)$ et $(g : Y' \to Z, t : Y' \to Y)$ deux morphismes. Leur composition est la classe d'équivalence de la paire de morphismes $(g \circ h : X'' \to Z, s \circ u : X'' \to X)$ avec $h$ un mophisme et $u \in S$. L'existence des deux morphismes $h$ et $s$ vient du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u"'] & Y' \arrow[d, "t"] \\ X' \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Les deux résultats suivants ont été prouvés par Verdier, voir [54] ou [4] .

**Théorème 3.1.3.** *Soit $\mathscr{D}$ une catégorie et $\mathscr{W}$ une classe localisante de morphismes de $\mathscr{D}$. Alors il existe une catégorie $\mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ et un foncteur $P : \mathscr{D} \to \mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ tels que :*

*i.* *Pour tout $s \in \mathcal{W}$, $P(s)$ est un isomorphisme dans $\mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$.*

*ii.* *Si $F : \mathscr{D} \to \mathcal{A}$ est un foncteur tel que $F(s)$ est inversible pour tout $s \in \mathscr{W}$ alors il existe un unique foncteur $G : \mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}] \to \mathcal{A}$ tel que $G \circ P = F$.*

Remarque :

Le foncteur $P : \mathscr{D} \to \mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ est l'identité sur les objets et il envoie $(f : X \to Y)$ à $(f : X \to Y, \mathrm{id}_X : X \to X)$.

**Lemme 3.1.4.** *Soient $f, g : X \to Y$ deux morphismes dans $\mathcal{D}$.*

*Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*i.* $P(f) = P(g)$.

*ii.* *Il existe un morphisme $h : Z \to X$ avec $h \in \mathscr{W}$ tel que $fh = gh$.*

## 3.2 Localisation de catégories abéliennes

Notre objectif dans cette section est de trouver un ensemble de morphismes $\mathscr{W}$ d'une catégorie abélienne $\mathscr{D}$ telle que la catégorie $\mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ soit aussi abélienne. Ce problème a été résolu par Pierre Gabriel dans sa thèse de doctorat, voir [23, 24].

**Définition 3.2.1.** *Soit $\mathscr{B}$ une sous-catégorie d'une catégorie abélienne $\mathscr{D}$.*
*$\mathscr{B}$ est dite une sous-catégorie épaisse si pour toute suite exacte courte*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

*$A, C \in \mathscr{B}$ si et seulement si $B \in \mathscr{B}$.*

**Proposition 3.2.2.** *Soit $\mathscr{B}$ une sous-catégorie épaisse d'une catégorie abélienne $\mathscr{D}$.*
*Alors, $\mathscr{B}$ est une sous-catégorie abélienne.*

**Théorème 3.2.3.** *Soit $\mathscr{B}$ une sous-catégorie épaisse d'une catégorie abélienne $\mathscr{D}$. Posons $\mathscr{W} = \{s \in \mathscr{D} \mid \mathrm{Ker}(s), \mathrm{Coker}(s) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B})\}$ .*
*Alors, la catégorie $\mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ est abélienne et le foncteur $P : \mathscr{D} \to \mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ vérifie :*

- *i.* $P(\mathscr{B}) = 0$.
- *ii.* *si il existe un foncteur de catégories abéliennes $F : \mathscr{D} \to \mathcal{C}$ tel que $F(\mathscr{B}) = 0$, alors il existe un unique foncteur $G : \mathscr{D}[\mathscr{W}^{-1}] \to \mathcal{C}$ qui vérifie $G \circ P = F$.*

**Proposition 3.2.4.** *Sous les même hypothèses que le théorème précèdent, soit $f$ un morphisme dans $\mathscr{D}$. Alors,*

- *i.* *$P(f)$ est un monomorphisme ssi $Ker(f) \in \mathscr{B}$,*
- *ii.* *$P(f)$ est un epimorphisme ssi $Coker(f) \in \mathscr{B}$.*
- *iii.* *$P(f)$ est un isomorphisme ssi $Ker(f), Coker(f) \in \mathscr{B}$.*

## 3.3 Catégories triangulées

Dans cette section on va rappeler la notion de catégorie triangulée introduite par Grothendieck et Verdier [54]. Cette classe de catégories joue un rôle important dans la théorie des représentations, la géométrie algébrique, la topologie algébrique et la physique mathématique.
Un foncteur de décalage [1] d'une catégorie $\mathcal{T}$ est un automorphisme, c-à-d, $[1] \circ [-1] = [-1] \circ [1] = \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$, où $[-1]$ est l'automorphisme inverse de [1].

**Définition 3.3.1.** *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie additive munie d'un foncteur de décalage* $[1]$. *Un triangle dans $\mathcal{D}$ est un sextuplet $(X, Y, Z, f, g, h)$ avec $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to X[1]$ des morphismes. Un morphisme de triangles $(X, Y, Z, f, g, h) \to (X', Y', Z', f', g', h')$ est la donnée de trois morphismes $a : X \to X'$, $b : Y \to Y'$ et $c : Z \to Z'$ tels que le diagramme ci-dessous commute.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"] & X[1] \arrow[d, "a[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

**Définition 3.3.2.** *Une catégorie additive $\mathcal{T}$ est dite triangulée si elle est munie d'une collection de triangles appelés triangles distingués qui doivent vérifier les propriétés ci-dessous :*

*i. Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué.*

*ii. Le triangle $(X, X, 0, id, 0, 0)$ est distingué.*

*iii. Pour tout morphisme $f : X \to Y$ il existe un triangle distingué $(X, Y, Z, f, g, h)$.*

*iv. Le triangle $(X, Y, Z, f, g, h)$ est distingué si et seulement si le triangle $(Y, Z, X[1], g, h, -f[1])$ est distingué.*

*v. Étant donné un diagramme de cette forme*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "c"] & X[1] \arrow[d, "a[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

*où les lignes sont des triangles distingués et qui vérifie $b \circ f = f' \circ a$, alors il existe un morphisme $c : Z \to Z'$ tel que $(a, b, c)$ est un morphisme de triangles.*

*vi.* *Soit* $X, Y, Z \in \mathcal{T}$ *et des morphismes* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *et des triangles distingués* $(X, Y, Q_1, f, p_1, d_1)$, $(X, Z, Q_2, g \circ f, p_2, d_2)$ *et* $(Y, Z, Q_3, g, p_3, d_3)$ *alors il existe deux morphismes* $a : Q_1 \to Q_2$ *et* $b : Q_2 \to Q_3$ *tels que :*

(a) $(Q_1, Q_2, Q_3, a, b, p_1[1] \circ d_3)$ *est un triangle distingué.*

(b) $(id_X, g, a)$ *est un morphisme de triangles* $(X, Y, Q_1, f, p_1, d_1) \to (X, Z, Q_2, g \circ f, p_2, d_2)$.

(c) $(f, id_Z, b)$ *est un morphisme de triangle* $(X, Z, Q_2, g \circ f, p_2, d_2) \to (Y, Z, Q_3, g, p_3, d_3)$.

**Définition 3.3.3.** *Soient* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}'$ *deux catégories triangulées. Un foncteur exact ou triangulé* $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *est un foncteur avec des isomorphismes fonctoriels* $\xi_X : F(X[1]) \to F(X)[1]$ *et qui préserve les triangles distingués, c-à-d, si* $(X, Y, Z, f, g, h)$ *est un triangle distingué de* $\mathcal{T}$*, alors* $(F(X), F(Y), F(Z), F(f), F(g), \xi_X \circ F(h))$ *est un triangle distingué de* $\mathcal{T}'$.

**Définition 3.3.4.** *Soit* $\mathcal{D}$ *une sous-catégorie additive avec un foncteur de décalage d'une catégorie triangulée* $\mathcal{T}$*. On dit que* $\mathcal{D}$ *est une sous-catégorie triangulée de* $\mathcal{T}$*, si :*

*i.* $\mathcal{D}$ *est triangulée.*

*ii.* *Le foncteur d'inclusion est triangulé.*

## 3.4 Localisation des catégories triangulées

**Définition 3.4.1.** *Soit* $\mathcal{T}$ *une catégorie triangulée. Un classe localisante de morphismes* $\mathscr{W}$ *est dite compatible avec la structure triangulée si :*

*i.* *Pour tout* $s \in \mathscr{W}$*, on a* $s[n] \in \mathscr{W}$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

*ii.* *Étant donné un diagramme commutatif tel que ses lignes sont des triangles distingués et* $s, s' \in \mathscr{W}$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s'"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "s''"] & X[1] \arrow[d, "s[1]"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

*Alors il existe un morphisme* $s'' : Z \to Z'$ *de* $\mathscr{W}$ *tel que* $(s, s', s'')$ *est un morphisme de triangles.*

**Définition 3.4.2.** *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée et $\mathscr{W}$ une classe localisante de morphismes qui est compatible avec la structure triangulée. Alors il existe une catégorie triangulée $\mathcal{T}[\mathscr{W}^{-1}]$ et un foncteur triangulé $P : \mathcal{T} \to \mathcal{T}[\mathscr{W}^{-1}]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

*i.* *$P(s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in \mathscr{W}$.*

*ii.* *Si $\mathcal{T}'$ est un catégorie triangulée et $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé, alors il existe un unique foncteur triangulé $G : \mathcal{T}[\mathscr{W}^{-1}] \to \mathcal{T}'$ tel que $G \circ P = F$.*

**Définition 3.4.3.** *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée et $\mathcal{T}'$ une sous-catégorie triangulée.*
*On dit que $\mathcal{T}'$ est épaisse si $X \oplus Y$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{T}'$, alors $X$ et $Y$ sont isomorphes à des objets de $\mathcal{T}'$.*

**Théorème 3.4.4.** *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée et $\mathcal{T}'$ une sous-catégorie triangulée et épaisse de $\mathcal{T}$. Alors il existe une catégories triangulée $\mathcal{T}/\mathcal{T}'$ et un foncteur triangulé $P : \mathscr{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{T}'$ tel que $P(\mathcal{T}') = 0$, qui sont universels pour cette propriété, c-à-d, si $F : \mathcal{T} \to \mathscr{T}$ est un foncteur triangulé tel que $F(\mathcal{T}') = 0$, alors il existe un unique foncteur triangulé $G : \mathcal{T}/\mathcal{T}' \to \mathscr{T}$ tel que $G \circ P = F$.*

Remarque. Dans la preuve de ce théorème la catégorie $\mathcal{T}/\mathcal{T}'$ est exactement la catégorie $\mathcal{T}[\mathscr{W}^{-1}]$ avec $\mathscr{W}$ l'ensemble des morphismes $f \in \mathcal{T}$ tel que il existe un triangle distingué $(X, Y, Z, f, g, h)$ de $\mathcal{T}$ avec Z est isomorphe à un objet de $\mathcal{T}'$.

## 3.5 Catégories dérivées

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Un cocomplexe $X^\bullet$ est $\ldots \to X^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \ldots$ avec $d^n d^{n-1} = 0$. Un morphisme de cocomplexes $f : X^\bullet \to Y^\bullet$, est la donnée d'une famille de morphismes $f^i : X^i \to Y^i$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X^i \arrow[r, "d^i"'] \arrow[d, "f^i"'] & X^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\ Y^i \arrow[r, "d^i"] & Y^{i+1} \end{tikzcd}$$

Notons $C(\mathcal{A})$ la catégorie des cocomplexes. La catégorie d'homotopie $K(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est la catégorie qui a les mêmes objets de $C(\mathcal{A})$, et dont les morphismes sont les classes d'homotopie des morphismes de cocomplexes. Plus précisément, on dit que deux morphismes $f^\bullet$ et $g^\bullet$ dans $C(\mathcal{A})(X^\bullet, Y^\bullet)$ sont homotopes si il existe une famille de morphismes dans $\mathcal{A}$, $s^n : X^n \to Y^{n-1}$, avec $n \in \mathbb{Z}$ telle que $f^n - g^n = s^{n+1}d^n + d^{n-1}s^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors on pose $K(\mathcal{A})(X^\bullet, Y^\bullet) = C(\mathcal{A})(X^\bullet, Y^\bullet)/\mathcal{R}$.

**Définition 3.5.1.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.*

*i. Un complexe $X^\bullet$ est dit borné à gauche si $X^n = 0$ pour tout $n \ll 0$.*

*ii. Un complexe $X^\bullet$ est dit borné à droite si $X^n = 0$ pour tout $n \gg 0$.*

*iii. Un complexe $X^\bullet$ est dit borné si $X^n = 0$ pour tout $|n| \gg 0$.*

On va noter $K^-(\mathcal{A})$, $K^+(\mathcal{A})$ et $K^b(\mathcal{A})$ les sous-catégories de $K(\mathcal{A})$ des complexes d'objets de $\mathcal{A}$ bornés à droite, bornés à gauche et bornés, respectivement, voir [20] pour plus de détails.

**Théorème 3.5.2.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Alors les catégories $K^-(\mathcal{A})$, $K^+(\mathcal{A})$ $K^b(\mathcal{A})$ et $K(\mathcal{A})$ sont triangulées.*

La cohomologie d'un complexe $X^\bullet$ est la suite $(H^n(X^\bullet))_{n\in\mathbb{Z}}$, avec $H^n(X^\bullet) = Kerd^n/Imd^{n-1}$ le $n$-ème groupe de cohomologie de $X^\bullet$. Le complexe $X^\bullet$ est dit acyclique si $H^i(X^\bullet) = 0$ pour $i \in \mathbb{Z}$. Notons par $\mathrm{Ac}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie triangulée et épaisse des complexes acycliques de $K(\mathcal{A})$.

**Définition 3.5.3.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Alors les catégories dérivées de $\mathcal{A}$ sont par définition : $D^*(\mathcal{A}) := K^*(\mathcal{A})/Ac^*(\mathcal{A})$ avec $* \in \{-, +, b, \emptyset\}$.*

**Définition 3.5.4.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On dit que $\mathcal{A}$ a suffisamment d'objets projectifs, si pour tout objet $X \in \mathcal{A}$, il existe un objet $P \in \mathrm{proj}\mathcal{A}$ et un épimorphisme $P \to X$.*
*On dit que $\mathcal{A}$ a suffisamment d'objets injectifs, si pour tout objet $Y \in \mathcal{A}$, il existe un objet $I \in \mathrm{inj}\mathcal{A}$ et un monomorphisme $Y \to I$.*

La cohomologie d'un complexe $X^\bullet$ est dite bornée ou $X^\bullet$ est dit à cohomologie bornée, si $H^n(X^\bullet) = Kerd^n/Imd^{n-1} = 0$ sauf pour un nombre fini de $n \in \mathbb{Z}$.

**Théorème 3.5.5.** *Supposons que $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne avec suffisamment d'objets projectifs et d'objets injectifs. Alors $D^b(\mathcal{A})$ est équivalente à $K^{-,b}(\mathrm{proj}\mathcal{A})$ et à $K^{+,b}(\mathrm{inj}\mathcal{A})$. où $K^{-,b}(\mathrm{proj}\mathcal{A})$ est la* *catégorie d'homotopie des complexes bornés à droite avec cohomologie bornée et* $K^{+,b}(\mathrm{inj}\mathcal{A})$ *la catégorie d'homotopie des complexes bornés à gauche avec cohomologie bornée.*

Supposons que $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne et héréditaire. Alors il est bien connu que tout complexe dans $D^b(\mathcal{A})$ est isomorphe à la somme directe finie de ses groupes de cohomologie, c-à-d, $X \cong \oplus_i H^i(X)[-i]$, voir [35]. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{B}$ une sous-catégorie abélienne et épaisse de $\mathcal{A}$. On va définir une nouvelle sous-catégorie pleine épaisse triangulée $D^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ de $D^b(\mathcal{A})$ par $\mathrm{Ob}(D^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})) = \{X \in \mathrm{Ob}(D^b(\mathcal{A})) \mid H^n(X)$ est un objet de $\mathcal{B}$ pour tout $n\}$. On va utiliser cette catégorie dans la preuve du théorème 7.2.1. Maintenant, on est prêt à introduire le joueur principal de cette partie.

## 3.6 Catégories singulières

La catégorie singulière a été introduite par Buchweitz [15] pour étudier les singularités de certaines variétés algébriques et les modules de Cohen-Macaulay maximaux. Indépendamment, Orlov [46] a découvert des liens entre cette catégorie et la physique théorique et il a prouvé un résultat très intéressant en géométrie algébrique. Ces dernières années beaucoup d'efforts ont été déployés pour étudier la catégorie singulière bornée de certaines algèbres des carquois liés, voir par exemple [3, 13, 15, 17, 18, 46, 50, 52, 53, 56].

**Définition 3.6.1.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec suffisamment d'objets projectifs et d'objets injectifs. Alors les catégories singulières de $\mathcal{A}$ sont par définition les quotients de Verdier*

$$D^b_{sg}(\mathcal{A}) := D^{-,b}_{sg}(\mathrm{proj}\mathcal{A}) := K^{-,b}(\mathrm{proj}\mathcal{A})/K^b(\mathrm{proj}\mathcal{A}) \text{ et } D^{+,b}_{sg}(\mathrm{inj}\mathcal{A}) := K^{+,b}(\mathrm{inj}\mathcal{A})/K^b(\mathrm{inj}\mathcal{A})$$

.

Le théorème suivant nous montre qu'il suffit d'étudier la catégorie singulière bornée d'une algèbre de radical carré nul pour comprendre la catégorie singulière bornée d'une algèbre monomiale quadratique [13, 18].

**Théorème 3.6.2.** *[18] Soit $A$ une algèbre monomiale quadratique. Alors il existe une algèbre $B$ dont le radical carré est nul, telle que $D^b_{sg}(\mathrm{mod^b}B) \cong D^b_{sg}(\mathrm{mod^b}A)$.*

# CHAPITRE 4

# Complexes doubles et extensions des foncteurs

Dans ce qui suit, tous les foncteurs entre les catégories linéaires sont additifs, et les morphismes sont composés de droite à gauche. Une catégorie abélienne est dite *concrète* si ses objets admettent des structures de groupes abéliens et les compositions des morphismes sont compatibles avec les structures de groupes abéliens.

L'objectif de cette section est de fournir les outils nécessaires qui nous serviront dans le Chapitre 5. On commencera avec une sorte de théorie homotopique des complexes doubles sur une catégorie abélienne concrète. En particulier, on généralisera le lemme d'assemblage acyclique ; voir, par exemple, [55]. Cela garantira l'acyclicité du complexe total d'un complexe double de grande dimension. Deuxièmement, nous formaliserons une méthode d'extension d'un foncteur d'une catégorie additive à la catégorie des complexes d'une autre catégorie additive à sa catégorie des complexes. Cette méthode a été déjà utilisée dans diverses circonstances spéciales ; voir, par exemple, [7, 10, 33, 49].

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne concrète avec des sommes directes dénombrables. On note $C(\mathcal{A})$, $K(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{A})$ la *catégorie des complexes*, la *catégorie homotopique* et la *catégorie dérivée* de $\mathcal{A}$, respectivement. On regardera $\mathcal{A}$ comme une sous-catégorie pleine de $C(\mathcal{A})$, en identifiant un objet $X$ au complexe $X[0]$

concentré en degré zéro. Étant donné un complexe $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ dans $C(\mathcal{A})$, on notera $X^\bullet[1]$ son *décalage* et $\mathrm{H}^n(X^\bullet)$ son *n-ème groupe de cohomologie*. On dira que $X^\bullet$ est *acyclique* si $\mathrm{H}^n(X^\bullet) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus, le *complexe de torsion* $\mathfrak{t}(X^\bullet)$ de $X^\bullet$ est un complexe dont sa $n$-composante est $X^n$ et sa $n$-ème différentielle est $-d_X^n$ ; voir [7, Section 4]. Évidemment, $\mathfrak{t}(X^\bullet) \cong X^\bullet$. Finalement, le cône d'un morphisme $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ dans $C(\mathcal{A})$ sera noté $C_{f^\bullet}$.

Nous allons maintenant étudier les doubles complexes. D'abords, définissons c'est quoi un complexe double. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Un complexe double dans $\mathcal{A}$ est la donnée d'un triplet ( $(M^{p,q}, v^{p,q}, h^{p,q})_{p,q\in\mathbf{Z}}$, où chaque $M^{p,q}$ est un objet dans $\mathcal{A}$ et $h^{p,q} : M^{p,q} \to M^{p+1,q}$ et $v^{p,q} : M^{p,q} \to M^{p,q+1}$ sont des morphismes dans $\mathcal{A}$ tels que

(1) $h^{p+1,q} \circ h^{p,q} = 0$,

(2) $v^{p,q+1} \circ v^{p,q} = 0$,

(3) $h^{p,q+1} \circ v^{p,q} = v^{p+1,q} \circ h^{p,q}$,

pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$.

Soit $(M^{\bullet\bullet}, v_M^{\bullet\bullet}, h_M^{\bullet\bullet})$ un complexe double sur $\mathcal{A}$. Soient $i, j \in \mathbb{Z}$, la *i-ème colonne* de $M^{\bullet\bullet}$ est le complexe $(M^{i,\bullet}, v_M^{i,\bullet})$, et la *j-ème ligne* est le complexe $(M^{\bullet,j}, h_M^{\bullet,j})$. On définit le *décalage horizontal* de $M^{\bullet\bullet}$ comme étant le complexe double $(X^{\bullet\bullet}, v_X^{\bullet\bullet}, h_X^{\bullet\bullet})$ tel que $X^{i,j} = M^{i+1,j}$, et $v_X^{i,j} = -v_M^{i+1,j}$ et $h_X^{i,j} = -h_M^{i+1,j}$. Dans la suite, nous écrirons $M^{\bullet\bullet}[1]$ pour le décalage horizontal de $M^{\bullet\bullet}$. un *morphisme* $f^{\bullet\bullet} : M^{\bullet\bullet} \to N^{\bullet\bullet}$ de complexes doubles sur $\mathcal{A}$ se compose des morphismes $f^{i,j} : M^{i,j} \to N^{i,j}$, avec $i, j \in \mathbb{Z}$, in $\mathcal{A}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & N^{i,j+1} & & \\
M^{i,j+1} \arrow[ur, "f^{i,j+1}"] & & & \\
 & N^{i,j} \arrow[uu, "v_N^{i,j}"'] \arrow[rr, "h_N^{i,j}"] & & N^{i+1,j} \\
M^{i,j} \arrow[uu, "v_M^{i,j}"] \arrow[ur, "f^{i,j}"] \arrow[rr, "h_M^{i,j}"] & & M^{i+1,j} \arrow[ur, "f^{i+1,j}"'] &
\end{tikzcd}$$

commute, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$ ; ou d'une manière équivalente, $f^{i,\bullet} : M^{i,\bullet} \to N^{i,\bullet}$ et $f^{\bullet,j} : M^{\bullet,j} \to N^{\bullet,j}$ sont des morphismes de complexes, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$. Nous dirons que $f^{\bullet\bullet}$ est *homotope horizontalement à zéro* si il existe $u^{i,j} : M^{i,j} \to N^{i-1,j}$ tel que $u^{i+1,j} h_M^{i,j} + h_N^{i-1,j} u^{i,j} = f^{i,j}$ et $v_N^{i-1,j} u^{i,j} + u^{i,j+1} v_M^{i,j} = 0$, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$. Les complexes doubles sur $\mathcal{A}$ forment une catégorie abélienne $DC(\mathcal{A})$.

Rappelons que le *complexe total* $\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})$ de $M^{\bullet\bullet}$ est un complexe sur $\mathcal{A}$ défini $\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})^n = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M^{i,n-i}$ et

$$d^n_{\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})} = (d^n_{\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})}(j,i))_{(j,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} : \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M^{i,n-i} \to \oplus_{j\in\mathbb{Z}} M^{j,n+1-j},$$

où $d^n_{\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})}(j,i) : M^{i,n-i} \to M^{j,n+1-j}$ est donné par

$$d^n_{\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})}(j,i) = \begin{cases} v_{_M}^{i,n-i}, & j = i; \\ h_{_M}^{i,n-i}, & j = i+1; \\ 0, & j \neq i, i+1. \end{cases}$$

**Proposition 4.0.1.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne concrète avec des sommes directes dénombrables. Il existe un foncteur $\mathbb{T} : DC(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A})$ tel que,*

(1) *Si $M^{\bullet\bullet} \in DC(\mathcal{A})$, alors $\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet}[1]) = \mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})[1]$;*

(2) *Si $f^{\bullet\bullet} : M^{\bullet\bullet} \to N^{\bullet\bullet}$ est homotope horizontalement à zéro, alors $\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})$ est homotope à zéro.*

*Démonstration.* Soit $f^{\bullet\bullet} : M^{\bullet\bullet} \to N^{\bullet\bullet}$ un morphisme dans $DC(\mathcal{A})$. Pour un entier $n$, on pose

$$\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^n = (\mathbb{T}\,(f^{\bullet\bullet})^n(j,i))_{(j,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} : \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M^{i,n-i} \to \oplus_{j\in\mathbb{Z}} N^{j,n-j},$$

où $\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^n(i,i) = f^{i,n-i}$ et $\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^n(j,i) = 0$ dans le cas où $j \neq i$, ou d'une manière équivalente, $\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^n = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} f^{i,n-i}$. Il est facile de voir que $\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^{n+1} \circ d^n_{\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})} = d^n_{\mathbb{T}(N^{\bullet\bullet})} \circ \mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^n$. Cela donne un morphisme $\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet}) = (\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbb{T}(M^{\bullet\bullet}) \to \mathbb{T}(N^{\bullet\bullet})$ dans $C(\mathcal{A})$. c-à-d, $\mathbb{T}$ est en effet un foncteur. Maintenant (1) est clair.

Supposons que $f^{\bullet\bullet}$ est homotope horizontalement à zéro. Soit $u^{i,j} : M^{i,j} \to N^{i-1,j}$ tel que $f^{i,j} = u^{i+1,j} \circ h_{_M}^{i,j} + h_{_N}^{i-1,j} \circ u^{i,j}$ et $v_{_N}^{i-1,j} u^{i,j} + u^{i,j+1} v_{_M}^{i,j} = 0$, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$. Fixons $h^n = (h^n(j,i))_{(j,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} : \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M^{i,n-i} \to \oplus_{j\in\mathbb{Z}} N^{j,n-j}$, où $h^n(i-1,i) = u^{i,n-i} : M^{i,n-i} \to N^{i-1,n-i}$ et $h^n(j,i) = 0$ dans le cas $j \neq i-1$. Soient $n, i, j \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} h^{n+1}(j,p) \circ d^n_{\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})}(p,i) &= h^{n+1}(j,j+1) \circ d^n_{\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})}(j+1,i) \\ &= \begin{cases} u^{i+1,n-i} \circ h_{_M}^{i,n-i}, & j = i; \\ u^{i,n+1-i} \circ v_{_M}^{i,n-i}, & j = i-1; \\ 0, & j \neq i, i-1, \end{cases} \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned}\sum_{q\in\mathbb{Z}} d^{n-1}_{\mathbb{T}(N^{\bullet\bullet})}(j,q)\circ h^n(q,i) &= d^{n-1}_{\mathbb{T}(N^{\bullet\bullet})}(j,i-1)\circ h^n(i-1,i)\\ &= \begin{cases} h_N^{i-1,n-i}\circ u^{i,n-i}, & j=i;\\ v_N^{i-1,n-i}\circ u^{i,n-i}, & j=i-1;\\ 0, & j\neq i,i-1,\end{cases}\end{aligned}$$
On en déduit que $\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^n = h^{n+1}\circ d^n_{\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})} + d^{n-1}_{\mathbb{T}(N^{\bullet\bullet})}\circ h^n$. c-à-d, $\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})$ est homotope à zéro.

□

Nous étudierons quand le complexe total d'un complexe double est acyclique. Soit $M^{\bullet\bullet}$ un complexe sur $\mathcal{A}$. Pour $n\in\mathbb{Z}$, la *$n$-diagonale* de $M^{\bullet\bullet}$ est l'ensemble des objets $M^{i,n-i}$ avec $i\in\mathbb{Z}$. Nous dirons que $M^{\bullet\bullet}$ is *$n$-diagonalement borné* (respectivement, *borné supérieurement*, *borné inférieurement*) si $M^{i,n-i}=0$ pour tout entier $i$, sauf au plus un nombre fini (pour presque tout entier $i$ positif, pour presque tout entier $i$ négatif, respectivement). De plus, $M^{\bullet\bullet}$ est appelé *diagonalement borné* (*borné supérieurement*, *borné inférieurement*, respectivement) si il est $n$-diagonalement borné (borné supérieurement, borné inférieurement, respectivement) pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

**Lemme 4.0.2.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne concrète avec des sommes directes dénombrables, et soit $M^{\bullet\bullet}\in DC(\mathcal{A})$. Si $n\in\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{H}^n(\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet}))=0$ dans le cas où*

(1) *$M^{\bullet\bullet}$ est $n$-diagonalement borné inférieurement avec $\mathrm{H}^{n-j}(M^{\bullet,j})=0$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$; ou*

(2) *$M^{\bullet\bullet}$ is $n$-diagonalement borné supérieurement avec $\mathrm{H}^{n-i}(M^{i,\bullet})=0$ pour tout $i\in\mathbb{Z}$.*

*Démonstration.* Il suffit de prouver (1). Soit un entier $n$. En particulier, il existe un entier $t<0$ tel que $M^{i,n-i}=0$ pour tout $i<t$. Soit $v^{\bullet\bullet}$ la différentielle verticale, et $h^{\bullet\bullet}$ la différentielle horizontale, de $M^{\bullet\bullet}$. Notons $(X^\bullet,d^\bullet)$ pour le complexe total $M^{\bullet\bullet}$. Considérons un élément $c=(c_{i,n-i})_{i\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{Ker}(d^n)$. Alors, $v^{i,n-i}(c_{i,n-i})+h^{i-1,n-i+1}(c_{i-1,n-i+1})=0$, pour tout $i\in\mathbb{Z}$. Puisque $c$ admet au plus un nombre fini de termes non nuls , on peut supposer que $c_{i,n-i}=0$ pour tout $i>0$. Alors, $h^{0,n}(c_{0,n})=-v^{1,n-1}(c_{1,n-1})=0$. Puisque $\mathrm{H}^0(M^{\bullet,n})=0$, il existe un $x_{-1,n}\in M^{-1,n}$ tel que $c_{0,n}=h^{-1,n}(x_{-1,n})$. Cela donne
$$h^{-1,n+1}(c_{-1,n+1}-v^{-1,n}(x_{-1,n}))=h^{-1,n+1}(c_{-1,n+1})+v^{0,n}(c_{0,n})=0.$$
Puisque $\mathrm{H}^{-1}(M^{\bullet,n+1})=0$, on voit que $c_{-1,n+1}-v^{-1,n}(x_{-1,n})=h^{-2,n+1}(x_{-2,n+1})$, avec $x_{-2,n+1}\in M^{-2,n+1}$. En continuant ce processus, nous trouvons $x_{-i,n-1+i}\in M^{i,n-1-i}$ tel que $c_{i,n-i}=v^{i,n-1-i}(x_{i,n-1-i})+$

$h^{i-1,n-i}(x_{i-1,n-i})$, pour $i = -1, \ldots, t$. Puisque $M^{t-1,n-t} = 0$, on voit que $h^{t,n-1-t}(x_{t,n-1-t}) = 0$. Posons $x = (x_{i,n-1-i})_{i \in \mathbb{Z}}$, où $x_{i,n-1-i} = 0$ for $i \geq 0$ ou $i < t$, on obtient $c = d^{n-1}(x)$. D'où le résultat.

$\square$

Comme conséquence immédiate du Lemme 4.0.2, on obtient une généralisation du lemme d'assemblement acyclique. [55, (2.7.1)].

**Corollaire 4.0.3.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne concrète avec des sommes directes dénombrables. Si $M^{\bullet\bullet} \in DC(\mathcal{A})$, alors $\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})$ est acyclique dans le cas $M^{\bullet\bullet}$ est diagonalement borné inférieurement avec des lignes acycliques ou diagonalement borné supérieurement avec des colonnes acycliques.*

Étant donné un morphisme de complexes doubles $f^{\bullet\bullet} : M^{\bullet\bullet} \to N^{\bullet\bullet}$, nous définirons un *cône horizontal* $H_{f^{\bullet\bullet}}$ et un *cône vertical* $V_{f^{\bullet\bullet}}$. En effet, $H_{f^{\bullet\bullet}}$ est le complexe double $(H^{\bullet\bullet}, v^{\bullet\bullet}, h^{\bullet\bullet})$ défini par $H^{i,j} = M^{i+1,j} \oplus N^{i,j}$ et

$$v^{i,j} = \begin{pmatrix} -v_{M}^{i+1,j} & 0 \\ 0 & v_{N}^{i,j} \end{pmatrix}, \ h^{i,j} = \begin{pmatrix} -h_{M}^{i+1,j} & 0 \\ f^{\,i+1,j} & h_{N}^{i,j} \end{pmatrix},$$

qui peut être visualisé comme suit :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & M^{i+1,j+1} \oplus N^{i,j+1} \arrow[u] \arrow[r, "{\begin{pmatrix} -h_{M}^{i+1,j+1} & 0 \\ f^{\,i+1,j+1} & h_{N}^{i,j+1} \end{pmatrix}}"] & M^{i+2,j+1} \oplus N^{i+1,j+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M^{i+1,j} \oplus N^{i,j} \arrow[u, "{\begin{pmatrix} -v_{M}^{i+1,j} & 0 \\ 0 & v_{N}^{i,j} \end{pmatrix}}"] \arrow[r, "{\begin{pmatrix} -h_{M}^{i+1,j} & 0 \\ f^{\,i+1,j} & h_{N}^{i,j} \end{pmatrix}}"] & M^{i+2,j} \oplus N^{i+1,j} \arrow[u, "{\begin{pmatrix} -v_{M}^{i+2,j} & 0 \\ 0 & v_{N}^{i+1,j} \end{pmatrix}}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

De manière similaire, on peut définir le cône vertical $V_{f^{\bullet\bullet}}$ of $f^{\bullet\bullet}$. L'observation suivante sera utile.

**Lemme 4.0.4.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec des sommes directes dénombrales, et soit $f^{\bullet\bullet} : M^{\bullet\bullet} \to N^{\bullet\bullet}$ un morphisme dans $DC(\mathcal{A})$.*

(1) *Si $f^{i,\bullet} : M^{i,\bullet} \to N^{i,\bullet}$ est un quasi-isomorphisme pour un $i \in \mathbb{Z}$, alors la i-ème colonne de $V_{f^{\bullet\bullet}}$ est acyclique.*

(2) *Si* $f^{\bullet,j} : M^{\bullet,j} \to N^{\bullet,j}$ *est un quasi-isomorphisme pour un* $j \in \mathbb{Z}$*, alors la* $j$*-ème ligne de* $H_{f^{\bullet\bullet}}$ *est acyclique.*

*Démonstration.* D'après la définition, on voit que la $i$-ème colonne de $V_{f^{\bullet\bullet}}$ est le cône $C_{f^{i,\bullet}}$ de $f^{i,\bullet} : M^{i,\bullet} \to N^{i,\bullet}$, tandis que la $j$-ème ligne de $H_{f^{\bullet\bullet}}$ est le cône $C_{f^{\bullet,j}}$ de $f^{\bullet,j} : M^{\bullet,j} \to N^{\bullet,j}$. □

Les résultats suivants indiquent que $T : DC(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A})$ envoie des cônes verticaux et des cônes horizontaux sur des cônes.

**Lemme 4.0.5.** *Soi* $\mathcal{A}$ *une catégorie abélienne avec des sommes directes dénombrables. Si* $f^{\bullet\bullet} : M^{\bullet\bullet} \to N^{\bullet\bullet}$ *in* $DC(\mathcal{A})$*, alors* $\mathbb{T}(H_{f^{\bullet\bullet}}) = C_{\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})} = \mathbb{T}(V_{f^{\bullet\bullet}})$.

Soit $f^{\bullet\bullet} : M^{\bullet\bullet} \to N^{\bullet\bullet}$ un morphisme dans $DC(\mathcal{A})$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, on obtient $\mathbb{T}(H_{f^{\bullet\bullet}})^n = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}(M^{i+1,n-i} \oplus N^{i,n-i})$ et $d^n_{\mathbb{T}(H_{f^{\bullet\bullet}})} = (d^n_{\mathbb{T}(H_{f^{\bullet\bullet}})}(j,i))_{(j,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, où $d^n_{\mathbb{T}(H_{f^{\bullet\bullet}})}(j,i) : M^{i+1,n-i} \oplus N^{i,n-i} \to M^{j+1,n+1-j} \oplus N^{j,n+1-j}$ est défini par

$$d^n_{\mathbb{T}(H_{f^{\bullet\bullet}})}(j,i) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -v_M^{i+1,n-i} & 0 \\ 0 & v_N^{i,n-i} \end{pmatrix}, & j = i; \\ \begin{pmatrix} -h_M^{i+1,n-i} & 0 \\ f^{\,i+1,n-i} & h_N^{i,n-i} \end{pmatrix}, & j = i+1; \\ 0, & j \neq i, i+1. \end{cases}$$

D'autre part, $\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet}) : \mathbb{T}(M^{\bullet\bullet}) \to \mathbb{T}(N^{\bullet\bullet})$ est un morphisme dans $C(\mathcal{A})$, dont le cône $C_{\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})}$ est défini par

$$C^n_{\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})} = \mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})^{n+1} \oplus \mathbb{T}(N^{\bullet\bullet})^n = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}(M^{i+1,n-i} \oplus N^{i,n-i}) = \mathbb{T}(H_{f^{\bullet\bullet}})^n,$$

et

$$d^n_{C_{\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})}} = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_{\mathbb{T}(M^{\bullet\bullet})} & 0 \\ \mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^{n+1} & d^n_{\mathbb{T}(N^{\bullet\bullet})} \end{pmatrix} = (d^n_{C_{\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})}}(j,i))_{(j,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},$$

où $d^n_{C_{\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})}}(j,i) : M^{i+1,n-i} \oplus N^{i,n-i} \to M^{j+1,n+1-j} \oplus N^{j,n+1-j}$ est défini par

$$\begin{pmatrix} -d^{n+1}_{(M^{\bullet\bullet})}(j,i) & 0 \\ \mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})^{n+1}(j,i) & d^n_{\mathbb{T}(N^{\bullet\bullet})}(j,i) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -v_M^{i+1,n-i} & 0 \\ 0 & v_N^{i,n-i} \end{pmatrix}, & j = i; \\ \begin{pmatrix} -h_M^{i+1,n-i} & 0 \\ f^{\,i+1,n-i} & h_N^{i,n-i} \end{pmatrix}, & j = i+1; \\ 0, & j \neq i, i+1. \end{cases}$$

Ainsi, $d^n_{C_{\mathbb{T}(f^{\bullet\bullet})}}(j,i) = d^n_{\mathbb{T}(H_{f^{\bullet\bullet}})}(j,i)$, for $i,j \in \mathbb{Z}$. Ceci établit la première partie du lemme et la deuxième partie peut être montrée de la même manière.

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories abéliennes concrètes avec les sommes directes dénombrables. Considérons un foncteur $\mathfrak{F} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{B}) : M \to \mathfrak{F}(M)^\bullet; f \mapsto \mathfrak{F}(f)^\bullet$. Nous l'étendrons aux complexes sur $\mathcal{A}$. Soit $M^\bullet \in C(\mathcal{A})$, appliquons $\mathfrak{F}$ à chacune de ses composantes on obtient un complexe double $\mathfrak{F}(M^\bullet)^\bullet$ sur $\mathcal{B}$ comme suit :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathfrak{F}(M^i)^{j+1} \arrow[u] \arrow[r, "\mathfrak{F}(d^i_M)^{j+1}"] & \mathfrak{F}(M^{i+1})^{j+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathfrak{F}(M^i)^j \arrow[u, "(-1)^i d^j_{\mathfrak{F}(M^i)}"] \arrow[r, "\mathfrak{F}(d^i_M)^j"] & \mathfrak{F}(M^{i+1})^j \arrow[u, "(-1)^{i+1} d^j_{\mathfrak{F}(M^{i+1})}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

La $i$-ème colonne de $\mathfrak{F}(M^\bullet)^\bullet$ est $\mathfrak{t}^i(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)$, le $i$-ème complexe de torsion de $\mathfrak{F}(M^i)^\bullet$. Soit un morphisme $f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ in $C(\mathcal{A})$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{F}(N^i)^{j+1} & & \\
\mathfrak{F}(M^i)^{j+1} \arrow[ur, "\mathfrak{F}(f^i)^{j+1}"] & & & \\
 & \mathfrak{F}(N^i)^j \arrow[uu, "(-1)^i d^j_{\mathfrak{F}(N^i)}"'] \arrow[rr, "\mathfrak{F}(d^i_N)^j"] & & \mathfrak{F}(N^{i+1})^j, \\
\mathfrak{F}(M^i)^j. \arrow[uu, "(-1)^i d^j_{\mathfrak{F}(M^i)}"] \arrow[ur, "\mathfrak{F}(f^i)^j"] \arrow[rr, "\mathfrak{F}(d^i_M)^j"] & & \mathfrak{F}(M^{i+1})^j \arrow[ur, "\mathfrak{F}(f^{i+1})^j"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, pour tout $i,j \in \mathbb{Z}$. Donc, $\mathfrak{F}(f^i)^j$ avec $i,j \in \mathbb{Z}$ induit un morphisme $\mathfrak{F}(f^\bullet)^\bullet : \mathfrak{F}(M^\bullet)^\bullet \to \mathfrak{F}(N^\bullet)^\bullet$ in $DC(\mathcal{B})$.

**Proposition 4.0.6.** *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des catégories abéliennes concrètes avec des sommes directes dénom` brables. un foncteur $\mathfrak{F} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{B})$ induit un foncteur*

$$\mathfrak{F}^{DC} : C(\mathcal{A}) \to DC(\mathcal{B}) : M^\bullet \mapsto \mathfrak{F}(M^\bullet)^\bullet; f^\bullet \mapsto \mathfrak{F}(f^\bullet)^\bullet.$$

(1) *Si* $M^\bullet$ *est un objet dans* $C(\mathcal{A})$*, alors* $\mathfrak{F}^{DC}(M^\bullet[1]) = \mathfrak{F}^{DC}(M^\bullet)[1]$.

(2) *Si* $f^\bullet$ *est un morphisme dans* $C(\mathcal{A})$*, alors* $\mathfrak{F}^{DC}(C_{f^\bullet}) = H_{\mathfrak{F}^{DC}(f^\bullet)}$ *et* $\mathfrak{F}^{DC}(f^\bullet)$ *est horizontalement homotope à zéro chaque fois que* $f^\bullet$ *est homotope à zéro.*

*Démonstration.* Soit $\mathfrak{F} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{B})$ Un foncteur. (1) est évident. Soit $f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ un morphisme dans $C(\mathcal{A})$. Notons $(C^\bullet, d^\bullet_{_C})$ son cône. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on obtient $\mathfrak{F}(C^n)^\bullet = \mathfrak{F}(M^{n+1})^\bullet \oplus \mathfrak{F}(N^n)^\bullet$ avec

$$d^\bullet_{\mathfrak{F}(C^n)} = \begin{pmatrix} d^\bullet_{\mathfrak{F}(M^{n+1})} & 0 \\ 0 & d^\bullet_{(N^n)} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{F}(d^n_{_C})^\bullet = \begin{pmatrix} -\mathfrak{F}(d^{n+1}_{_M})^\bullet & 0 \\ \mathfrak{F}(f^{n+1})^\bullet & \mathfrak{F}(d^n_{_N})^\bullet \end{pmatrix}.$$

Écrivons $(H^{\bullet\bullet}, v^{\bullet\bullet}_{_H}, h^{\bullet\bullet}_{_H})$ pour le cône horizontal de $\mathfrak{F}^{DC}(f^\bullet) : \mathfrak{F}^{DC}(M^\bullet) \to \mathfrak{F}^{DC}(N^\bullet)$, où $\mathfrak{F}^{DC}(M^\bullet) = F(M^\bullet)^\bullet$. Soient $i, j \in \mathbb{Z}$, par définition, on obtient

$$H^{i,j} = \mathfrak{F}(M^{i+1})^j \oplus \mathfrak{F}(N^i)^j = \mathfrak{F}(C^i)^j = \mathfrak{F}^{DC}(C^\bullet)^{i,j}$$

avec

$$h^{i,j}_{_H} = \begin{pmatrix} -\mathfrak{F}(d_{M^{i+1}})^j & 0 \\ \mathfrak{F}(f^{i+1})^j & \mathfrak{F}(d_{N^i})^j \end{pmatrix} = \mathfrak{F}(d^i_C)^j = h^{i,j}_{\mathfrak{F}^{DC}(C^\bullet)}$$

and

$$v^{i,j}_{_H} = \begin{pmatrix} (-1)^i d^j_{\mathfrak{F}(M^{i+1})} & 0 \\ 0 & (-1)^i d^j_{\mathfrak{F}(N^i)} \end{pmatrix} = (-1)^i d^j_{\mathfrak{F}(C^i)} = v^{i,j}_{\mathfrak{F}^{DC}(C^\bullet)}.$$

c-à-d, $C^\bullet = H^\bullet$. Supposons que $f^\bullet$ est homotope à zéro. Soit $u^i : M^i \to N^{i-1}$ un morphisme tel que $f^i = u^{i+1} \circ d^i_{_M} + d^{i-1}_{_N} \circ u^i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. En particulier, $\mathfrak{F}(f^i)^j = \mathfrak{F}(u^{i+1})^j \circ \mathfrak{F}(d^i_{_M})^j + \mathfrak{F}(d^{i-1}_{_N})^j \circ \mathfrak{F}(u^i)^j$, pour out $j \in \mathbb{Z}$. De plus, puisque $\mathfrak{F}(u^i)^\bullet : \mathfrak{F}(M^i) \to \mathfrak{F}(N^{i-1})^\bullet$ est un morphisme de complexe, on obtient

$$(-1)^i \mathfrak{F}(u^i)^{j+1} \circ d^j_{\mathfrak{F}(M^i)} + (-1)^i d^j_{\mathfrak{F}(N^{i-1})} \circ \mathfrak{F}(u^i)^j = 0,$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Considérons $F(u^i)^j : \mathfrak{F}(M^i)^j \to \mathfrak{F}(N^{i-1})^j$ avec $i, j \in \mathbb{Z}$, on voit que $\mathfrak{F}^{DC}(f^\bullet)$ est horizontalement homotope à zéro. $\square$

Le résultat suivant découle immédiatement des propositions 4.0.1 et 4.0.6, qui est une version générale du Lemme 3.7 indiquée dans [7].

**Proposition 4.0.7.** *Soient* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *deux catégories abéliennes concrètes avec des sommes directes dénom` brables. Un foncteur* $\mathfrak{F} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{B})$ *s'étend à un foncteur* $\mathfrak{F}^C = \mathbb{T} \circ \mathfrak{F}^{DC} : C(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{B})$.

(1) *Si $M$ est un objet dans $\mathcal{A}$, alors $\mathfrak{F}^C(M) = \mathfrak{F}(M)^\bullet$.*

(2) *Si $M^\bullet$ est un complexe dans $C(\mathcal{A})$, alors $\mathfrak{F}^C(M^\bullet[1]) = \mathfrak{F}^C(M^\bullet)[1]$.*

(3) *Si $f^\bullet$ est un morphisme dans $C(\mathcal{A})$, alors $\mathfrak{F}^C(C_{f^\bullet}) = C_{\mathfrak{F}^C(f^\bullet)}$ et $\mathfrak{F}^C(f^\bullet)$ is homotope à zéro chaque fois que $f^\bullet$ est homotope à zéro.*

**Lemme 4.0.8.** *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des catégories abéliennes concrètes avec des sommes directes dénom` brables. Si $\mathfrak{F} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{B})$ et $\mathfrak{G} : \mathcal{B} \to C(\mathcal{C})$ sont des foncteurs, alors $(\mathfrak{G}^C \circ \mathfrak{F})^C = \mathfrak{G}^C \circ \mathfrak{F}^C$.*

*Démonstration.* Soient $\mathfrak{F} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{B})$ et $\mathfrak{G} : \mathcal{B} \to C(\mathcal{C})$ deux fonteurs. Fixons un complexe $M^\bullet \in C(\mathcal{A})$. Étant donné un entier $n$, on obtient $(\mathfrak{G}^C \circ \mathfrak{F})^C(M^\bullet)^n = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\, \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)^{n-i}$

$and d^n_{(\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F})^C(M^\bullet)} = (d^n_{(\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F})^C(M^\bullet)}(j,i))_{(j,i)\in\mathbb{Z}^2}$, où

$$d^n_{(\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F})^C(M^\bullet)}(j,i) : \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)^{n-i} \to \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^j)^\bullet)^{n+1-j}$$

est donnée par

$$d^n_{(\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F})^C(M^\bullet)}(j,i) = \begin{cases} (-1)^i d^{n-i}_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)}, & j = i; \\ \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(d^i_M)^\bullet)^{n-i}, & j = i+1 \\ 0, & j \neq i, i+1. \end{cases}$$

De plus, par définition, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)^{n-i} & \xrightarrow{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(d^i_M)^\bullet)^{n-i}} & \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^{i+1})^\bullet)^{n-i} \\ \| & & \| \\ \oplus_{p\in\mathbb{Z}}\, \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^p)^{n-i-p} & \xrightarrow{\left(\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(d^i_M)^\bullet)^{n-i}(q,p)\right)_{(q,p)\in\mathbb{Z}^2}} & \oplus_{q\in\mathbb{Z}}\, \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^{i+1})^q)^{n-i-q}, \end{array}$$

où

$$\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(d^i_M)^\bullet)^{n-i}(q,p) = \begin{cases} \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(d^i_M)^p)^{n-i-p}, & q = p; \\ 0, & q \neq p, \end{cases}$$

et un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)^{n-i} & \xrightarrow{d^{n-i}_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)}} & \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)^{n+1-i} \\ \| & & \| \\ \oplus_{p\in\mathbb{Z}}\, \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^p)^{n-i-p} & \xrightarrow{(d^{n-i}_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)}(q,p))_{(q,p)\in\mathbb{Z}^2}} & \oplus_{q\in\mathbb{Z}}\, \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^{i+1})^q)^{n-i-q}, \end{array}$$

où

$$d^{n-i}_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet)}(q,p) = \begin{cases} (-1)^p d^{n-i-p}_{\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^p)}, & q=p; \\ \mathfrak{G}(d^p_{\mathfrak{F}(M^i)})^{n-i-p}, & q=p+1; \\ 0, & q \neq p, p+1. \end{cases}$$

De plus, $(\mathfrak{G}^C \circ \mathfrak{F})^C(M^\bullet)$ est le complexe décrit par le diagramme

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{G}^C \circ \mathfrak{F})^C(M^\bullet)^n \arrow[r, "d^n_{(\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F})^C(M^\bullet)}"] \arrow[d, equal] & (\mathfrak{G}^C \circ \mathfrak{F})^C(M^\bullet)^{n+1} \arrow[d, equal] \\ \oplus_{(i,p)\in\mathbb{Z}^2}\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^p)^{n-i-p} \arrow[r, "(d^n_{(\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F})^C(M^\bullet)}(j,q;i,p))_{(j,q;i,p)\in\mathbb{Z}^4}"] & \oplus_{(j,q)\in\mathbb{Z}^2}\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^j)^q)^{n+1-j-q}, \end{tikzcd}$$

où

$$d^n_{(\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F})^C(M^\bullet)}(j,q;i,p) = \begin{cases} (-1)^{i+p} d^{n-i-p}_{\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^p)}, & j=i; q=p; \\ (-1)^i \mathfrak{G}(d^p_{\mathfrak{F}(M^i)})^{n-i-p}, & j=i; q=p+1; \\ \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(d^i_M)^p)^{n-i-p} & j=i+1, q=p; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étant donné $n$, on obtient $\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))^n = \oplus_{s\in\mathbb{Z}}\mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^s)^{n-s}$ et $d^n_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))} = (d^n_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))}(t,s))_{(t,s)\in\mathbb{Z}^2}$,

où

$$d^n_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))}(t,s) : \mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^s)^{n-s} \to \mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^t)^{n+1-t}$$

est donnée par

$$d^n_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))}(t,s) = \begin{cases} (-1)^s d^{n-s}_{\mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^s)}, & t=s; \\ \mathfrak{G}(d^s_{\mathfrak{F}^C(M^\bullet)})^{n-s}, & t=s+1; \\ 0, & t \neq s, s+1. \end{cases}$$

En outre, par définition, on obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^s)^{n-s} \arrow[r, "d^{n-s}_{\mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^s)}"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^s)^{n-s+1} \arrow[d, equal] \\ \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^{s-i})^{n-s} \arrow[r, "(d^{n-s}_{\mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^s)}(j,i))_{(j,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}"] & \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^j)^{s-j})^{n-s+1}, \end{tikzcd}$$

où

$$d^{n-s}_{\mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^s)}(j,i) = \begin{cases} d^{n-s}_{\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^{s-i})}, & j=i; \\ 0, & j\neq i \end{cases}$$

et un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^s)^{n-s} \arrow[r, "\mathfrak{G}(d^s_{\mathfrak{F}^C(M^\bullet)})^{n-s}"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{G}(\mathfrak{F}^C(M^\bullet)^{s+1})^{n-s} \arrow[d, equal] \\ \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^{s-i})^{n-s} \arrow[r, "(\mathfrak{G}(d^s_{\mathfrak{F}^C(M^\bullet)})^{n-s}(j,i))_{(j,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}"] & \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^j)^{s+1-j})^{n-s}, \end{tikzcd}$$

où

$$\mathfrak{G}(d^s_{\mathfrak{F}^C(M^\bullet)})^{n-s}(j,i) = \begin{cases} (-1)^i\, \mathfrak{G}(d^{s-i}_{\mathfrak{F}(M^i)})^{n-s}, & j=i; \\ \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(d^i_M)^{s-i})^{n-s}, & j=i+1; \\ 0, & j\neq i, i+1. \end{cases}$$

Donc, $\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))$ est un complexe décrit par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))^n & \xrightarrow{\qquad d^n_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))} \qquad} & \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))^{n+1} \\ \| & & \| \\ \oplus_{(i,s)\in\mathbb{Z}^2}\, \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^{s-i})^{n-s} & \xrightarrow{(d^n_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))}(j,t;i,s))_{(j,t;i,s)\in\mathbb{Z}^4}} & \oplus_{(j,t)\in\mathbb{Z}^2}\, \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^j)^{t-j})^{n+1-t} \end{array}$$

où

$$d^n_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))}(j,t;i,s) = \begin{cases} (-1)^s d^{n-s}_{\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^{s-i})}, & t=s, j=i; \\ (-1)^i \mathfrak{G}(d^{s-i}_{\mathfrak{F}(M^i)})^{n-s}, & t=s+1, j=i; \\ \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(d^i_M)^{s-i})^{n-s}, & t=s+1, j=i+1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Posons $p=s-i$ and $q=t-j$, on voit que $\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))$ est aussi décrit par

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))^n & \xrightarrow{\qquad d^n_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))} \qquad} & \mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))^{n+1} \\ \| & & \| \\ \oplus_{(i,p)\in\mathbb{Z}^2}\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^p)^{n-i-p} & \xrightarrow{(d^n(j,q;i,p))_{(j,q;i,p)\in\mathbb{Z}^4}} & \oplus_{(j,q)\in\mathbb{Z}^2}\, \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^j)^q)^{n+1-j-q} \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} d^n(j,q;i,p) &= d^n_{\mathfrak{G}^C(\mathfrak{F}^C(M^\bullet))}(j,q+j;i,p+i) \\ &= \begin{cases} (-1)^{p+i} d^{n-i-p}_{\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(M^i)^p)}, & q=p, j=i; \\ (-1)^i \mathfrak{G}(d^{s-i}_{\mathfrak{F}(M^i)})^{n-i-p}, & q=p+1, j=i; \\ \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(d^i_M)^p)^{n-i-p}, & q=p, j=i+1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, on conclut que $(\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F})^C(M^\bullet) = (\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F}^C)(M^\bullet)$, pour tout $M^\bullet\in C(\mathcal{A})$. De même, on prouve que $(\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F})^C(f^\bullet) = (\mathfrak{G}^C\circ\mathfrak{F}^C)(f^\bullet)$, pour tout morphisme $f^\bullet : M^\bullet\to N^\bullet$ in $C(\mathcal{A})$.

□

Pour conclure cette section, nous étudierons comment étendre les morphismes fonctoriels.

**Lemme 4.0.9.** *Soient $\mathfrak{F},\mathfrak{G} : \mathcal{A}\to C(\mathcal{B})$ deux foncteurs, où $\mathcal{A},\mathcal{B}$ des catégories abéliennes avec des sommes directes dénombrables. Un morphisme fonctoriel $\eta : \mathfrak{F}\to\mathfrak{G}$ induit des morphismes fonctoriels $\eta^{DC} : \mathfrak{F}^{DC}\to\mathfrak{G}^{DC}$ and $\eta^C : \mathfrak{F}^C\to\mathfrak{G}^C$.*

*Démonstration.* Soit $\eta = (\eta^\bullet_M)_{M\in\mathcal{A}} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ un morphisme fonctoriel. Soit un complexe $M^\bullet \in C(\mathcal{A})$. Soient $i, j \in \mathbb{Z}$, puisque $\eta^\bullet_M : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{G}(M)$ est naturel dans $M$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{G}(M^i)^{j+1} & & \\
\mathfrak{F}(M^i)^{j+1} \arrow[ur, "\eta^{j+1}_{M^i}"] & & & \\
 & \mathfrak{G}(M^i)^j \arrow[uu, "(-1)^i d^j_{\mathfrak{G}(M^i)}"'] \arrow[rr, "\mathfrak{G}(d^i_M)^j"] & & \mathfrak{G}(M^{i+1})^j. \\
\mathfrak{F}(M^i)^j \arrow[uu, "(-1)^i d^j_{\mathfrak{F}(M^i)}"] \arrow[ur, "\eta^j_{M^i}"] \arrow[rr, "\mathfrak{F}(d^i_M)^j"] & & \mathfrak{F}(M^{i+1})^j \arrow[ur, "\eta^j_{M^{i+1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons $\eta^{i,j}_{M^\bullet} = \eta^j_{M^i}$, on obtient un morphisme $\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet} : \mathfrak{F}^{DC}(M^\bullet) \to \mathfrak{G}^{DC}(M^\bullet)$ in $DC(\mathcal{B})$, et un morphisme $\eta^\bullet_{M^\bullet} = \mathbb{T}(\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}) : \mathfrak{F}^C(M^\bullet) \to \mathfrak{G}^C(M^\bullet)$ in $C(\mathcal{B})$. Considérons un morphisme $f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ in $C(\mathcal{A})$. Soient $i, j \in \mathbb{Z}$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(M^i)^j \arrow[r, "\eta^j_{M^i}"] \arrow[d, "\mathfrak{F}(f^i)^j"'] & \mathfrak{G}(M^i)^j \arrow[d, "\mathfrak{G}(f^i)^j"] \\
\mathfrak{F}(N^i)^j \arrow[r, "\eta^j_{N^i}"] & \mathfrak{G}(N^i)^j.
\end{tikzcd}$$

Donc, $\mathfrak{G}^{DC}(f^\bullet) \circ \eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet} = \eta^{\bullet\bullet}_{N^\bullet} \circ \mathfrak{F}^{DC}(f^\bullet)$. Appliquons $\mathbb{T} : DC(\mathcal{B}) \to C(\mathcal{B})$ on a que $\mathfrak{G}^C(f^\bullet) \circ \eta^\bullet_{M^\bullet} = \eta^\bullet_{N^\bullet} \circ \mathfrak{F}^C(f^\bullet)$. Donc on obtient un morphisme fonctoriel $\eta^{DC} = (\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet})_{M^\bullet \in C(\mathcal{A})} : \mathfrak{F}^{DC} \to \mathfrak{G}^{DC}$ et un morphisme fonctoriel $\eta^C = (\eta^\bullet_{M^\bullet})_{M^\bullet \in C(\mathcal{A})} : \mathfrak{F}^C \to \mathfrak{G}^C$.

□

En général, l'extension d'un quasi-isomorphisme fonctoriel n'est pas nécessairement un quasi-isomorphisme fonctoriel. Le lemme suivant donne quelques conditions suffisantes pour que ce soit le cas.

**Lemme 4.0.10.** *Soient $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{B})$ deux foncteurs, où $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont des catégories abéliennes avec des sommes directes dénombrables . Soit $\eta : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ un morphisme fonctoriel qui induit des morphismes fonctoriels $\eta^{DC} : \mathfrak{F}^{DC} \to \mathfrak{G}^{DC}$ et $\eta^C : \mathfrak{F}^C \to \mathfrak{G}^C$. Supposons que $\mathfrak{F}(M^\bullet)^\bullet$ et $\mathfrak{G}(M^\bullet)^\bullet$ sont diagonalement bornés supérieurements pour un $M^\bullet \in C(\mathcal{A})$. Si $\eta^\bullet_{M^i}$ est un quasi-isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$, alors $\eta^C_{M^\bullet}$ est un quasi-isomorphisme.*

*Démonstration.* Notons $\eta = (\eta^\bullet_M)_{M\in\mathcal{A}}$, où $\eta^\bullet_M : \mathfrak{F}(M)^\bullet \to \mathfrak{G}(M)^\bullet$ est un morphisme dans $C(\mathcal{B})$. Par définition, $\eta^{DC} = (\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet})_{M^\bullet \in C(\mathcal{A})}$, où $\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet} : \mathfrak{F}(M^\bullet)^\bullet \to \mathfrak{G}(M^\bullet)^\bullet$ est défini tel que $\eta^{i,j}_{M^\bullet} = \eta^{j}_{M^i} : \mathfrak{F}(M^i)^j \to \mathfrak{G}(M^i)^j$. De plus, $\eta^C = (\eta^\bullet_{M^\bullet})_{M^\bullet \in C(\mathcal{A})}$, où $\eta^\bullet_{M^\bullet} = \mathbb{T}(\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}) : \mathbb{T}(\mathfrak{F}(M^\bullet)^\bullet) \to \mathbb{T}(\mathfrak{G}(M^\bullet)^\bullet)$.

Puisque $\mathfrak{F}(M^\bullet)^\bullet$ et $\mathfrak{G}(M^\bullet)^\bullet$ sont diagonalement bornés supérieurements, le cone vertical $V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}}$ de $\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}$ est diagonalement borné supérieurement. Supposons que $\eta^\bullet_{M^i} : \mathfrak{F}(M^i)^\bullet \to \mathfrak{G}(M^i)^\bullet$ est un quasi-isomorphisme, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Alors $\eta^{i,\bullet} : \mathfrak{t}^i(\mathfrak{F}(M^i)^\bullet \to \mathfrak{t}^i(\mathfrak{G}(M^i)^\bullet)$, c-à-d le morphisme de la $i$-ème colonne de $\mathfrak{F}(M^\bullet)^\bullet$ à la $i$-ème colonne de $\mathfrak{G}(M^\bullet)^\bullet$, est un quasi-isomorphisme, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Par le lemme 4.0.4(1), les colonnes de $V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}}$ sont exactes, et par le corollaire 4.0.3, $\mathbb{T}(V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}})$ est acyclique. Puisque $C_{\eta^\bullet_{M^\bullet}} = C_{\mathbb{T}(\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet})} = \mathbb{T}(V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}})$ ; voir (4.0.5), on voit que $C_{\eta^\bullet_{M^\bullet}}$ est acyclique. Donc, $\eta^C_{M^\bullet} = \eta^\bullet_{M^\bullet}$ est un quasi-isomorphisme.

$\square$

# CHAPITRE 5

# Dualité de Koszul

## 5.1 Théorème de Beilinson-Ginzburg-Soegel

Dans cette section, nous expliquerons rapidement la théorie que Beilinson, Ginzburg et Soegel, ont utilisé pour que le lecteur soit plus à l'aise, et pour comprendre la différence entre nos résultats [12] et leurs résultats [10].

La notion d'algèbre de **Koszul** a été introduite par S. Priddy [48].

**Définition 5.1.1.** *Soit $A$ une algèbre positivement graduée.*

*On dit que $A$ est une algèbre de Koszul, si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

*i.* $A_0$ *est semisimple.*

*ii.* $A_0$ *admet une résolution graduée linéaire, c-à-d une résolution de la forme :*

$... \to P^1 \to P^0 \to A_0 \to 0$ *tels que* $P^i = A(P^i)_i$ *( le projectif* $P^i$ *est engendré en degré* $i$*).*

**Définition 5.1.2.** *Soit $A$ une algèbre positivement graduée. On dit que $A$ est quadratique si :*

*i.* $A_0$ *est semisimple*

*ii.* $A$ *est engendré par* $A_1$ *sur* $A_0$ *tel que les relations de* $A$ *sont en degré 2.*

**Théorème 5.1.3.** *Une algèbre de Koszul est quadratique.*

Soit $A$ une algèbre quadratique.

Le complexe de Koszul noté $K^\bullet$ est défini par ses composantes $K^i = A \otimes_{A_0} \tilde{K}(i)$ où $\tilde{K}((i)) = \cap_j A_1^{\otimes j} \otimes (R) \otimes A_1^{\otimes i-j-2} \subset A_1^{\otimes i}$ et $R$ l'ensemble des relations de degré 2 de $A$. Les différentielles sont les restrictions des différentielles $A_1^{\otimes i+1} \to A_1^{\otimes i}$, données par $a_0 \otimes ... \otimes a_i \to a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_i$.

**Théorème 5.1.4.** *Soit $A$ une algèbre quadratique. Alors $A$ est de Koszul si et seulement si le complexe de Koszul est une résolution de $A_0$.*

Supposons maintenant que $A$ est localement de type finie à gauche (localement de type finie à droite, respectivement), c-à-d, les $A_i$ sont des $A_0$-modules à gauche de type fini ( ou des $A_0$-modules à droite de type fini, respectivement). Dans ce cas on peut définir le dual quadratique de $A$ comme étant l'algèbre $A^! = T_{A_0}(A_1^*)/(R^\perp)$, où $R^\perp = \{f \in A_2^*/f(R) = 0\}$.

**Définition 5.1.5.** *Soit $A = \oplus_{j \geq 0} A_j$ une algèbre positivement graduée.*
*Notons $\mathbf{C}(\mathrm{Gmod}A)$ la catégorie d'homotopie des complexes des modules gradués sur $A$. Notons $\mathbf{C}^\downarrow(\mathrm{Gmod}A)$ la sous-catégorie de $\mathbf{C}(\mathrm{Gmod}A)$ des complexes $M$ vérifient une condition :*
*$M_j^i = 0$ si $i << 0$ ou $i+j >> 0$ et $\mathbf{C}^\uparrow(\mathrm{Gmod}A)$ la sous-catégorie des complexes tels que $M_j^i = 0$ si $i >> 0$ ou $i + j << 0$. Alors $D^\downarrow(\mathrm{Gmod}A)$ et $D^\uparrow(\mathrm{Gmod}A)$ sont les localisations par les quasi-isomorphismes de $\mathbf{C}^\downarrow(\mathrm{Gmod}A)$ et $\mathbf{C}^\uparrow(\mathrm{Gmod}A)$, respectivement.*

Le théorème principal dans [10] est le suivant :

**Théorème 5.1.6.** *Soit $A$ une algèbre de Koszul finie à gauche. Alors il existe une équivalence de catégories triangulées $D^\downarrow(\mathrm{Gmod}A) \cong D^\uparrow(\mathrm{Gmod}A^!)$.*

Sous certaines conditions, on peut obtenir une équivalence au niveau des catégories dérivées bornées.

**Théorème 5.1.7.** *Soit $A$ une algèbre de Koszul. Supposons que $A$ est un bimodule de type fini sur $A_0$, et que $A_i = 0$ pour $i >> 0$. Supposons de plus que $A^!$ est noethérien à gauche. Alors la dualité de Koszul induit une équivalence de catégories triangulées $D^b(\mathrm{Gmod}A) \cong D^b(\mathrm{Gmod}A^!)$.*

Une belle application de ce dernier théorème en théorie des représentations des algèbres de dimension finie est la suivante :

**Théorème 5.1.8.** *Soit $A$ une algèbre graduée de dimension finie et de dimension globale finie. Alors on a une équivalence de catégories triangulées* $D^b(\mathrm{Gmod}A) \cong D^b(\mathrm{Gmod}A^!)$.

Voir notre version de ce dernier théorème [12].

Plusieurs généralisations ont été effectués de la dualité de Koszul, notamment les travaux de G.Floystad [22] sur des algèbres graduées différentielles et de Mazorchuk-Ovsienko-Stroppel [44] sur des catégories positivement graduées.

Maintenant une question naturelle se pose. Est-il possible de prouver la dualité de Koszul pour les catégories des modules non-graduées ?

Dans ce qui suit, Bouhada-Huang-Liu ont prouvé la dualité de Koszul pour les catégories des modules sur des catégories localement bornées de Koszul, dont le carquois est graduable et localement fini.

## 5.2 Algèbre de Koszul et complexe de Koszul

L'objectif de cette section est de présenter un compte-rendu combinatoire de la théorie de Koszul pour les algèbres quadratiques définies par un carquois localement fini et pour tous les modules ( pas seulement ceux qui sont gradués). Bien que nos principaux résultats soient similaires à ceux de [10], nous adopterons une approche élémentaire avec un point de vue local et fournirons des arguments plus détaillés. En effet, en localisant le complexe de Koszul indiqué dans [10], on obtient un complexe local de Koszul associé à chaque module simple $S$, qui contient toujours une 2-résolution projective de $S$, et c'est une résolution projective si et seulement si $S$ admet une résolution projective linéaire. En utilisant une interprétation alternative d'un complexe local de Koszul, nous montrerons qu'une algèbre quadratique est de Koszul si et seulement si son dual quadratique est de Koszul. Dans le cas localement de dimension finie, nous montrerons qu'une algèbre quadratique est de Koszul si et seulement si chaque module simple a une co-résolution linéaire injective, ou d'une manière équivalente, l'algèbre opposée est de Koszul.

Tout au long de cette section, nous notons $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un est idéal quadratique dans $kQ$. Nous commençons avec une notation. Soit $a, x \in Q_0$ et $n \geq 0$. Rappelons que $R_n(a,x) = R(a,x) \cap kQ_n(a,x)$. Pour $n = 0, 1$, on pose $R^{(n)}(a,x) = kQ_n(a,x)$. Pour $n \geq 2$, soit

$R^{(n)}(a,x)$ les sous-espaces vectoriels de $R_n(a,x)$ des éléments $\gamma$ qui, pour tout $0 \le j \le n-2$, peuvent être écris comme $\gamma = \sum_i \zeta_i \rho_i \delta_i$, pour un $\zeta_i \in kQ_{n-2-j}(c_i, x)$; $\rho_i \in R_2(b_i, c_i)$; $\delta_i \in kQ_j(a, b_i)$, où $b_i, c_i \in Q_0$. En particulier, $R^{(2)}(a,x) = R_2(a,x)$. En outre, posons $R^{(n)}(a,-) = \oplus_{x \in Q_0} R^{(n)}(a,x)$. Étant donné une flèche $\alpha$ in $Q$, il existe une unique application $k$-linéaire $\partial_\alpha : kQ \to kQ$ telle que, pour chaque chemin $\rho$, que $\partial_\alpha(\rho) = \delta$ si $\rho = \alpha\delta$ ; et $\partial_\alpha(\rho) = 0$ si $\alpha$ n'est pas une flèche terminale de $\rho$. En particulier, $\partial_\alpha$ s'annule sur tous les chemins triviaux dans $Q$, tandis que $\partial_\alpha(\alpha) = \varepsilon_{s(\alpha)}$.

**Lemme 5.2.1.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un idéal quadratique. Soit $a, x, y \in Q_0$ and $n > 0$, on obtient un morphisme $\Lambda$-linéaire*

$$\partial_a^{-n}(y,x) = \textstyle\sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} P[\bar{\alpha}] \otimes \partial_\alpha : P_x \otimes R^{(n)}(a,x) \to P_y \otimes R^{(n-1)}(a,y)$$

*tel que $\partial_a^{-n}(y,x)(u \otimes \zeta\delta) = u\bar{\zeta} \otimes \delta$, pour tout $u \in P_x$ et $\zeta\delta \in R^{(n)}(a,x)$ avec $\zeta \in kQ_1(y,x)$ et $\delta \in kQ_{n-1}(a,y)$.*

*Démonstration.* Fixons $a, x, y \in Q_0$ and $n > 0$. D'abord, pour chaque $\alpha \in Q_1(y,x)$, $\partial_\alpha$ envoie $R^{(n)}(a,x)$ à $R^{(n-1)}(a,y)$. Puisque $\partial_\alpha$ envoie $kQ_n(a,x)$ au $kQ_{n-1}(a,y)$, on peut supposer que $n \ge 3$. Soit $\gamma \in R^{(n)}(a,x)$ et $0 \le j \le (n-1)-2$. Par définition, $\gamma = \sum_{i=1}^r \alpha_i \zeta_i \rho_i \delta_i$, où $\alpha_i \in Q_1$, $\zeta_i \in kQ_{n-3-j}$, $\rho_i \in R_2$, et $\delta_i \in kQ_j$. On peut supposer qu'il existe des $1 \le s \le r$ tels que $\alpha_i = \alpha$ si et seulement si $1 \le i \le s$. Alors, $\partial_\alpha(\gamma) = \sum_{i=1}^s \zeta_i \rho_i \delta_i$, où $\zeta_i \in kQ_{n-3-j}$; $\rho_i \in R_2$; $\delta_i \in kQ_j$. Par définition, $\partial_\alpha(\gamma) \in R^{(n-1)}(a,y)$. Ceci établit notre énoncé. Par conséquent, on obtient un morphisme $\partial_a^{-n}(y,x)$ comme indiqué dans le lemme. Soit $u \in P_x$ et $\zeta\delta \in R^{(n)}(a,x)$ avec $\zeta \in kQ_1(y,x)$ et $\delta \in kQ_{n-1}(a,y)$. écrivons $\zeta = \sum_{\beta \in Q_1(y,x)} \lambda_\beta \beta$ avec $\lambda_\beta \in k$. On a alors

$$\partial_a^{-n}(x,y)(u \otimes \zeta\delta) = \textstyle\sum_{\alpha,\beta \in Q_1(y,x)} P[\bar{\alpha}](u) \otimes \lambda_\beta \partial_\alpha(\beta\delta) = u\bar{\zeta} \otimes \delta.$$

□

Étant donné $a \in Q_0$, en vertu du le lemme 5.2.1, on peut définir une suite $K_a^\bullet$ comme suit :

$$\cdots \longrightarrow K_a^{-n} \xrightarrow{\partial_a^{-n}} K_a^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_a^{-1} \xrightarrow{\partial_a^{-1}} K_a^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

où $K_a^{-n} = \oplus_{x \in Q_0} P_x \otimes R^{(n)}(a,x)$ pour $n \ge 0$ et $\partial_a^{-n} = (\partial_a^{-n}(y,x))_{(y,x) \in Q_0 \times Q_0}$, pour $n > 0$. En vertu du lemme 5.2.1, $\partial_a^{-n}$ est homogene de degré 1. Puisque $K_a^0 = P_a \otimes k\varepsilon_a$, nous avons un morphisme $\Lambda$-linéaire $\partial_a^0 : K_a^0 \to S_a : e_a \otimes \varepsilon_a \mapsto e_a + JP_a$.

**Lemme 5.2.2.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ un carquois localement fini et $R$ un idéal quadratique. Soit $a \in Q_0$, la suite $K_a^\bullet$ est un complexe sur* proj$\Lambda$ *avec*

$$K_a^{-2} \xrightarrow{\partial_a^{-2}} K_a^{-1} \xrightarrow{\partial_a^{-1}} K_a^0 \xrightarrow{\partial_a^0} S_a \longrightarrow 0$$

*une 2-résolution linéaire projective de $S_a$ sur* proj$\Lambda$.

*Démonstration.* Fixons $a \in Q_0$. Observons que $R^{(n)}(a,x)$ est de dimension finie et s'annule pour presque tous les $x \in Q_0$. Donc, $K_a^{-n} \in \text{proj}\Lambda$ pour tout $n \geq 0$. Soit $\alpha_i : a \to b_i$, $i = 1, \ldots, r$, soit une flèche dans $Q_1(a,-)$, on voit que $K_a^{-1} = \otimes_{i=1}^r P_{b_i} \otimes k\alpha_i$. Soit $\Omega$ un ensemble générateur minimal pour $R$, et soit $\rho_j \in \Omega(a, c_j)$ avec $c_j \in Q_0$, $j = 1, \ldots, s$, des relations dans $\Omega(a,-)$. Alors, $K_a^{-2} = \oplus_{j=1}^s P_{c_j} \otimes k\rho_j$. Écrivons $\rho_j = \sum_{j=1}^r \gamma_{ij}\alpha_i$ pour un $\gamma_{ij} \in kQ_1(b_i, c_j)$, en vertu du Lemme 5.2.1, on obtient un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_{c_1} \oplus \cdots \oplus P_{c_s} & \xrightarrow{(P[\bar\gamma_{ij}])_{r\times s}} & P_{b_1} \oplus \cdots \oplus P_{b_r} & \xrightarrow{(P[\bar\alpha_1],\cdots,P[\bar\alpha_r])} & P_a & \xrightarrow{d_0} & S_a & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \| & & \\
K_a^{-2} & \xrightarrow{\partial_a^{-2}} & K_a^{-1} & \xrightarrow{\partial_a^{-1}} & P_a & \xrightarrow{\partial_a^0} & S_a & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où $f_a, f_1, f_2$ sont des isomorphismes gradués définis de telle sorte que $f_a(e_a) = e_a \otimes \varepsilon_a$; $f_1(e_{b_i}) = e_{b_i} \otimes \alpha_i$, $i = 1, \ldots, r$; et $f_2(e_{c_j}) = e_{c_j} \otimes \rho_j$, $j = 1, \ldots, s$. En vertu du lemme 2.2.15, nous concluons que la ligne inférieure est une 2-resolution liéaire projective de $S_a$. Soit maintenant $n > 2$. Considérons $v \in P_x$ et $\gamma \in R^{(n)}(a,x)$, où $x \in Q_0$. Pour montrer que $(\partial_a^{1-n} \circ \partial_a^{-n})(v \otimes \gamma) = 0$, on va supposer que $\gamma = \rho\delta$, pour un $\rho \in R_2(z,x)$ et $\delta \in kQ_{n-2}(a,z)$ avec $z \in Q_0$. Écrivons $\rho = \sum_{i=1}^s \lambda_i\beta_i\alpha_i$, pour un $\lambda_i \in k$, $\alpha_i \in Q_1(z, y_i)$ et $\beta_i \in Q_1(y_i, x)$ avec $y_i \in Q_0$. En vertu du lemme 5.2.1, on obtient

$$(\partial_a^{1-n} \circ \partial_a^{-n})(v \otimes \gamma) = \textstyle\sum_{i=1}^s (\partial_a^{1-n} \circ \partial_a^{-n})\,(v \otimes \lambda_i\beta_i\alpha_i\delta) = v\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i\bar\beta_i\bar\alpha_i\right) \otimes \delta = 0.$$

$\square$

Dans la suite $K_a^\bullet$ sera appelé le *complexe local de Koszul* de $\Lambda$ en $a$. Le résultat suivant est une version locale d'un résultat bien connu indiqué dans [10].

**Théorème 5.2.3.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un idéal quadratique dans $kQ$. Si $a \in Q_0$, alors $S_a$ admet une résolution linéaire projective si et seulement si $K_a^\bullet$ est une résolution projective de $S_a$, c-à-d, $K_a^\bullet$ est exact.*

*Démonstration.* La suffisance est évidente. Supposons que $S_a$ admet une résolution linéaire projective proj$\Lambda$. En vertu des lemmes 2.2.14 et 5.2.2, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-p-1} \arrow[r, "d^{-p-1}"] & P^{-p} \arrow[r, "d^{-p}"] \arrow[d, "f^{-p}"] & P^{1-p} \arrow[r] \arrow[d, "f^{1-p}"] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f^{-1}"] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & K_a^{-p-1} \arrow[r, "\partial_a^{-p-1}"] & K_a^{-p} \arrow[r, "\partial_a^{-p}"] & K_a^{1-p} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_a^{-1} \arrow[r, "\partial_a^{-1}"] & K_a^0 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où $p \geq 2$, la ligne supérieure est une résolution de $S_a$, et $f^{-p}, \cdots, f^0$ sont des isomorphismes gradués. En particulier, $\partial_a^i$ se restreint à une $J$-couverture de $\mathrm{Ker}(\partial_a^{i-1})$, pour $i = 1, \ldots, p$. Nous prétendons que $\partial_a^{-p-1}$ se restreint à une $J$-couverture de $\mathrm{Ker}(\partial_a^{-p})$. Nous pouvons supposer que $K_a^{-p}$ est non nul. Alors, $K_a^{1-p} = \oplus_{i=1}^m P_{x_i} \otimes k\zeta_i$, où $\zeta_i \in R^{(p-1)}(a, x_i)$, $i = 1, \ldots, m$, forme une base de $R^{(p-1)}(a, -)$. De plus, $K_a^{-p} = \oplus_{j=1}^n P_{y_j} \otimes k\rho_j$, où $\rho_j \in R^{(p)}(a, y_j)$, $j = 1, \ldots, n$, forme une base de $R^{(p)}(a, -)$. Observons que $f^{-p} \circ d^{-p-1}$ est une $J$-couverture projective de $\mathrm{Ker}(\partial_a^{-p})$, qui est homogène de degré 1. En vertu du lemme 2.2.4, $\mathrm{Ker}(\partial_a^{-p})$ admet une base normalisée $J$-top $T^p$, constituée d'éléments homogènes de degré 1.

Considérons $u = (u_1, \ldots, u_n) \in T^p \cap e_z K_a^{-p}$, où $z \in Q_0$ et $u_j \in P_{y_j} \otimes k\rho_j$. Alors $u_j = \bar{\gamma}_j \otimes \rho_j$, où $\gamma_j \in kQ_1(y_j, z)$; $j = 1, \ldots, n$. Par définition de $R^{(p)}(a, y_j)$, on peut écrire $\rho_j = \sum_{i=1}^m \delta_{ij}\, \zeta_i$, où $\delta_{ij} \in kQ_1(x_i, y_j)$. Puisque $\partial_a^p(u) = 0$, en vertu du lemme 5.2.1, $\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_j \bar{\delta}_{ij}) \otimes \zeta_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \partial_a^p(\bar{\gamma}_j \otimes \delta_{ij}\zeta_i) = 0$. Puisque les $\zeta_i$sont linéairements indépendants, $\sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_j \bar{\delta}_{ij} = 0$, c-à-d, $\eta_i = \sum_{j=1}^n \gamma_j \delta_{ij} \in R(x_i, z)$, et par conséquent, $\eta_i \in R_2(x_i, z)$, pour $i = 1, \ldots, m$. Posons $\omega = \sum_{j=1}^n \gamma_j \rho_j$. Alors $\omega = \sum_{i=1}^m \eta_i \zeta_i$, où $\eta_i \in R_2(x_i, z)$ et $\zeta_i \in kQ_{p-1}(a, x_i)$. Soit $0 \leq s < p-1$, puisque $\rho_j \in R^{(p)}(a, y_j)$, on voit que $\omega = \sum \eta_l \rho_l \delta_l$, où $\eta_l \in kQ_{p-2-s}(-, y_j)$, $\rho_l \in R_2$, $\delta_l \in kQ_s(a, -)$. Cela montre que $\omega \in R^{(p+1)}(a, z)$. En particulier, $e_z \otimes \omega \in K_a^{p+1}$.

Soit $f_i$ la composition de $\partial^{-p-1}(y_i, z) : P_z \otimes R^{(p+1)}(a, z) \to P_{y_i} \otimes R^{(p)}(a, y_i)$ et la projection canonique $p_i : P_{y_i} \otimes R^{(p)}(a, y_i) \to P_{y_i} \otimes k\rho_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Puisque $\gamma_j \in kQ_1(y_j, z)$, étant donné n'importe quel

$1 \leq i \leq n$, on déduit du lemme 5.2.1 que

$$f_i(e_z \otimes \omega) = p_i(\sum_{j=1}^{n} \partial_a^{p+1}(y_i, z)(e_z \otimes \gamma_j \rho_j)) = p_i(\sum_{y_j = y_i} \bar{\gamma}_j \otimes \rho_j) = \bar{\gamma}_i \otimes \rho_i.$$

Donc, $\partial_a^{-p-1}(e_z \otimes \omega) = (f_1(e_z \otimes \omega), \ldots, f_n(e_z \otimes \omega)) = (u_1, \ldots, u_n) = u$. Ceci établit notre énoncé. En vertu du lemme 2.2.14, on obtient un isomorphisme gradué $f^{-p-1} : P^{-p-1} \to K_a^{-p-1}$ tel que $f^{-p} \circ d^{-p-1} = \partial_a^{-p-1} \circ f^{-p-1}$. Par récurrence, $K_a^{\bullet}$ résolution linéaire projective de $S_a$.

□

Ensuite, nous définirons le dual quadratique de $\Lambda$. Étant donnés $x, y \in Q_0$ et $n \geq 0$, puisque $Q_n(x, y)$ est fini, $D(kQ_n(x, y))$ admet une base $\{\xi^* \mid \xi \in Q_n(x, y)\}$, c-à-d la base duale de $Q_n(x, y)$. Si $\gamma = \sum \lambda_i \xi_i$, avec $\lambda_i \in k$ et $\xi_i \in Q_n(x, y)$, nous écrirons $\gamma^* = \sum \lambda_i \xi_i^* \in D(kQ_n(x, y))$.

**Lemme 5.2.4.** *Soit $\zeta \in kQ_s(x, y)$ et $\gamma \in Q_t(y, z)$, où $x, y \in Q_0$ et $s, t \geq 0$.*

(1) *Si $\delta \in kQ_s$ et $\xi \in kQ_t$, alors $(\gamma\zeta)^*(\xi\delta) = \gamma^*(\xi)\zeta^*(\delta)$.*

(2) *Si $\gamma \in Q_1(y, z)$, alors $(\gamma\zeta)^*(\eta) = \zeta^*(\partial_\alpha(\eta))$ pour $\eta \in kQ_{s+1}(x, z)$.*

*Démonstration.* (1) est évidente. Soit $Q_1(-, z) = \{\alpha_i : y_i \to z \mid i = 1, \ldots, r\}$, où $\alpha_1 = \gamma \in Q_1(y, z)$. Si $\eta \in kQ_{s+1}(x, z)$, alors $\eta = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \delta_i$, où $\delta_i \in kQ_s(x, y_i)$ et $\partial_\gamma(\eta) = \delta_1$. Donc, $(\gamma\zeta)^*(\eta) = \sum_{i=1}^{r} \gamma^*(\alpha_i)\zeta^*(\delta_i) = \zeta^*(\delta_1) = \zeta^*(\partial_\gamma(\eta))$.

□

Considérons maintenant $kQ^{\circ}$, où $Q^{\circ}$ est le carquois opposé de $Q$. Soient $x, y \in Q_0$ et $n \geq 0$, on a un isomorphisme $k$-linéaire $\psi_{x,y}^n : kQ_n^{\circ}(y, x) \to D(kQ_n(x, y)) : \gamma^{\circ} \mapsto \gamma^*$. Prenons $n = 2$, on note $R_2^!(y, x)$ le sous-espace de $kQ_2^{\circ}(y, x)$ des éléments $\rho^{\circ}$, avec $\rho \in kQ_2(x, y)$, tel que $\rho^* \in R_2(x, y)^{\perp}$, c-à-d, $\rho^*$ s'annule sur $R_2(x, y)$. Le *dual quadratique* de $\Lambda$ est défini par $\Lambda^! = kQ^{\circ}/R^!$, où $R^!$ est l'idéal dans $kQ^{\circ}$ engendré par tous les $R_2^!(y, x)$ avec $x, y \in Q_0$ ; comparer avec [39, page 69] et [10, (2.8.1)].

**Proposition 5.2.5.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini, et $R$ un idéal quadratique. Alors $\Lambda^!$ et $\Lambda^{\circ}$ sont quadratiques avec $(\Lambda^!)^! = \Lambda$ et $(\Lambda^{\circ})^! = (\Lambda^!)^{\circ}$.*

*Démonstration.* Fixons $x, y \in Q_0$. Considérons $\psi^{2,\mathrm{o}}_{y,x} : kQ_2(x,y) \to D(kQ^{\mathrm{o}}_2(y,x)) : \gamma \mapsto (\gamma^{\mathrm{o}})^*$, où $(\gamma^{\mathrm{o}})^*(\rho^{\mathrm{o}}) = \rho^*(\gamma) = \gamma^*(\rho)$, pour tout $\rho \in kQ_2(x,y)$. Maintenant, $\gamma \in (R^!)^!_2(x,y)$ si et seulement si, $(\gamma^{\mathrm{o}})^*(\rho^{\mathrm{o}}) = 0$, c-à-d $\rho^*(\gamma) = 0$ pour tout $\rho^{\mathrm{o}} \in R^!(y,x)$ si et seulement si, $\gamma \in R_2(x,y)$. De plus, $\gamma \in (R^{\mathrm{o}})^!_2(x,y)$ si et seulement si $(\gamma^{\mathrm{o}})^*(\rho^{\mathrm{o}}) = 0$, c-à-d $\gamma^*(\rho) = 0$ pour tout $\rho \in R^{\mathrm{o}}_2(y,x)$ si et seulement si, $\gamma^{\mathrm{o}} \in R^!(y,x)$ si et seulement si, $\gamma \in (R^!)^{\mathrm{o}}(x,y)$. D'où, $(R^!)^! = R$ and $(R^{\mathrm{o}})^! = (R^!)^{\mathrm{o}}$.

□

Par définition, on obtient $R^!_2(y,x) \cong R_2(x,y)^\perp = R^{(2)}(x,y)^\perp$, for $x, y \in Q_0$. Le résultat suivant décrit $R^!_n(y,x) = R^!(y,x) \cap kQ^{\mathrm{o}}_n(y,x)$ pour tout $n \geq 0$.

**Lemme 5.2.6.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un idéal quadratique. Soit $n \geq 0$, on a un isomorphisme $k$-linéaire $\psi^n_{x,y} : R^!_n(y,x) \to R^{(n)}(x,y)^\perp : \gamma^{\mathrm{o}} \mapsto \gamma^*$.*

*Démonstration.* Il suffit de considérer le cas où $n \geq 3$. Fixons $x, y \in Q_0$. on a un isomorphisme $k$-linéaire $\psi^n_{x,y} : kQ^{\mathrm{o}}_n(y,x) \to D(kQ_n(x,y)) : \gamma^{\mathrm{o}} \mapsto \gamma^*$. Par définition, $R^!_n(y,x) = \sum_{j=0}^{n-2} R^!_{n,j}(y,x)$ et $R^{(n)}(x,y) = \cap_{j=0}^{n-2} R^{(n,j)}(x,y)$, où

$$R^!_{n,j}(y,x) = \textstyle\sum_{a,b \in Q_0} kQ^{\mathrm{o}}_j(a,x) \cdot R^!_2(b,a) \cdot kQ^{\mathrm{o}}_{n-j-2}(y,b)$$

et $R^{(n,j)}(x,y) = \sum_{a,b \in Q_0} kQ_{n-j-2}(b,y) \cdot R_2(a,b) \cdot kQ_j(x,a)$.

Premièrement, nous prétendons que $\psi^n_{x,y}(R^!_n(y,x)) \subseteq R^{(n)}(x,y)^\perp$. En effet, considérons $\sigma^{\mathrm{o}} \in R^!_n(y,x)$, où $\sigma \in kQ_n(x,y)$. Nous pouvons supposer que $\sigma^{\mathrm{o}} = \gamma^{\mathrm{o}}\eta^{\mathrm{o}}\delta^{\mathrm{o}}$, où $\delta \in kQ_{n-2-j}(b,y)$, et $\eta \in kQ_2(a,b)$ tel que $\eta^{\mathrm{o}} \in R^!_2(b,a)$, et $\gamma \in kQ_j(x,a)$, pour un $j$ avec $0 \leq j \leq n-2$. Étant donné un $w \in R^{(n)}(x,y)$, on peut écrire $w = \sum_i \delta_i \cdot \rho_i \cdot \gamma_i$, pour un $\gamma_i \in kQ(x,a_i)$, et $\rho_i \in R_2(a_i,b_i)$, et $\delta_i \in kQ(b_i,y)$. En vertu du lemme 5.2.4(1), $\sigma^*(w) = \sum_i \delta^*(\delta_i)\, \eta^*(\rho_i)\, \gamma^*(\gamma_i) = 0$. Ceci établit notre énoncé.

D'autre par, le lemme 1.1.4(1), entraîne $R^{(n)}(x,y)^\perp = \sum_{j=0}^{n-2} R^{(n,j)}(x,y)^\perp$, où $R^{(n,j)}(x,y)^\perp = \cap_{a,b \in Q_0} (kQ_{n-j-2}(b,y) \cdot R_2(a,b) \cdot kQ_j(x,a))^\perp$. Soit $f \in R^{(n)}(x,y)^\perp$ non nul. on peut supposer $f \in R^{(n,j)}(x,y)^\perp$, pour un $0 \leq j \leq n-2$. Alors, $f = \omega^*$, avec $\omega \in kQ_n(x,y)$. Supposons en outre que $\omega = \delta\zeta\gamma$, où $\gamma \in kQ_j(x,a)$, $\zeta \in kQ_2(a,b)$, et $\delta \in kQ_{n-j-2}(b,y)$, pour un $a, b \in Q_0$. Puisque $f \neq 0$, il existe $\gamma_0 \in kQ_j(x,a)$ et $\delta_0 \in kQ_{n-j-2}(b,y)$ tel que $\gamma^*(\gamma_0) = \delta^*(\delta_0) = 1$.

Considérons une base $\{\rho_1, \ldots, \rho_r; \rho_{r+1}, \ldots, \rho_s\}$ de $kQ_2(a,b)$, où $\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ est une base de $R_2(a,b)$. Alors, $kQ_2(a,b)$ admet une base $\{\eta_1, \ldots, \eta_r; \eta_{r+1}, \ldots, \eta_s\}$ tel que $\{\eta_1^*, \ldots, \eta_r^*; \eta_{r+1}^*, \ldots, \eta_s^*\}$ est la base duale de $\{\rho_1, \ldots, \rho_r; \rho_{r+1}, \ldots, \rho_s\}$. Alors, $\{\eta_{r+1}^{\mathrm{o}}, \ldots, \eta_s^{\mathrm{o}}\}$ est une base de $R_2^!(b,a)$. Maintenant, on peut écrire $\zeta = \sum_{i=1}^s \lambda_i \eta_i$, avec $\lambda_i \in k$. Alors, $f = \sum_{i=1}^s \lambda_i (\delta \eta_i \gamma)^*$. Puisque $f \in (kQ_{n-j-2}(b,y) \cdot R_2(a,b) \cdot kQ_j(x,a))^{\perp}$, en vertu du lemme 5.2.4(1), $0 = f(\delta_0 \rho_j \gamma_0) = \sum_{i=1}^s \lambda_i \delta^*(\delta_0) \eta_i^*(\rho_j) \gamma^*(\gamma_0) = \lambda_j$, $j = 1, \ldots, r$. Donc, $f = \sum_{i>r} \lambda_i (\delta \eta_i \gamma)^* = \psi_{x,y}^n \left( \sum_{i>r} \lambda_i \gamma^{\mathrm{o}} \eta_i^{\mathrm{o}} \delta^{\mathrm{o}} \right)$.

$\square$

Nous allons fixer des notations pour le dual quadratique $\Lambda^!$. Pour $\gamma \in kQ$, on a $\gamma^! = \gamma^{\mathrm{o}} + R^! \in \Lambda^!$. Soient $x, a \in Q_0$. on écrit encore $e_x = \varepsilon_x + R^!$ et posons $P_x^! = \Lambda^! e_x$. En particulier, $e_a \Lambda_n^! e_x = \{\gamma^! \mid \gamma \in kQ_n(a,x)\}$ pour tout $n \geq 0$. Soit $\alpha \in Q_1(y,x)$ et $n > 0$, le morphisme $\Lambda^!$-linéaire $P[\alpha^!] : P_y^! \to P_x^!$ se restreint à l'application $k$-linéaire $e_a \Lambda_{n-1}^! e_y \to e_a \Lambda_n^! e_x$. Pour la simplicité des notations, est à nouveau notés $P[\alpha^!]$. Maintenant, on définit une suite $L_a^{\bullet}$ de morphismes dans $\mathrm{proj}\,\Lambda$ comme suit :

$$\cdots \longrightarrow L_a^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} L_a^{1-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_a^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} L_a^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

où $L_a^{-n} = \oplus_{x \in Q_0} P_x \otimes D(e_a \Lambda_n^! e_x)$ pour $n \geq 0$, and $d^{-n} = (d^{-n}(y,x))_{(y,x) \in Q_0 \times Q_0}$ avec $d^{-n}(y,x) = \sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} P[\bar{\alpha}] \otimes DP[\alpha^!] : P_x \otimes D(e_a \Lambda_n^! e_x) \to P_y \otimes D(e_a \Lambda_{n-1}^! e_y)$ pour tout $n > 0$.

**Lemme 5.2.7.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un idéal quadratique. Si $a \in Q_0$, alors $L_a^{\bullet}$ est isomorphe à un complexe de Koszul de $\Lambda$ en $a$.*

*Démonstration.* Soient $a, x \in Q_0$ et $n \in \mathbb{Z}$, on obtient $D(kQ_n(a,x)) = \{\gamma^* \mid \gamma \in kQ_n(a,x)\}$ et $e_a \Lambda_n^! e_x = \{\gamma^! \mid \gamma \in kQ_n(x,a)\} \cong kQ_n^{\mathrm{o}}(x,a)/R_n^!(x,a)$. Il découle du lemme 5.2.6 que $\gamma^* \in R^{(n)}(a,x)^{\perp}$ si et seulement si $\gamma^{\mathrm{o}} \in R_n^!(x,a)$. Cela donne une forme bilinéaire

$$<-,->: R^{(n)}(a,x) \times e_a \Lambda_n^! e_x \to k : (\delta, \gamma^!) \mapsto \gamma^*(\delta),$$

qui par définition est non dégénérée à droite. Si $\delta \in R^{(n)}(a,x)$ est non nul, alors $\gamma^*(\delta) \neq 0$ pour un $\gamma \in kQ_n(a,x)$, c-à-d, $<\delta, \gamma^!> \neq 0$. Donc, $<-,->$ est non dégénérée. Puisque $R^{(n)}(a,x)$ et $e_a \Lambda_n^! e_x$ sont de dimension finie, on obtient un isomorphisme $k$-linéaire $\phi_x^n : R^{(n)}(a,x) \to D(e_a \Lambda_n^! e_x) : \delta \to <\delta, ->$.

nous prétendons que, pour $x, y \in Q_0$ et $n > 0$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
R^{(n)}(a,x) \arrow[r, "\sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} \partial_\alpha"] \arrow[d, "\phi_x^n"'] & R^{(n-1)}(a,y) \arrow[d, "\phi_y^{n-1}"] \\
D(e_a \Lambda_n^! e_x) \arrow[r, "\sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} DP[\alpha^!]"] & D(e_a \Lambda_{n-1}^! e_y).
\end{tikzcd}$$

En effet,soit $\delta \in R^{(n)}(a,x)$ et $\zeta \in kQ_{n-1}(a,y)$, en vertu du lemme 5.2.4(2), on a

$$\begin{array}{rcl}
(\sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} DP[\alpha^!])(\phi_x^n(\delta))(\zeta^!) & = & \sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} \phi_x^n(\delta)(\zeta^! \alpha^!) \\
& = & \sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} (\alpha\zeta)^*(\delta) \\
& = & \sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} \zeta^*(\partial_\alpha(\delta)) \\
& = & \phi_x^{n-1}(\sum_{\alpha \in Q_1(x,y)} \partial_\alpha(\delta))(\zeta^!).
\end{array}$$

Notre résultat est établi. Par conséquent, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{x \in Q_0} P_x \otimes R^{(n)}(a,x) \arrow[r, "\partial_a^{-n}"] \arrow[d, "\oplus 1_{P_x} \otimes \phi_x^n"'] & \oplus_{y \in Q_0} P_y \otimes R^{(n-1)}(a,y) \arrow[d, "\oplus 1_{P_y} \otimes \phi_y^{n-1}"] \\
\oplus_{x \in Q_0} P_x \otimes D(e_a \Lambda_n^! e_x) \arrow[r, "d^{-n}"] & \oplus_{y \in Q_0} P_y \otimes D(e_a \Lambda_{n-1}^! e_y)
\end{tikzcd}$$

avec des isomorphismes verticaux, pour tout $n > 0$.

□

Le résultat suivant est une généralisation de la proposition 2.9.1 de [10], où $\Lambda$ est une algèbre localement engendrée ; voir aussi [44, Theorem 30].

**Théorème 5.2.8.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un idéal quadratique. Alors $\Lambda$ est de Koszul si et seulement si $\Lambda^!$ est de Koszul.*

*Démonstration.* Puisque $(\Lambda^!)^! = \Lambda$, il suffit de prouver que. $\Lambda$ est de Koszul. Fixons $a \in Q_0$. En vertu de la proposition 5.2.5, $e_a(\Lambda^!)^!_n e_x = e_a \Lambda_n e_x$, pour tout $x \in Q_0$ et $n \geq 0$. Par la proposition 5.2.7, le complexe local de Koszul de $\Lambda^!$ de $a$ est isomorphe à

$$L^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow L^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} L^{1-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} L^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

où $L^{-n} = \oplus_{x \in Q_0} P_x^! \otimes D(e_a \Lambda_n e_x)$ pour $n \geq 0$, et $d^{-n} = (d^{-n}(y,x))_{(y,x) \in Q_0 \times Q_0}$ avec $d^{-n}(y,x) = \sum_{\alpha \in Q_1(x,y)} P[\alpha^!] \otimes DP[\bar{\alpha}] : P_x^! \otimes D(e_a \Lambda_n e_x) \to P_y^! \otimes D(e_a \Lambda_{n-1} e_y)$ pour $n > 0$. En vertu du théorème

5.2.3, il suffit de prouver que $L^{\bullet}$ est exact en chaque degré négatif $n$. En effet, le morphisme $\Lambda^!$-linéaire $d^{-n}: L^{-n} \to L^{1-n}$ consiste en une famille d'applications $k$-linéaire $d^{-n}(b): L^{-n}(b) \to L^{1-n}(b)$, with $b \in Q_0$. Puisque $L^{\bullet}$ est un complexe linéaire, en vertu du lemme 2.2.13, cela revient à établir l'exactitude de la suite

$$(*) \qquad \oplus_{x\in Q_0} e_b\Lambda^!_{s-1}e_x \otimes D(e_a\Lambda_{n+1}e_x) \xrightarrow{d^{-n-1}(b)} \oplus_{y\in Q_0} e_b\Lambda^!_{s}e_y \otimes D(e_a\Lambda_{n}e_y)$$
$$\xrightarrow{d^{-n}(b)} \oplus_{z\in Q_0} e_b\Lambda^!_{s+1}e_z \otimes D(e_a\Lambda_{n-1}e_z),$$

pour tout $b \in Q_0$ et $s \in \mathbb{Z}$. Si $s < 0$, alors $e_b\Lambda^!_s e_y = 0$, et donc, $(*)$ est exact.Dans le cas $s = 0$, la suite $(*)$ devient

$$0 \longrightarrow e_b\Lambda^!_0 e_b \otimes D(e_a\Lambda_n e_b) \xrightarrow{d_b^{-n}} \oplus_{z\in Q_0} e_b\Lambda^!_1 e_z \otimes D(e_a\Lambda_{n-1}e_z),$$

où $d_b^{-n} = (d_b^{-n}(z,b))_{z\in Q_0}$ avec $d_b^{-n}(z,b) = \sum_{\alpha\in Q_1(b,z)} P[\alpha^!] \otimes DP[\bar{\alpha}]$. Considérons une forme linéaire non nulle $f \in D(e_a\Lambda_n e_b)$. Alors $f(u\bar{\beta}) \neq 0$, pour un $\beta \in Q_1(b,z)$ et $u \in e_a\Lambda_{n-1}e_z$ avec $z \in Q_0$. c-à-d, $(DP[\bar{\beta}])(f)(u) \neq 0$, et par conséquent, $(DP[\bar{\beta}])(f) \neq 0$. Maintenant, $d_b^{-n}(z,b)(e_b \otimes f) = \sum_{\alpha\in Q_1(b,z)} \alpha^! \otimes (DP[\bar{\alpha}])(f)$, qui est non nul puisque les $\alpha^!$ avec $\alpha \in Q_1(b,z)$ sont $k$-linéairement indépendants. Cela montre que $d^{-n}(b)$ est un monomorphisme. c-à-d, $(*)$ est exact.

Finalement, considérons le cas $s > 0$. Puisque $\Lambda$ est de Koszul, en vertu du théorème 5.2.3 et la proposition 5.2.7, $L_b^{\bullet}$ est exact en tous les degrés $s$. En vertu du lemme 2.2.13, on obtient une suite exacte

$$\oplus_{z\in Q_0} e_a\Lambda_{n-1}e_z \otimes D(e_b\Lambda^!_{s+1}e_z) \xrightarrow{d_{b,a}^{-s-1}} \oplus_{y\in Q_0} e_a\Lambda_n e_y \otimes D(e_b\Lambda^!_s e_y)$$
$$\xrightarrow{d_{b,a}^{-s}} \oplus_{x\in Q_0} e_a\Lambda_{n+1}e_x \otimes D(e_b\Lambda^!_{s-1}e_x),$$

où $d_{b,a}^{-s} = (d_{b,a}^{-s}(x,y))_{(x,y)\in Q_0\times Q_0}$ avec $d_{b,a}^{-s}(x,y) = \sum_{\alpha\in Q_1(x,y)} P[\bar{\alpha}] \otimes DP[\alpha^!]$. Appliquons la dualité $D$ à la dernière suite, par le lemme 1.1.3, on obtient une suite exacte isomorphe à la suite $(*)$.

□

Remarque. Si $\Lambda$ est de Koszul, on appelera $\Lambda^!$ le *dual de Koszul* de $\Lambda$.

**Lemme 5.2.9.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul localement de dimension finie. Soient $a, b \in Q_0$ et $n \geq 0$, alors $\operatorname{Ext}^n_{\Lambda}(S_b, S_a) = e_b\Lambda^!_n e_a$.*

*Démonstration.* Fixons $a, b \in Q_0$. en vertu de la proposition 1.4.1(3), $\Lambda$ est fortement localement de dimension finie, et en vertu du théorème 5.2.3 et le lemme 5.2.7, $L_b^{\bullet}$ est une résolution minimale projective de $S_b$. Soit $n \geq 0$, il est bien connu que $\mathrm{Ext}^n_{\Lambda}(S_b, S_a) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda}(L_b^{-n}, S_a)$ ; voir, par exemple, [37, (III.6.4)]. Puisque $e_b\Lambda^!_n e_a$ est de dimension finie, en vertu de la proposition 2.2.2(3), on voit que

$$\mathrm{Ext}^n_{\Lambda}(S_b, S_a) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda}(P_a \otimes D(e_b\Lambda^!_n e_a), S_a) \cong \mathrm{Hom}_k(D(e_b\Lambda^!_n e_a), k) \cong e_b\Lambda^!_n e_a.$$

□

Pour étudier l'algèbre opposée d'une algèbre de Koszul, nous introduirons des notations pour $(\Lambda^!)^{\mathrm{o}} = kQ/(R^!)^{\mathrm{o}}$. Soit $\gamma \in kQ$, on peut écrire $\hat{\gamma} = \gamma + (R^!)^{\mathrm{o}}$. Soit $x \in Q_0$, on peut écrire $e_x = \varepsilon_x + (R^!)^{\mathrm{o}}$ pour la simplicité des notations. Nous associerons à chaque $a \in Q_0$ une suite $T_a^{\bullet}$ de morphismes dans $\mathrm{inj}\,\Lambda$ comme suit :

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow T_a^0 \xrightarrow{d^0} T_a^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_a^n \xrightarrow{d^n} T_a^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

avec $T_a^n = \oplus_{x\in Q_0} I_x \otimes e_x\Lambda^!_n e_a$ et $d^n = (d^n(y,x))_{(y,x)\in Q_0\times Q_0}$ pour tout $n \geq 0$, où $d^n(y,x) = \sum_{\alpha\in Q_1(y,x)} I[\bar{\alpha}] \otimes P^!_a(\alpha^{\mathrm{o}}) : I_x \otimes e_x\Lambda^!_n e_a \to I_y \otimes e_y\Lambda^!_{n+1} e_a$.

**Lemme 5.2.10.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre quadratique localement de dimension finie. Si $a \in Q_0$, alors $T_a^{\bullet}$ est isomorphe au dual d'un complexe de Koszul de $\Lambda^{\mathrm{o}}$ en $a$.*

*Démonstration.* Fixons $a \in Q_0$. En vertu du lemme 5.2.5, $e_a(\Lambda^{\mathrm{o}})^!_n e_x = e_a(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}_n e_x$, pour $x \in Q_0$ et $n \geq 0$. En vertu du lemme 5.2.7, le complexe local de Koszul de $\Lambda^{\mathrm{o}}$ en $a$ est isomorphe à

$$L^{\bullet}: \qquad \cdots \longrightarrow L^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} L^{1-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} L_0 \longrightarrow 0,$$

avec $L^{-n} = \oplus_{x\in Q_0} P_x^{\mathrm{o}} \otimes D(e_a(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}_n e_x)$ et $d^{-n} = (d^{-n}(x,y))_{(x,y)\in Q_0\times Q_0}$, où $d^{-n}(x,y) = \sum_{\alpha\in Q_1(y,x)} P[\bar{\alpha}^{\mathrm{o}}] \otimes DP[\hat{\alpha}] : P_y^{\mathrm{o}} \otimes D(e_a(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}_{n+1} e_y) \to P_x^{\mathrm{o}} \otimes D(e_a(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}_n e_x)$.

Puisque $e_a(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}_n e_x$ est de dimension finie, on a un isomorphisme canonique $k$-linéaire $\theta_{x,n} : D^2(e_a(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}_n e_x) \to e_a(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}_n e_x$. Composons cela avec l'isomorphisme $k$-linéaire $e_a(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}_n e_x \to e_x\Lambda^!_n e_a$, envoyant $\hat{\gamma}$ à $\gamma^!$ pour $\gamma \in kQ_n(x,a)$, on obtient un isomorphisme $k$-linéaire $\psi_{x,n} : D^2(e_a(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}_n e_x) \to e_x\Lambda^!_n e_a$ tel que, pour chaque $\alpha \in Q_1(y,x)$, que

$$\begin{tikzcd}
I_x \otimes D^2(e_a(\varLambda^!)^{\mathrm{o}}_n e_x) \arrow[r, "I[\bar{\alpha}]\otimes DP[\hat{\alpha}]"] \arrow[d, "\mathbb{1}\otimes\psi_{x,n}"'] & I_y \otimes D^2(e_a(\varLambda^!)^{\mathrm{o}}_{n+1} e_y) \arrow[d, "\mathbb{1}\otimes\psi_{y,n+1}"] \\
I_x \otimes e_x\varLambda^!_n e_a \arrow[r, "I[\bar{\alpha}]\otimes P^!_a(\alpha^{\mathrm{o}})"] & I_y \otimes e_y\varLambda^!_{n+1} e_a
\end{tikzcd}$$

commute. Puisque les $L^{-n}$ sont des sommes directes finies, à par le diagramme de commutatif ci-dessus, nous voyons que $D(L^{\bullet}) \cong T^{\bullet}_a$.

$\square$

Dans le cas où $\varLambda$ est localement de dimension finie, on obtient la généralisation suivante de la proposition 2.2.1 dans [10].

Avant de prouver le théorème 5.2.12, on aura besoin d'un lemme, voir la preuve de [37, (III.6.4)]. Ici, on donnera une preuve élémentaire.

**Lemme 5.2.11.** *Soit $A$ une algèbre quelconque et soient $M$, $N$ deux $A$-modules. Considérons une co-résolution injective de $M$,*

$$0 \to M \to I^0 \to I^2 ... \to I^n \to I^{n+1} ...$$

*Alors il existe un isomorphisme de groupe abélien* $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\varLambda}(N,M) \cong \mathrm{Hom}_{\varLambda}(N, C^{n+1} = Imd^n)/\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\varLambda}(N,p^n))$; *où $p^n : I^n \to Imd^n$.*

*Démonstration.* Explicitement, on définit un morphisme de groupes abéliens

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\varLambda}(N, C^{n+1})/\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\varLambda}(N,p^n)) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{\varLambda}(N,M)$$

qui envoie $\bar{h}$ au $\bar{g}$, où $g = i^n h$ et $i^n : Imd^n \to I^{n+1}$.

Si $\bar{g} = 0$, alors, $g \in Im(Hom_A(N,d^n))$. Donc il existe un morphisme $\beta : N \to I^n$ tel que $g = d^n\beta = i^n p^n \beta$. Le fait que $i^n$ est mono, entraine que $g = p^n\beta$, par conséquent, $\phi$ est un monomorphisme. Maintenant si $\bar{g} \in \mathrm{Ext}^{n+1}_{\varLambda}(N,M)$, alors $d^{n+1}g = 0$. Donc pour tout $x \in N$, il existe $y \in I^n$ tel que

$g(x) = d^n(y)$. Cela montre que $g$ est un morphisme de $N \to Imd^n$, donc on a $\phi(g) = i^n g = g$. D'où le résultat.

□

**Théorème 5.2.12.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre quadratique localement de dimension finie. Les asser` tions suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'algèbre $\Lambda$ est de Koszul.*

(2) *L'algèbre opposée $\Lambda^{\mathrm{o}}$ est de Koszul.*

(3) *Pour chaque $a \in Q_0$, le module simple $S_a$ admet une co-résolution injective $T_a^\bullet$.*

*Démonstration.* En vertu de la proposition 1.4.1(3), $\Lambda$ est fortement localement de dimension finie, et en vertu de la proposition 2.2.6, $T_a^\bullet$ est un complexe de $\Lambda$-modules injectifs. Supposons que $T_a^\bullet$ est une co-résolution injective de $S_a$ pour chaque $a \in Q_0$. En vertu du lemme 5.2.10, chaque complexe local de Koszul de $\Lambda^{\mathrm{o}}$ est exact en tous les degrés non nuls, et en vertu du théorème 5.2.3, $\Lambda^{\mathrm{o}}$ est de Koszul.

Supposons maintenant que $\Lambda$ est une algèbre de Koszul. Fixons $a \in Q_0$. Rappelons que le complexe $(T_a^\bullet, d^\bullet)$ est tel que $T_a^i = \oplus_{x \in Q_0} I_x \otimes e_x \Lambda_i^! e_a$ et $d^i = (d^i(y,x))_{(y,x) \in Q_0 \times Q_0}$ pour $i \geq 0$, où $d^i(y,x) = \sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} I[\bar{\alpha}] \otimes P_a^!(\alpha^{\mathrm{o}}) : I_x \otimes e_x \Lambda_i^! e_a \to I_y \otimes e_y \Lambda_{i+1}^! e_a$. En particulier, $T_a^0 = I_a \otimes k e_a$ et $T_a^1 = \oplus_{j=1}^s I_{b_j} \otimes k\beta_j^!$, où $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\} = Q_1(a, -)$. Considérons le morphisme $\Lambda$-linéaire $d^{-1} : S_a \to T^0 : e_a + Je_a \mapsto e_a^\star \otimes e_a$. D'après le corollaire 2.2.11, on peut supposer qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow S_a \xrightarrow{d^{-1}} T_a^0 \xrightarrow{d^0} T_a^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_a^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} T_a^n \xrightarrow{p^n} C^{n+1} \longrightarrow 0,$$

où $n \geq 1$, tel que $S(T_a^i) \subseteq \mathrm{Im}(d^{i-1})$, pour $i = 0, 1, \ldots, n$. En vertu du corollaire 2.2.9 et le lemme 2.2.12, $C^{n+1}$ admet un socle essentiel. Soit $y \in Q_0$, d'après le lemme précèdent, on voit que $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(S_y, S_a) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(S_y, C^{n+1})/\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_\Lambda(S_y, p^n))$. Posons $C^n = \mathrm{Im}(d^{n-1})$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C^n \xrightarrow{j^n} T_a^n \xrightarrow{p^n} C^{n+1} \longrightarrow 0,$$

où $j^n$ est une enveloppe injective. Appliquons $\mathrm{Hom}_\Lambda(S_y, -)$ donne une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(S_y, C^n) \xrightarrow{j_*^n} \mathrm{Hom}_\Lambda(S_y, T_a^n) \xrightarrow{p_*^n} \mathrm{Hom}_\Lambda(S_y, C^{n+1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(S_y, S_a) \longrightarrow 0.$$

Puisque $S_y$ est simple, $j_*^n$ est surjective. Donc, $\mathrm{Hom}_\Lambda(S_y, C^{n+1}) \cong \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(S_y, S_a)$. D'après le lemme 5.2.9, $\dim_k \mathrm{Hom}_\Lambda(S_y, C^{n+1}) = \dim_k e_y \Lambda^!_{n+1} e_a$, et par conséquent, $S(C^{n+1}) \cong \oplus_{y \in Q_0} S_y \otimes e_y \Lambda^!_{n+1} e_a$, qui est de dimension finie. D'après le lemme 2.2.10, on obtient une enveloppe injective $j^{n+1} : C^{n+1} \to \oplus_{y \in Q_0} I_y \otimes e_y \Lambda^!_{n+1} e_a = T_a^{n+1}$. Maintenant, nous prétendons que la suite

$$0 \longrightarrow S_a \xrightarrow{d} T_a^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} T_a^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} T_a^n \xrightarrow{d^n} T_a^{n+1}$$

est exacte avec $S(T_a^{n+1}) \subseteq \mathrm{Im}(d^n)$, ou de manière équivalente, $\mathrm{Ker}(d^n) = \mathrm{Im}(d^{n-1})$. En effet, posons $g = j^{n+1} p_n : T_a^n \to T_a^{n+1}$. Puisque $d^n d^{n-1} = 0$, il n'est pas difficile de voir que $d^n = hg$ pour un morphisme $\Lambda$-linéaire $h : T_a^{n+1} \to T_a^{n+1}$. Écrivons

$$g = (g(z,x))_{(z,x) \in Q_0 \times Q_0} : \oplus_{x \in Q_0} I_x \otimes e_x \Lambda^!_n e_a \to \oplus_{z \in Q_0} I_z \otimes e_z \Lambda^!_{n+1} e_a,$$

où $g(z,x) : I_x \otimes e_x \Lambda^!_n e_a \to I_z \otimes e_z \Lambda^!_{n+1} e_a$ is $\Lambda$-linéaire, et

$$h = (h(y,z))_{(y,z) \in Q_0 \times Q_0} : \oplus_{z \in Q_0} I_z \otimes e_z \Lambda^!_{n+1} e_a \to \oplus_{y \in Q_0} I_y \otimes e_y \Lambda^!_{n+1} e_a,$$

où $h(y,z) : I_z \otimes e_z \Lambda^!_{n+1} e_a \to I_y \otimes e_y \Lambda^!_{n+1} e_a$ est $\Lambda$-linéaire.

Soient $x, y, z \in Q_0$, considérons une base $\{\bar{\alpha} \mid \alpha \in Q_1(z,x)\} \cup \mathcal{U}_{z,x}$ of $e_x J e_z$, où $\mathcal{U}_{z,x}$ est formée d'éléments homogènes de degré $> 1$, et la base $\mathcal{V}_{y,z}$ de $e_z J e_y$ est formée d'éléments homogènes. Puisque $g$ s'annule sur $S(T_a)$, en vertu du lemme 2.2.7, $g(z,x) = \sum_{\alpha \in Q_1(z,x)} I[\bar{\alpha}] \otimes g_\alpha + \sum_{u \in \mathcal{U}_{z,x}} I[u] \otimes g_u$, où $g_\alpha$, $g_u$ sont des applications $k$-linéaires. De plus, $h(y,y) = 1_{I_y} \otimes h_{e_y} + \sum_{v \in \mathcal{V}_{y,y}} I[v] \otimes h_v$, où $h_{e_y}, h_v$ sont des applications $k$-linéaires, et $h(y,z) = \sum_{v \in \mathcal{V}_{y,z}} I[v] \otimes h_v$ dans le cas où $z \neq y$. Soit $(y,x) \in Q_0 \otimes Q_0$, en vertu de l'unicité dans le lemme 2.2.7, $d^n(y,x) = \sum_{\alpha \in Q_1(y,x)} I[\bar{\alpha}] \otimes (h_{e_y} \circ g_\alpha)$. Donc, $(h_{e_y} \circ g_\alpha) = P(\alpha^!)$, pour tout $\alpha \in Q_1(y,x)$. Par conséquent, nous pouvons supposer que $h(y,z) = 0$ pour $z \neq y$, et $h(y,y) = 1_{I_y} \otimes h_{e_y}$. Fixons un $y \in Q_0$. Soit $w \in e_y \Lambda^!_{n+1} e_a$, on peut supposer que $w = \xi^!$ pour un chemin $\xi \in Q_{n+1}(y,a)$. Écrivons $\xi = \zeta\alpha$, où $\alpha \in Q_1(y,x)$ and $\zeta \in Q_n(x,a)$ pour un $x \in Q_0$, on voit que $w = \alpha^! \zeta^! = P(\alpha^!)(\zeta^!) = h_{e_y}(g_\alpha(\xi^!))$. Donc, $h_{e_y}$ est surjective, et puisque $e_y \Lambda^!_{n+1} e_a$ est de dimension finie, $h_{e_y}$ est bijective. Donc, $h$ est un isomorphisme $\Lambda$-linéaire, et par conséquent, $\mathrm{Ker}(d^n) = \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(d^{n-1})$. Donc on obtient de qu'on veut. Par récurrence, $T_a^\bullet$ est une co-résolution minimale injective de $S_a$.

$\square$

## 5.3 Dualité de Koszul

L'objectif de cette section est d'appliquer les résultats obtenus dans le chapitre 5 pour établir la dualité de Koszul reliant les catégories dérivées non graduées de deux algèbres duales de Koszul données par un carquois gradable localement fini. Plus précisément, nous construirons une équivalence triangulée entre une famille continue de paires de sous-catégories triangulées. Dans ce contexte, notre résultat généralise la dualité de Koszul classique dans [10, (1.2.6)], voir aussi [44, Theorem 30]. Dans le cas où l'algèbre de Koszul est localement bornée à gauche (ou à droite, respectivement) et que son dual de Koszul est localement bornée à droite (ou à gauche, respectivement), notre dualité de Koszul se restreint à une équivalence des catégories dérivées bornées des modules à support fini (respectivement des modules de dimension finie).

Tout au long de cette section, on pose $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois localement fini et $R$ un idéal quadratique dans $kQ$. On fixe une graduation $Q_0 = \cup_{n\in\mathbb{Z}} Q^n$ pour $Q$. Observons que $Q(x,y) = Q_s(x,y)$, pour $x \in Q^n$ and $y \in Q^{n+s}$, où $n, s \in \mathbb{Z}$ avec $s \geq 0$ ; voir [6, (7.2)]. En particulier, $Q$ est fortement localement fini, et par conséquent, $\Lambda$ est fortement localement de dimension finie.

Maintenant, nous allons montrer que les deux foncteurs dérivés de Koszul sont quasi-inverses dans le cas où $\Lambda$ est de Koszul (voir chapitre 5). Pour cela, étant donné un $\Lambda$-module simple $S$, nous noterons $\mathcal{P}^{\bullet}_S$ sa résolution projective minimale et $\mathcal{I}^{\bullet}_S$ sa co-résolution injective minimale, qui peut explicitement décrite ci-dessous ; comparer avec [10, (1.2.6)]. Il sera plus pratique pour nous d'identifier les modules dans $\mathrm{Mod}\Lambda$ aux représentations dans $\mathrm{Rep}(Q,I)$. Soit $(M^{\bullet}, d^{\bullet})$ un complexe dans $\mathrm{Mod}\Lambda$. Pour chaque $x \in Q_0$, on considérera un complexe $(M^{\bullet}(x), d^{\bullet}(x))$ sur $\mathrm{Mod}k$, avec sa $n$-ème composante $M^n(x)$ et sa $n$-ème différentielle $d^n(x)$. On fait de même pour les doubles complexes sur $\mathrm{Mod}\Lambda$.

Notez que $Q^{\mathrm{o}}$ admet une graduation $(Q^{\mathrm{o}})_0 = \cup_{n\in\mathbb{Z}} (Q^{\mathrm{o}})^n$, où $(Q^{\mathrm{o}})^n = Q^{-n}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, le dual quadratique $\Lambda^! = kQ^{\mathrm{o}}/R^! = \{\gamma^! \mid \gamma \in kQ\}$, où $\gamma^! = \gamma^{\mathrm{o}} + R^!$, est aussi défini par un carquois graduable. Soit $a \in Q_0$, le $\Lambda^!$-module simple associé au point $a$ sera noté $S^!_a$, tandis que sa couverture et son enveloppe injective sont $P_a^!$ and $I_a^!$, respectivement.

Nous commençons par définir deux *foncteurs de Koszul*; comparer avec [10, page 489]. Soit un module $M \in \mathrm{Mod}\Lambda^!$, comme prouvé ci-dessous, nous obtiendrons un complexe $F(M)^\bullet \in C(\mathrm{Mod}\Lambda)$ si, pour chaque $n \in Z$, on définit $F(M)^n = \oplus_{x\in(Q^o)^n} P_x \otimes M(x) = \oplus_{x\in Q^{-n}} P_x \otimes M(x)$ et $d^n_{F(M)} = (d^n_{F(M)}(y,x))_{(y,x)\in Q^{-n-1}\times Q^{-n}} : F(M)^n \to F(M)^{n+1}$, où

$$d^n_{F(M)}(y,x) = \textstyle\sum_{\alpha\in Q_1(y,x)} P[\bar{\alpha}] \otimes M(\alpha^o) : P_x \otimes M(x) \to P_y \otimes M(y).$$

Étant donné un morphisme $f : M \to N$ in $\mathrm{Mod}\Lambda^!$, on obtenira un morphisme de complexe $F(f)^\bullet : F(M)^\bullet \to F(N)^\bullet$ si, pour chaque $n \in Z$, on pose

$$F(f)^n = \oplus_{x\in Q^{-n}} 1_{P_x} \otimes f(x) : \oplus_{x\in Q^{-n}} P_x \otimes M(x) \to \oplus_{x\in Q^{-n}} P_x \otimes N(x).$$

D'autre part, étant donné un module $N \in \mathrm{Mod}\,\Lambda$, on obtenira un complexe $G(N)^\bullet \in C(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!)$ si, pour chaque $n \in Z$, on pose $G(N)^n = \oplus_{x\in Q^n} I_x^! \otimes N(x)$ et

$$d^n_{G(N)} = (d^n_{G(N)}(y,x))_{(y,x)\in Q^{n+1}\times Q^n},$$

où $d^n_{G(N)}(y,x) = \sum_{\alpha:x\to y} I[\alpha^!] \otimes N(\alpha) : I_x^! \otimes M(x) \to I_y^! \otimes N(y)$. Étant donné un morphisme $g : M \to N$ in $\mathrm{Mod}\,\Lambda$, on obtenira un morphisme $G(g)^\bullet : G(M)^\bullet \to G(N)^\bullet$ si on définit $G(g)^n = \oplus_{x\in Q^n} 1_{I_x^!} \otimes g(x) : \oplus_{x\in Q^n} I_x^! \otimes M(x) \to \oplus_{x\in Q^n} I_x^! \otimes N(x)$.

**Proposition 5.3.1.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois graduable localement fini et $R$ un idéal quadratique. La construction ci-dessus donne deux foncteurs exacts, pleins et fidèles.*

(1) $F : \mathrm{Mod}\,\Lambda^! \to C(\mathrm{Mod}\,\Lambda) : M \to F(M)^\bullet; f \mapsto F(f)^\bullet$;

(2) $G : \mathrm{Mod}\,\Lambda \to C(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!) : N \to G(N)^\bullet; g \mapsto G(g)^\bullet$.

*Démonstration.* On prouvera seulement (1). Fixons un module $M \in \mathrm{Mod}\,\Lambda^!$. Prémièrement,nous prétendons que $F(M)^\bullet$ est un complexe. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $z \in Q^{-n-2}$ et $x \in Q^{-n}$, écrivons $Q(z,x) = \{\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_s\beta_s\}$, où $\alpha_i, \beta_i \in Q_1$. Par définition, on obtient

$$(d^{n+1}_{F(M)} \circ d^n_{F(M)})(z,x) = \textstyle\sum_{i=1}^s P[\bar{\alpha}_i\bar{\beta}_i] \otimes M(\beta_i^!\alpha_i^!) : P_x \otimes M(x) \to P_z \otimes M(z).$$

D'après le théorème de la base incomplète, la définition du dual de Koszul et l'isomorphisme $kQ^o(x,z) \cong DkQ(z,x)$, on peut trouver deux bases $\{\rho_1, \ldots, \rho_r, \rho_{r+1}, \ldots, \rho_s\}$ et $\{\eta_1, \ldots, \eta_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_s\}$ de $kQ(z,x)$ tel que $\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ est une base de $R_2(z,x)$ et $\{\eta^{\rm o}_{r+1}, \ldots, \eta^{\rm o}_s\}$ est une base de $R^!_2(x,z)$, tandis que $\{\eta^*_1, \ldots, \eta^*_r, \eta^*_{r+1}, \ldots, \eta^*_s\}$ est la base duale de $\{\rho_1, \ldots, \rho_r, \rho_{r+1}, \ldots, \rho_s\}$. En vertu du lemme 1.1.4(2), on obtient

$$\textstyle\sum_{i=1}^s (\alpha_i\beta_i) \otimes (\alpha_i\beta_i)^* = \sum_{i=1}^s \rho_i \otimes \eta_i^* \in kQ(z,x) \otimes D(kQ(z,x)).$$

Considérons l'isomorphisme $k$-linéaire $D(kQ(z,x)) \to kQ^{\rm o}(x,z)$ et les projections $kQ(z,x) \to e_x\Lambda e_z$ et $kQ^{\rm o}(x,z) \to e_z\Lambda^! e_x$, on a $\sum_{i=1}^s \bar{\alpha}_i\bar{\beta}_i \otimes \beta^!_i\alpha^!_i = \sum_{i=1}^s \bar{\rho}_i \otimes \eta^!_i$ Appliquons l'application linéaire $e_x\Lambda e_z \otimes e_z\Lambda^! e_x \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P_x, P_z) \otimes \operatorname{Hom}_k(M(x), M(z))$, comme vu dans le lemme 2.2.2(1) et (4), alors on obtient $\sum_{i=1}^s P[\bar{\alpha}_i\bar{\beta}_i] \otimes M(\beta^!_i\alpha^!_i) = \sum_{i=1}^s P[\bar{\rho}_i] \otimes M(\eta^!_i)$, qui s'annule puisque $\rho_i \in R(z,x)$ pour $1 \le i \le r$ et $\eta^{\rm o}_i \in R^!(x,z)$ pour $r < i \le s$. Par conséquent, $d^{n+1}_{F(M)} \circ d^n_{F(M)} = 0$. On obtient notre énoncé. Il est facile de vérifier que $F$ est un foncteur, et puisque le produit tensoriel est sur $k$, il est exact et fidèle.

Soit finalement $f^\bullet : F(M)^\bullet \to F(N)^\bullet$ un morphisme de complexe, où $M, N \in \operatorname{Mod}\Lambda^!$. Écrivons $f^n = (f^n(y,x))_{(y,x)\in Q^{-n}\times Q^{-n}} : \oplus_{x\in Q^{-n}} P_x \otimes M(x) \to \oplus_{y\in Q^{-n}} P_y \otimes N(y)$, où $f^n(y,x) : P_x \otimes M(x) \to P_y \otimes N(y)$ est $\Lambda$-linéaire. Puisque $x, y \in Q^{-n}$, on voit que $e_y\Lambda e_x \neq 0$ si et seulement si $y = x$ ; et dans ce cas, $e_y\Lambda e_x = ke_x$. En vertu du lemme 2.2.3, $f^n(y,x) = 0$ si $y \neq x$; et sinon, $f^n(y,x) = 1_{P_x} \otimes g(x)$ pour un $g(x) \in \operatorname{Hom}_k(M(x), N(x))$, et par conséquent, on obtient

$$f^n = \oplus_{x\in Q^{-n}} 1_{P_x} \otimes g(x) : \oplus_{x\in Q^{-n}} P_x \otimes M(x) \to \oplus_{x\in Q^{-n}} P_x \otimes N(x).$$

Fixons $(y,x) \in Q^{-n-1} \times Q^{-n}$ avec $e_x\Lambda e_y \neq 0$. Puisque $f^{n+1} \circ d^n_{F(M)} = d^n_{F(N)} \circ f^n$, on voit que $\sum_{\alpha\in Q_1(y,x)} P[\bar{\alpha}] \otimes (g(y) \circ M(\alpha)) = \sum_{\alpha\in Q_1(y,x)} P[\bar{\alpha}] \otimes (N(\alpha) \circ g(x))$. Par l'unicité dans le lemme 2.2.3, on obtient $g(y) \circ M(\alpha) = N(\alpha) \circ g(x)$, pour chaque $\alpha \in Q_1(y,x)$. Donc l'application $k$-linéaire $g(x)$, $x \in Q_0$, forme un morphisme $\Lambda^!$-linéaire $g : M \to N$ tel que $F(g) = f$.

□

En vertu de la proposition 4.0.7, les foncteurs de Koszul $F, G$ peuvent être étendus à deux *foncteurs de Koszul de complexes* $F^C : C(\operatorname{Mod}\Lambda^!) \to C(\operatorname{Mod}\Lambda)$ et $G^C : C(\operatorname{Mod}\Lambda) \to C(\operatorname{Mod}\Lambda^!)$. Pourtant, ils ne peuvent pas s'étendre aux catégories dérivées. Nous considérerons des sous-catégories de catégories de complexes. Pour cela, nous avons besoin de quelques notations et définitions.

**Définition 5.3.2.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois graduable localement fini et $R$ un idéal quadratique dans $kQ$. Soient $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 0$, nous notons par*

(1) $C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ *la sous-catégorie pleine abélienne de $C(\mathrm{Mod}\Lambda)$ des complexes $M^{\bullet}$ avec $M^i_j = 0$ pour $i + pj >> 0$ or $i - qj << 0$ ; en d'autres termes, $M^{\bullet}$ est concentré dans le triangle inférieur formé par deux lignes de pentes respectives $-\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ ;*

(2) $C^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ *la sous-catégorie abélienne pleine de $C(\mathrm{Mod}\Lambda)$ des complexes $M^{\bullet}$ avec $M^i_j = 0$ pour $i + pj << 0$ ou $i - qj >> 0$; en d'autres termes, $M^{\bullet}$ est concentré dans le triangle supérieur formé par deux lignes de pentes respectives $-\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$.*

Soit $M$ un module dans $\mathrm{Mod}\Lambda$. La graduation $Q = \cup_{n\in\mathbb{Z}} Q^n$ induit une graduation $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ avec $M_n = \oplus_{x\in Q^n} M(x)$. Un module $M$ est dit *borné supérieurement* si $M_n = 0$ pour presque tout $n > 0$, et *borné inférieurement* si $M_n = 0$ pour presque tout $n < 0$. Nous noterons $\mathrm{Mod}^{-}\Lambda$ et $\mathrm{Mod}^{+}\Lambda$ les sous-catégories pleines de $\mathrm{Mod}\Lambda$ engendrées par les modules borné supérieurement et par les modules borné inférieurement, respectivement. En gardant cette graduation à l'esprit, nous pouvons visualiser un complexe $M^{\bullet}$ sur $\mathrm{Mod}\Lambda$ comme un $k$-module bigradué $M^i_j = \oplus_{x\in Q^j} M^i(x)$, avec $i, j \in \mathbb{Z}$.

Remarque. (1) Si on pose $p = 1$ et $q = 0$, on obtient les catégories $C^{\downarrow}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ et $C^{\uparrow}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ comme définies dans [10, (2.12)].

(2) Il est facile de voir que ces catégories $C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ et $C^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ sont des sous-catégories de $C(\mathrm{Mod}^{-}\Lambda)$ et $C(\mathrm{Mod}^{+}\Lambda)$, respectivement.

Nous noterons $K^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ le quotient de $C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ modulo les morphismes homotopes à zéro, et $D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ la localisation de $K^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ par la fammille des quasi-isomorphismes. De même, nous aurons la catégorie d'homotopique $K^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ et la catégorie dérivée $D^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$. Le résultat suivant généralise la proposition 20 dans [44] sous l'hypothèse $Q$ est graduable.

**Théorème 5.3.3.** *Soit $\Lambda = kQ/R$, où $Q$ est un carquois graduable localement fini et $R$ un idéal quadratique dans $kQ$. Si $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 0$, alors le foncteur de Koszul $F : \mathrm{Mod}\Lambda^{!} \to C(\mathrm{Mod}\Lambda)$*

*induit un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!) \arrow[r] \arrow[d, "F^C"'] & K^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!) \arrow[r] \arrow[d, "F^K"] & D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!) \arrow[d, "F^D"] \\ C^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\,\Lambda) \arrow[r] & K^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\,\Lambda) \arrow[r] & D^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\,\Lambda); \end{tikzcd}$$

*tandis que le foncteur de Koszul* $G\colon \mathrm{Mod}\,\Lambda \to C(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!)$ *induit un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} C^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\,\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "G^C"'] & K^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\,\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "G^K"] & D^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\,\Lambda) \arrow[d, "G^D"] \\ C^{\downarrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!) \arrow[r] & K^{\downarrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!) \arrow[r] & D^{\downarrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!), \end{tikzcd}$$

*où* $F^D$ *et* $G^D$ *sont des foncteurs triangulés, appelés, les* foncteurs dérivés de Koszul.

*Démonstration.* Soient $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 0$. Considérons $M^\bullet \in C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\,\Lambda^!)$. Il existe $s, t \in \mathbb{Z}$ tel que $M^i(x) = 0$, pour $x \in (Q^{\mathrm{o}})^j$ avec $i+pj > s$ ou $i-qj < t$. Notez que $F^C(M^\bullet)$ est le complexe total de $F(M^\bullet)^\bullet$. Fixons $m, n \in \mathbb{Z}$. Soit $y \in Q^m$, on obtient $F^C(M^\bullet)^n(y) = \oplus_{i\in\mathbb{Z};\, x\in(Q^{\mathrm{o}})^{n-i}}\, P_x(y) \otimes M^i(x) = \oplus_{i\leq n+m;\, x\in Q^{i-n}}\, P_x(y) \otimes M^i(x)$. Fixons un entier $i \leq n+m$. Si $n+(q+1)m < s$,alors $i - q(n-i) < s$ ; et si $n-(p-1)m > t$,alors $i + p(n-i) > t$. Dans tous les cas, $M^i(x) = 0$ pour tout $x \in (Q^{\mathrm{o}})^{n-i}$, et donc, $F^C(M^\bullet)^n(y) = 0$. C-à-d, $F^C(M^\bullet) \in C^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$. Cela donne un foncteur $F^C : C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \to C^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda)$. En vertu de la proposition 4.0.7, $F^C$ induit un foncteur triangulé $F^K : K^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \to K^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ qui rend le premier carré commutatif. Supposons maintenant que $M^\bullet$ est acyclique. Puisque $F$ est exact, $F(M^\bullet)^\bullet$ admet des lignes exactes. De plus, $F(M^i)^{n-i} = \oplus_{x\in(Q^{\mathrm{o}})n-i}\, P_x \otimes M^i(x)$, avec $i \in \mathbb{Z}$, forme la $n$-diagonale de $F(M^\bullet)^\bullet$. En vertu de l'hypothèse sur $M^\bullet$, on voit que $M^i(x) = 0$ pour tout $x \in (Q^{\mathrm{o}})^{n-i}$ avec $i < (nq+t)(1+q)^{-1}$. C-à-d, $F(M^\bullet)^\bullet$ est diagonalement borné-au-dessous. En vertu du corollaire 4.0.3, $F^C(M^\bullet)$ est acyclique. Donc, $F^K$ envoie les quasi-isomorphismes sur les quasi-isomorphismes, et alors, il induit un foncteur triangulé $F^D : D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \to D^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ qui rend le carré à droite commutatif.

Considérons $M^\bullet \in C^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda)$. Par hypothèse, il existe $s, t \in \mathbb{Z}$ tel que $M^i(x) = 0$, pour $x \in Q^j$ avec $i+pj < s$ ou $i-qj > t$. Remarquons que $G^C(M^\bullet)$ est le complexe total de $G(M^\bullet)^\bullet$. Fixons $m, n \in \mathbb{Z}$. Soit $y \in Q^{-m}$, on obtient $G^C(M^\bullet)^n(y) = \oplus_{i\in\mathbb{Z};\, x\in Q^{n-i}}\, I^!_x(y) \otimes M^i(x) = \oplus_{i\geq n+m;\, x\in Q^{n-i}}\, I^!_x(y) \otimes M^i(x)$.

Fixons un entier $i \geq n+m$. Si $n+(q+1)m > s$,alors $i-q(n-i) > s$ ; et si $n-(p-1)m < t$,alors $i+p(n-i) < t$. Dans tous les cas, $M^i(x) = 0$ pour tout $x \in Q^{n-i}$, et donc, $G^C(M^\bullet)^n(y) = 0$. C-à-d, $G^C(M^\bullet) \in C^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)$. Cela donne un foncteur triangulé $G^C : C^{\uparrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda) \to C^{\downarrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$.

Montrerons que pour un complexe acyclique $N^\bullet \in C(\mathrm{Mod}\Lambda)$, le complexe $G^C(N^\bullet)$ est acyclique. Il suffit de prouver que $G^C(N^\bullet)(y)$ est acyclique, pour chaque $y \in Q^s$ avec $s \in \mathbb{Z}$. Puisque $G^C(N^\bullet)$ est le complexe total de $G(N^\bullet)^\bullet$, on voit que $G^C(N^\bullet)(y)$ est le complexe total de $G(N^\bullet)^\bullet(y)$. Puisque $G$ est exact, $G(N^\bullet)^\bullet$ a des lignes exactes, et ainsi $G(N^\bullet)^\bullet(y)$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, les modules $G(N^i)^{n-i}(y) = \oplus_{x\in Q^{n-i}} I^!_x(y) \otimes N^i(x)$ avec $i \in \mathbb{Z}$ forment la $n$-diagonale de $G(N^\bullet)^\bullet(y)$. Si $i < n-s$ et $x \in Q^{n-i}$, alors $Q$ n'admet pas de chemin de $x$ à $y$, et donc, $I^!_x(y) = D(e_y(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_x) = 0$. Donc, $G(N^i)^{n-i}(y) = 0$ pour tout $i < n-p$. C-à-d, $G(N^\bullet)^\bullet(y)$ est diagonalement borné supérieurement. En vertu du corollaire 4.0.3, $G^C(M^\bullet)(y)$ est acyclique.

□

**Lemme 5.3.4.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul, où $Q$ est localement fini avec une graduation $Q_0 = \cup_{n\in\mathbb{Z}} Q^n$. Si $a \in Q^s$, alors $F(I^!_a)^\bullet \cong \mathcal{P}^\bullet_{S_a}[s]$ et $G(P_a)^\bullet \cong \mathcal{I}^\bullet_{S^!_a}[-s]$.*

*Démonstration.* Fixons $a \in Q^s$. En vertu du théorème 5.2.3 et le lemme 5.2.7, $\mathcal{P}^\bullet_{S_a}$ est isomorphe à

$$L^\bullet : \ \cdots \longrightarrow L^{-i} \xrightarrow{d^{-i}} L^{-i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} L^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

où $L^{-i} = \oplus_{x\in Q_0} P_x \otimes D(e_a\Lambda^!_i e_x)$ pour $i \geq 0$, and $d^{-i} = (d^{-i}(y,x))_{(y,x)\in Q_0\times Q_0}$ avec $d^{-i}(y,x) = \sum_{\alpha\in Q_1(y,x)} P[\bar\alpha] \otimes DP[\alpha^!] : P_x \otimes D(e_a\Lambda^!_i e_x) \to P_y \otimes D(e_a\Lambda^!_{i-1}e_y)$ pour $i > 0$. Fixons un entier $n \geq 0$. Puisque $Q$ est graduable, $e_a\Lambda^!_n e_x = 0$ dans ce cas $x \notin Q^{n+s}$ ; et sinon, $e_a\Lambda^!_n e_x = e_a\Lambda^! e_x$. Donc, $L^{-n} = \oplus_{x\in Q^{n+s}} P_x \otimes D(e_a\Lambda^! e_x)$. L'isomorphisme $k$-linéaire $e_x(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_a \to e_a\Lambda^! e_x$ induit un isomorphisme $k$-linéaire $\theta_{a,x} : D(e_a\Lambda^! e_x) \to D(e_x(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_a) = I^!_a(x)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{x\in Q^{n+s}} P_x \otimes D(e_a\Lambda^! e_x) \arrow[r, "\sum_{\alpha\in Q_1(y,x)} P{[\bar\alpha]} \otimes DP{[\alpha^!]}"] \arrow[d, "\oplus\,(1\otimes\theta_{a,x})"'] & \oplus_{y\in Q^{n+s-1}} P_y \otimes D(e_a\Lambda^! e_y) \arrow[d, "\oplus\,(1\otimes\theta_{a,y})"] \\
\oplus_{x\in Q^{n+s}} P_x \otimes I^!_a(x) \arrow[r, "\sum_{\alpha\in Q_1(y,x)} P{[\bar\alpha]} \otimes I^!_a(\alpha^{\mathrm{o}})"] & \oplus_{y\in Q^{n+s-1}} P_y \otimes I^!_a(y)
\end{tikzcd}$$

est commutatif avec isomorphismes verticaux. Puisque $F(I^!_a)^{-n-s} = 0$ pour $n < 0$, on conclut que

$L^{\bullet} \cong \mathfrak{t}^s(F(I_a^!)[-s]) \cong F(I_a^!)[-s]$. Ceci établit la première partie du lemme. Maitenant, observons que $\Lambda^!$ est de Koszul avec $(\Lambda^!)^! = \Lambda$ ; voir (5.2.8) et (5.2.5). En vertu du théorème 4.11(3), on voit que $\mathcal{I}^{\bullet}_{S_a^!}$ est isomorphe à

$$T^{\bullet}: \quad 0 \longrightarrow T^0 \xrightarrow{d^0} T^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^n \xrightarrow{d^n} T^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

où $T^n = \oplus_{x \in Q_0} I_x^! \otimes e_x \Lambda_n e_a$ et $d^n = (d^n(y,x))_{(y,x) \in Q_0 \times Q_0} : T^n \to T^{n+1}$ avec $d^n(y,x) = \sum_{\alpha \in Q_1(x,y)} I[\alpha^!] \otimes P_a(\alpha) : I_x^! \otimes e_x \Lambda_n e_a \to I_y^! \otimes e_y \Lambda_{n+1} e_a$, for $n \geq 0$. Fixons un entier $n \geq 0$. Puisque $Q$ est graduable, $e_x \Lambda_n e_a = 0$ dans le cas $x \notin Q^{n+s}$ ; et sinon, $e_x \Lambda_n e_a = e_x \Lambda e_a$. Donc, $T^n = \oplus_{x \in Q^{n+s}} I_x^! \otimes e_x \Lambda e_a = G(P_a)^{n+s}$ et $d^n = d^{n+s}_{G(P_a)}$, pour $n \geq 0$. Puisque $G(P_a)^{n+s} = 0$ pour $n < 0$, on conclut que $\mathcal{I}^{\bullet}_{S_a^!} \cong \mathfrak{t}^s(G(P_a)^{\bullet}[s]) \cong G(P_a)^{\bullet}[s]$.

□

Plus généralement, on obtient une résolution projective explicite pour chaque module.

**Proposition 5.3.5.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul, avec $Q$ gradable localement fini. Soit $M \in$ Mod$\Lambda$, on a un quasi-isomorphisme naturel $\eta^{\bullet}_M : (F^C \circ G)(M)^{\bullet} \to M$.*

*Démonstration.* Soit $M \in \mathrm{Mod}\Lambda$. Par définition, $(F^C \circ G)(M)^{\bullet} = F^C(G(M)^{\bullet})$, qui est le complexe total du double complexe $F(G(M)^{\bullet})^{\bullet}$. Given $i, n \in \mathbb{Z}$, on obtient $G(M)^i = \oplus_{x \in Q^i} I_x^! \otimes M(x)$ et

$$(F^C \circ G)(M)^n = \oplus_{i \in \mathbb{Z}; a \in Q^{i-n}} P_a \otimes G(M)^i(a) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}; a \in Q^{i-n}; x \in Q^i} P_a \otimes I_x^!(a) \otimes M(x).$$

Supposons que $n > 0$. Soit $(a, x) \in Q^{i-n} \times Q^i$ avec $i \in \mathbb{Z}$, puisque $Q$ admet pas de chemin de $x$ à $a$, on obtient $I_x^!(a) = 0$. Par conséquent, $(F^C \circ G)(M)^n = 0$.

Supposons que $n < 0$. Nous prétendons que $\mathrm{H}^n((F^C \circ G)(M)^{\bullet}) = 0$, ou ce qui est équivalent, $\mathrm{H}^n((F^C \circ G)(M)^{\bullet}(y)) = 0$, pour chaque $y \in Q^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Maintenant, $(F^C \circ G)(M)^{\bullet}(y)$ est le complexe total de $F(G(M)^{\bullet})^{\bullet}(y)$, dont la $n$-diagonale est formé des modules $F(G(M)^i)^{n-i}(y) = \oplus_{a \in Q^{i-n}; x \in Q^i} P_a(y) \otimes I_x^!(a) \otimes M(x)$, $i \in \mathbb{Z}$. Si $i > n + p$, alors $P_a(y) = 0$ pour tout $a \in Q^{i-n}$. Donc, $F(G(M)^i)^{n-i}(y) = 0$. C-à-d, $F(G(M)^{\bullet})^{\bullet}(y)$ est $n$-diagonalement borné supérieurement. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la $i$-ème colonne de $F(G(M)^{\bullet})^{\bullet}$ est $\mathfrak{t}^i(F(G(M)^i)^{\bullet}) = \oplus_{x \in Q^i} \mathfrak{t}^i(F(I_x^!)^{\bullet}) \otimes M(x)$, où $F(I_x^!)^{\bullet} \cong \mathcal{P}^{\bullet}_{S_x}[i]$ ; voir (5.3.4). Donc,

$\mathrm{H}^{n-i}(\mathfrak{t}^i(F(G(M)^i)^{\bullet})) \cong \oplus_{x \in Q^i} \mathrm{H}^{n-i}(\mathcal{P}^{\bullet}_{S_x}[i]) \otimes M(x) = \oplus_{x \in Q^i} \mathrm{H}^n(\mathcal{P}^{\bullet}_{S_x}) \otimes M(x) = 0$, et par conséquent,

$\mathrm{H}^{n-i}(\mathrm{t}^i(F(G(M)^i)^\bullet)(y)) = 0$. Puisque $\mathrm{t}^i(F(G(M)^i)^\bullet)(y)$ est la $i$-colonne de $F(G(M)^\bullet)^\bullet(y)$, En vertu du lemme 4.0.2(2), on voit que $\mathrm{H}^n((F^C{\circ}G)(M)^\bullet(y)) = 0$.

Il reste à prouver que $\mathrm{H}^0((F^C{\circ}G)(M)^\bullet)$ est naturellement isomorphe à $M$. Pour ce faire, remarquons que la 1-diagonale du double complexe $F(G(M)^\bullet)^\bullet$ est nulle, nous illustrons ses $(-1)$-diagonale et 0-diagonale comme suit :

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{b\in Q^i} P_b \otimes I_b^!(b)\otimes M(b) & \\
\oplus_{(a,x)\in Q^{i+1}\times Q^i} P_a\otimes I_x^!(a)\otimes M(x) \arrow[u, "v^{i,-i-1}"] \arrow[r, "h^{i,-i-1}"] & \oplus_{c\in Q^{i+1}} P_c\otimes I_c^!(c)\otimes M(c),
\end{tikzcd}$$

où $v^{i,-i-1} = (v^{i,-i-1}(b,a,x))_{(b,a,x)\in Q^i\times Q^{i+1}\times Q^i}$, avec $v^{i,-i-1}(b,a,x) = 0$ dans le cas $b\neq x$, et sinon, $v^{i,-i-1}(x,a,x) = \sum_{\alpha\in Q_1(x,a)}(-1)^i P[\bar\alpha]\otimes I_x^!(\alpha^{\mathrm{o}})\otimes 1_{M(x)}$; et $h^{i,-i-1} = (h^{i,-i-1}(c,a,x))_{(c,a,x)\in Q^{i+1}\times Q^{i+1}\times Q^i}$, avec $h^{i,-i-1}(c,a,x) = 0$ dans le cas $c\neq a$, et sinon, $h^{i,-i-1}(a,a,x) = \sum_{\alpha\in Q_1(x,a)} 1_{P_a}\otimes I[\alpha^!]_a\otimes M(\alpha)$.

Rappelons que $(\Lambda^!)^{\mathrm{o}} = kQ/(R^!)^{\mathrm{o}} = \{\hat\gamma \mid \gamma\in kQ\}$, où $\hat\gamma = \gamma + (R^!)^{\mathrm{o}}$. Soit $(x,y)\in Q^i\times Q^{i+1}$ avec $i\in\mathbb{Z}$, d'après le lemme 2.2.8, $I_x^!(x)$ admet une base $\{\hat e_x^\star\}$ et $I_x^!(y)$ admet une base $\{\hat\alpha^\star \mid \alpha\in Q_1(x,y)\}$.

On aura besoin d'un petit lemme.

Lemme. *Soit $d^{-1}$ la différentielle de degré $-1$ de $(F^C{\circ}G)(M)^\bullet$. Considérons $(x,a)\in Q^i\times Q^{i+1}$ pour un $i\in\mathbb{Z}$. Si $\bar\gamma\in P_a$, $\beta\in Q_1(x,a)$ et $u\in M(x)$, alors $d^{-1}(\bar\gamma\otimes\hat\beta^\star\otimes u) = (-1)^i\,\bar\gamma\bar\beta\otimes\hat e_x^\star\otimes u + \bar\gamma\otimes\hat e_a^\star\otimes\bar\beta u$.*

*Preuve.* Soit $\alpha\in Q_1(x,a)$, on voit que $I_x^!(\alpha^{\mathrm{o}})(\hat\beta^\star) = 0$ if $\alpha\neq\beta$, et sinon, $I_x^!(\alpha^{\mathrm{o}})(\hat\beta^\star) = \hat e_x^\star$. D'autre part, $I[\alpha^!]_a(\hat\beta^\star) = 0$ si $\alpha\neq\beta$, et sinon, $I[\alpha^!]_a(\hat\beta^*) = \hat e_a^\star$. Cela donne

$$\begin{aligned}
d^{-1}(\bar\gamma\otimes\hat\beta^\star\otimes u) &= (-1)^i{\textstyle\sum_{\alpha\in Q_1(x,a)}}(P[\bar\alpha]\otimes I_x^!(\alpha^{\mathrm{o}})\otimes 1_{M(x)})(\bar\gamma\otimes\hat\beta^\star\otimes u)\\
&\quad + {\textstyle\sum_{\alpha\in Q_1(x,a)}}(1_{P_a}\otimes I[\alpha^!]_a\otimes M(\alpha))(\bar\gamma\otimes\hat\beta^\star\otimes u)\\
&= (-1)^i\bar\gamma\bar\beta\otimes\hat e_x^\star\otimes u + \gamma\otimes\hat e_a^\star\otimes\bar\beta u.
\end{aligned}$$

Maintenant, il est facile de voir qu'on a une application $\Lambda$-linéaire

$$\eta_M^0 : (F^C{\circ}G)(M)^0\to M : {\textstyle\sum_{(i,x)\in\mathbb{Z}\times Q^i}}\bar\gamma_x\otimes\hat e_x^\star\otimes u_x \mapsto {\textstyle\sum_{(i,x)\in\mathbb{Z}\times Q^i}}(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}\bar\gamma_x u_x,$$

où $\bar\gamma_x\in P_x$ et $u_x\in M(x)$. Nous prétendons que $\eta_M^0\circ d^{-1} = 0$. En effet, considérons un élément $\omega\in(F^C{\circ}G)(M)^{-1}$. Nous pouvons supposer que $\omega\in P_a\otimes I_x^!(a)\otimes M(x)$, pour un $(a,x)\in Q^{i+1}\times Q^i$ avec $i\in\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on peut supposer en outre que $\omega = \bar\gamma\otimes\hat\beta^\star\otimes u$, où $\bar\gamma\in P_a$, $\beta\in Q_1(x,a)$, et

$u \in M(x)$. D'après le sous-lemme, on obtient

$$\begin{array}{rcl}(\eta^0_{M} \circ d^{-1})(\omega) & = & \eta^0_{M}\left((-1)^i \bar{\gamma}\bar{\beta} \otimes \hat{e}^\star_x \otimes u + \bar{\gamma} \otimes \hat{e}^\star_a \otimes \bar{\beta} u\right) \\ & = & (-1)^{\frac{i(i+1)}{2}+i}(\bar{\gamma}\bar{\beta}u) + (-1)^{\frac{(i+1)(i+2)}{2}}(\bar{\gamma}\bar{\beta}u) \\ & = & 0.\end{array}$$

Soit $\omega \in \mathrm{Ker}(\eta^0_{M})$, nous définirons un entier $n_\omega$ comme suit. Si $\omega = 0$, Posons $n_\omega = 0$; et dans ce cas, $\omega \in \mathrm{Im}(d^{-1})$. Sinon, soit $n_\omega$ soit minimal tel que $\omega = \sum_{i=1}^s \bar{\gamma}_i \otimes \hat{e}^\star_{x_i} \otimes u_i$, où $x_i \in Q_0$; $\gamma_i \in kQ_{\leq n_\omega}(x_i, -)$; les $u_i$ sont linéairement indépendants dans $M(x_i)$. For $1 \leq i \leq s$, écrivons $\gamma_i = \lambda_i \varepsilon_{x_i} + \sigma_{i1}\alpha_{i1} + \cdots + \sigma_{i,t_i}\alpha_{i,t_i}$, où $\lambda_i \in k$; $\alpha_{ij} \in Q_1(x_i, a_{ij})$; $\sigma_{ij} \in kQ_{\leq n_\omega - 1}(a_{ij}, -)$. Posons $|x| = i$ pour $x \in Q^i$, on obtient $\sum_{i=1}^s (-1)^{\frac{|x_i|(|x_i|+1)}{2}} \bar{\gamma}_i u_i = 0$. Alors, $\sum_{i=1}^s \lambda_i u_i = 0$, et donc, $\lambda_i = 0$, c-à-d, $\gamma_i = \sigma_{i1}\alpha_{i1} + \cdots + \sigma_{i,t_i}\alpha_{i,t_i}$, pour $i = 1, \ldots, s$. Posons

$$\sigma = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t_i} (-1)^{|x_i|}\, \bar{\sigma}_{i,j} \otimes \hat{\alpha}^\star_{ij} \otimes u_i \in (F^C \circ G)(M)^{-1},$$

on déduit du sous-lemme que

$$\begin{array}{rcl} d^{-1}(\sigma) & = & \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t_i} \left(\bar{\sigma}_{ij}\, \bar{\alpha}_{ij} \otimes \hat{e}^\star_{x_i} \otimes u_i + (-1)^{|x_i|}\, \bar{\sigma}_{ij} \otimes \hat{e}^\star_{a_{ij}} \otimes \bar{\alpha}_{ij}\, u_i\right) \\ & = & \sum_{i=1}^s \left(\bar{\gamma}_i \otimes \hat{e}^\star_{x_i} \otimes u_i + \sum_{j=1}^{t_i} (-1)^{|x_i|}\, \bar{\sigma}_{ij} \otimes \hat{e}^\star_{a_{ij}} \otimes \bar{\alpha}_{ij}\, u_i\right) \\ & = & \omega + \omega', \end{array}$$

où $\omega' = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t_i} (-1)^{|x_i|}\, \bar{\sigma}_{ij} \otimes \hat{e}^\star_{a_{ij}} \otimes \bar{\alpha}_{ij}\, u_i$. Par définition, $n_{\omega'} < n_\omega$, et

$$\eta^0_{M}(\omega') = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{t_i} (-1)^{|x_i| + \frac{|x_i|(x_i|+1)}{2}} \bar{\sigma}_{ij}\bar{\alpha}_{ij}\, u_i = -\sum_{i=1}^s (-1)^{\frac{|x_i|(x_i|+1)}{2}} \bar{\gamma}_i\, u_i = 0.$$

Par récurrence, $\omega \in \mathrm{Im}(d^{-1})$. Thus, $\mathrm{Im}(d^{-1}) = \mathrm{Ker}(\eta^0_{M})$. Cela donne un quasi-isomorphisme naturel $\eta^\bullet_{M} : (F \circ G)(M)^\bullet \to M$.

□

Pour la co-résolution injective, notre résultat sera légèrement plus restrictif.

**Proposition 5.3.6.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul, avec $Q$ graduable localement fini. Soit $N \in \mathrm{Mod}^- \Lambda^!$, on a un quasi-isomorphisme naturel $\theta^\bullet_{N} : N \to (G^C \circ F)(N)^\bullet$.*

*Démonstration.* Fixons $N \in \mathrm{Mod}^- \Lambda^!$. Soit $r$ tel que $N(a) = 0$ pour tout $a \in (Q^{\mathrm{o}})^i = Q^{-i}$ with $i > r$. Par définition, $(G^C \circ F)(N)^\bullet$ est le complexe total du complexe double $G(F(N)^\bullet)^\bullet$. On divisera la preuve en plusieurs assertions.

Assertion 1. *Soit $i \in \mathbb{Z}$, la $i$-ème colonne du complexe double $G(F(N)^{\bullet})^{\bullet}$ est $\mathfrak{t}^i(G(F(N)^i)^{\bullet}) = \oplus_{a\in Q^{-i}} \mathfrak{t}^i(G(P_a)^{\bullet}) \otimes N(a) \cong \oplus_{a\in Q^{-i}} \mathfrak{t}^i(\mathcal{I}^{\bullet}_{S^!_a}[i]) \otimes N(a)$.*

En effet, $F(N)^i = \oplus_{a\in Q^{-i}} P_a \otimes N(a)$, En vertu du lemme 5.3.4, on voit que $G(P_a)^{\bullet} \cong \mathcal{I}^{\bullet}_{S^!_a}[i]$ pour tout $a \in Q^{-i}$.

Assertion 2. *Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a $(G^C \circ F)(N)^n = 0$ dans le cas $n < 0$; et $\mathrm{H}^n((G^C \circ F)(N)^{\bullet}) = 0$ dans le cas $n > 0$.*

En effet, étant donné n'importe quel $n \in \mathbb{Z}$, on a $(G^C \circ F)(N)^n = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} G(F(N)^i)^{n-i}$, où

$$G(F(N)^i)^{n-i} = \oplus_{x\in Q^{n-i}} I^!_x \otimes F(N)^i(x) = \oplus_{x\in Q^{n-i};a\in Q^{-i}} I^!_x \otimes P_a(x) \otimes N(a).$$

Si $n < 0$, alors $P_a(x) = 0$ pour tout $(x, a) \in Q^{n-i} \times Q^{-i}$ with $i \in \mathbb{Z}$, et par conséquent, $(G^C \circ F)(N)^n = 0$. Supposons que $n > 0$. Puisque $N(a) = 0$ pour chaque $a \in Q^{-i}$ avec $i > r$, on voit que $G(F(N)^{\bullet})^{\bullet}$ est $n$-diagonalement borné supérieurement. De plus, dans l'assertion 1, le $(n - i)$-ème cohomologie de la $i$-ème colonne de $G(F(N)^{\bullet})^{\bullet}$ est donnée par

$$\mathrm{H}^{n-i}(\mathfrak{t}^i(G(F(N)^i)^{\bullet})) \cong \oplus_{a\in Q^{-i}} \mathrm{H}^{n-i}(\mathcal{I}^{\bullet}_{S^!_a}[i]) \otimes N(a) = \oplus_{a\in Q^{-i}} \mathrm{H}^n(\mathcal{I}^{\bullet}_{S^!_a}) \otimes N(a) = 0.$$

En vertu du lemme 4.0.2(2), $\mathrm{H}^n((G^C \circ F)(N)^{\bullet}) = 0$.

Il reste à construire un isomorphisme naturel $N \to \mathrm{H}^0((G^C \circ F)(N)^{\bullet})$. Observons que les modules $G(F(N)^i)^{-i} = \oplus_{x\in Q^{n-i};a\in Q^{-i}} I^!_x \otimes P_a(x) \otimes N(a)$, avec $i \in \mathbb{Z}$ forme une 0-diagonale de $G(F(N)^{\bullet})^{\bullet}$. De plus, $\Lambda^! = kQ^{\mathrm{o}}/R^! = \{\gamma^! \mid \gamma \in kQ\}$, où $\gamma^! = \gamma^{\mathrm{o}} + R^!$, tandis que $(\Lambda^!)^{\mathrm{o}} = kQ/(R^!)^{\mathrm{o}} = \{\hat{\gamma} \mid \gamma \in kQ\}$, où $\hat{\gamma} = \gamma + (R^!)^{\mathrm{o}}$. Soient $a, y \in Q_0$, il existe une application linéaire

$$N_{a,y} : N(y) \to \mathrm{Hom}_k(e_y(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_a, P_a(a) \otimes N(a)) : u \mapsto N_{a,y}(u),$$

woù $N_{a,y}(u)$ envoie $\hat{\gamma}$ à $e_a \otimes \gamma^! u$, pour tout $\gamma \in kQ(a, y)$. En vertu du corolaire 1.1.2, il existe un $k$-isomorphisme

$$\theta_{a,y} : \mathrm{Hom}_k(e_y(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_a, k) \otimes P_a(a) \otimes N(a) \to \mathrm{Hom}_k(e_y(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_a, P_a(a) \otimes N(a)).$$

Cela donne une application linéaire $f^a_y = \theta^{-1}_{a,y} \circ N_{a,y} : N(y) \to I^!_a(y) \otimes P_a(a) \otimes N(a)$.

Assertion 3. *Si* $\{\hat{\gamma}_1, \cdots, \hat{\gamma}_s\}$ *est une base* $e_y(\Lambda^!)^{\mathrm{o}} e_a$ *avec une base duale* $\{\hat{\gamma}_1^\star, \cdots, \hat{\gamma}_s^\star\}$*, où* $a, y \in Q_0$*, alors* $f_y^a(u) = \sum_{i=1}^s \hat{\gamma}_i^\star \otimes e_a \otimes \gamma_i^! u$*, pour tout* $u \in N(y)$*.*

En effet, chaque $\hat{\gamma} \in e_z(\Lambda^!)^{\mathrm{o}} e_a$ s'écrit comme $\hat{\gamma} = \sum_{j=1}^s \lambda_j \hat{\gamma}_j$, pour un $\lambda_j \in k$. Soit $u \in N(z)$, par définition de $\theta_{a,y}$,on obtient

$$\theta_{a,y}(\textstyle\sum_{i=1}^s \hat{\gamma}_i^\star \otimes e_a \otimes \gamma_i^! u)(\hat{\gamma}) = \sum_{1 \le i,j \le s} (\lambda_j \hat{\gamma}_i^\star(\hat{\gamma}_j)) \cdot (e_a \otimes \gamma_i^! u) = e_a \otimes \gamma^! u = N_{a,y}(u)(\hat{\gamma}).$$

Donc, $\theta_{a,z}(\sum_{i=1}^s \hat{\gamma}_i^\star \otimes e_a \otimes \gamma_i^! u) = N_{a,y}(u)$, et donc, $f_y^a(u) = \sum_{i=1}^s \hat{\gamma}_i^\star \otimes e_a \otimes \gamma_i^! u$.

Assertion 4. *Soit* $a \in Q_0$*, il existe un morphisme* $\Lambda^!$*-linear naturel* $f^a = (f_y^a)_{y \in Q_0} : N \to I_a^! \otimes P_a(a) \otimes N(a)$*.*

En effet, pour n'importe quel $\alpha : z \to y$ in $Q_1$, il est facile de vérifier la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
N(y) \arrow[r, "N_{a,y}"] \arrow[d, "N(\alpha^{\mathrm{o}})"'] & \mathrm{Hom}_k(P_a^{!,\mathrm{o}}(y), P_a(a) \otimes N(a)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(P_a^{!,\mathrm{o}}(\alpha), P_a(a) \otimes N(a))"] & I_a^!(y) \otimes P_a(a) \otimes N(a) \arrow[l, "\theta_{a,y}"'] \arrow[d, "I_a^!(\alpha^{\mathrm{o}}) \otimes 1\!\!1 \otimes 1\!\!1"] \\
N(z) \arrow[r, "N_{a,z}"] & \mathrm{Hom}_k(P_a^{!,\mathrm{o}}(z), P_a(a) \otimes N(a)) & I_a^!(z) \otimes P_a(a) \otimes N(a). \arrow[l, "\theta_{a,z}"']
\end{tikzcd}$$

Donc, $f^a$ is $\Lambda^!$-linéaire. Étant donné un morphisme $\Lambda^!$-linéaire $g : N \to M$, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
N(y) \arrow[r, "N_{a,y}"] \arrow[d, "g_y"'] & \mathrm{Hom}_k(P_a^{!,\mathrm{o}}(y), P_a(a) \otimes N(a)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(P_a^{!,\mathrm{o}}(y), 1\!\!1 \otimes g_a)"] & I_a^!(y) \otimes P_a(a) \otimes N(a) \arrow[l, "\theta_{a,y}"'] \arrow[d, "1\!\!1 \otimes 1\!\!1 \otimes g_a"] \\
M(y) \arrow[r, "M_{a,y}"] & \mathrm{Hom}_k(P_a^{!,\mathrm{o}}(y), P_a(a) \otimes M(a)) & I_a^!(y) \otimes P_a(a) \otimes M(a), \arrow[l, "\theta_{a,y}"']
\end{tikzcd}$$

où le carré à gauche est commutatif, tandis que la commutativité du carré à droite vient du lemme 1.1.2(1).

Soit $a \in Q^{-i}$, en vertu de l'assertion (3), on obtient un morphisme $\Lambda^!$-linéaire $g^a = (g_y^a)_{y \in Q_0} : N \to I_a^! \otimes P_a(a) \otimes N(a)$, où $g_y^a = (-1)^{\frac{(i-1)i}{2}} f_y^a$.

Assertion 5. *Posons* $g = (g^a)_{a \in Q_0}$*, on obtient un monomorphisme naturel* $\Lambda^!$*-linéaire* $g : N \to (G^C \circ F)(N)^0$.

En effet, $g$ est un monomorphisme $\Lambda^!$-linéaire si et seulement si, pour chaque $y \in Q_0$, le morphisme linéaire $g_y = (g_y^a) : N(y) \to (G^C \circ F)(N)^0 = \oplus_{a \in Q_0} I_a^!(y) \otimes P_a(a) \otimes N(a)$ est injectif. Supposons maintenant que $g_y(u)=0$, pour un $u\in N(y)$. Alors $g_y^a(u)=0$, pour chaque $a\in Q_0$. En particulier, $g_y^y(u)=0$, et donc, $f_y^y(u)=0$. Puisque $\{e_y\}$ est une base $e_y(\Lambda)^{\mathrm{o}}e_y$, d'après assertion 3, on voit que $e_y^\star\otimes e_y\otimes u=0$, et donc, $u=0$.

Pour le reste de la preuve, remarquons que la $(-1)$-diagonale de $G(F(M)^\bullet)^\bullet$ contient juste les objects nul, nous illustrons ses 0-diagonale et 1-diagonale comme suit :

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{b\,\in Q^{-i}} I_b^! \otimes P_b(b)\otimes N(b) \arrow[r, "h^{i,-i}"] & \oplus_{(a,x)\,\in Q^{-i-1}\times Q^{-i}} I_x^!\otimes P_a(x)\otimes N(a) \\
& \oplus_{c\,\in Q^{-i-1}} I_c^!\otimes P_c(c)\otimes N(c), \arrow[u, "v^{i+1,-i-1}"']
\end{tikzcd}$$

où $h^{i,-i}=(h^{i,-i}(a,x,b))_{(a,x,b)\in Q^{-i}\times Q^{-i-1}\times Q^{-i}}$, avec $h^{i,-i}(a,x,b)=0$ pour $b\neq x$, et $h^{i,-i}(a,x,x)=\sum_{\alpha\in Q_1(a,x)}1_{I_x^!}\otimes P[\bar\alpha]\otimes N(\alpha^{\mathrm{o}})$, et d'autre part, on a $v^{i+1,-i-1}=(v^{i+1,-i-1}(a,x,c))_{(a,x,c)\in Q^{-i}\times Q^{-i-1}\times Q^{-i-1}}$ avec $v^{i+1,-i-1}(a,x,c)=0$ pour $c\neq a$, et $v^{i+1,-i-1}(a,x,a)=\sum_{\alpha\in Q_1(a,x)}(-1)^{i+1}I[\alpha^!]\otimes P_a(\alpha)\otimes 1_{N(a)}$.

Assertion 6. *Si $d^0$ est la différentielle de 0-degré de $(G^C\circ F)(N)^\bullet$, alors $d^0\circ g=0$.*

En effet, cela revient à montrer, pour tout $p\in\mathbb{Z}$, que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{x\,\in Q^{-p}} I_x^!\otimes P_x(x)\otimes N(x) \arrow[r, "\oplus h^{p,-p}(a,x,x)"] & \oplus_{(a,x)\,\in Q^{-p-1}\times Q^{-p}} I_x^!\otimes P_a(x)\otimes N(a) \\
N \arrow[u, "(g^x)_{x\in Q^{-p}}"] \arrow[r, "(g^a)_{a\in Q^{-p-1}}"] & \oplus_{a\,\in Q^{-p-1}} I_a^!\otimes P_a(a)\otimes N(a), \arrow[u, "\oplus v^{p+1,-p-1}(a,x,a)"']
\end{tikzcd}$$

est anti-commutatif, ou de manière équivalente, nous avons un diagramme anti-commutatif

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{x\,\in Q^{-p}} I_x^!(y)\otimes P_x(x)\otimes N(x) \arrow[r, "\oplus h^{p,-p}(a,x,x)(y)"] & \oplus_{(a,x)\,\in Q^{-p-1}\times Q^{-p}} I_x^!(y)\otimes P_a(x)\otimes N(a) \\
N(y) \arrow[u, "(g_y^x)_{x\in Q^{-p}}"] \arrow[r, "(g_y^a)_{a\in Q^{-p-1}}"] & \oplus_{a\,\in Q^{-p-1}} I_a^!(y)\otimes P_a(a)\otimes N(a), \arrow[u, "\oplus v^{p+1,-p-1}(a,x,a)(y)"']
\end{tikzcd}$$

pour tout $y\in Q_0$. Fixons $u\in N(y)$ pour un $y\in Q_0$. Considérons $\alpha\in Q_1(a,x)$ avec $(a,x)\in Q^{-p-1}\times Q^{-p}$. Choisissons une $\{\hat\delta_1,\dots,\hat\delta_s\}$ de $e_y(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_x$, on déduit de l'assertion 3 que $(1\otimes P[\bar\alpha]\otimes N(\alpha^{\mathrm{o}}))\left(g_y^x(u)\right)=(-1)^{\frac{(p-1)p}{2}}\sum_{i=1}^s\hat\delta_i^\star\otimes\bar\alpha\otimes\alpha^!\delta_i^!u$. D'autre part, pour chaque base $\{\hat\gamma_1,\dots,\hat\gamma_t\}$ de $e_y(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_a$, on obtient

$$(I[\alpha^!]\otimes P_a(\alpha)\otimes 1)\left(g_y^a(u)\right)=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\sum_{i=1}^t I[\alpha^!](\hat\gamma_i^\star)\otimes\bar\alpha\otimes\gamma_i^!u.$$

Soit $\theta: I_x^!(y)\otimes P_a(x)\otimes N(a)\to \mathrm{Hom}_k(e_y(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_x, P_a(x)\otimes N(a))$ un isomorphisme $k$-linéaire comme prouver dans le corollaire 1.1.2. Étant donné un $1 \leq j \leq s$, il est facile de voir

$$\theta[(1\otimes P[\bar{\alpha}] \otimes N(\alpha^{\mathrm{o}}))\left(g_y^x(u)\right)](\hat{\delta}_j) = (-1)^{\frac{(p-1)p}{2}}(\bar{\alpha}\otimes \alpha^! \delta_j^! u),$$

et $\theta[(I[\alpha^!] \otimes P_a(\alpha) \otimes 1)\left(g_y^a(u)\right)](\hat{\delta}_j) = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum_{i=1}^t \hat{\gamma}_i^\star(\hat{\delta}_j\hat{\alpha})\left(\bar{\alpha}\otimes \gamma_i^! u\right)$.

Fixons un $1 \leq j \leq s$. Si $\hat{\delta}_j\,\hat{\alpha} = 0$, alors $\alpha^!\delta_j^! = 0$, et donc,

$$\theta[(I[\alpha^!] \otimes P_a(\alpha) \otimes 1)\left(g_y^a(u)\right)](\hat{\delta}_j) = 0 = (-1)^p\theta[(1\otimes P[\bar{\alpha}] \otimes N(\alpha^{\mathrm{o}}))\left(g_y^x(u)\right)](\hat{\delta}_j).$$

Si $\hat{\delta}_j\,\hat{\alpha} \neq 0$, alors on peut la compléter en une base $\{\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_t\}$ avec $\hat{\gamma}_1 = \hat{\delta}_j\,\hat{\alpha}$ de $e_y(\Lambda^!)^{\mathrm{o}}e_a$. Sous cette hypothèse, on obtient

$$\begin{array}{rcl}\theta[(I[\alpha^!] \otimes P_a(\alpha) \otimes 1)\left(g_y^a(u)\right)](\hat{\delta}_j) & = & (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\sum_{i=1}^t \hat{\gamma}_i^\star(\hat{\gamma}_1)(\bar{\alpha}\otimes\gamma_i^! u)\\ & = & (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}(\bar{\alpha}\otimes\gamma_1^! u)\\ & = & (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}(\bar{\alpha}\otimes\hat{\delta}_j\hat{\alpha}\, u)\\ & = & (-1)^p\theta[(1\otimes P[\bar{\alpha}]\otimes N(\alpha^{\mathrm{o}}))\left(g_y^x(u)\right)](\hat{\delta}_j).\end{array}$$

Donc, $\theta[(I[\alpha^!] \otimes P_a(\alpha) \otimes 1)\left(g_y^a(u)\right)] = (-1)^p\theta[(1\otimes P[\bar{\alpha}] \otimes N(\alpha^{\mathrm{o}}))\left(g_y^x(u)\right)]$, et par conséquent, $(I[\alpha^!] \otimes P_a(\alpha)\otimes 1)\left(g_y^a(u)\right) = (-1)^p(1\otimes P[\bar{\alpha}]\otimes N(\alpha^{\mathrm{o}}))\left(g_y^x(u)\right)$. Cela donne $(h^{p,-p}(a,x,x)(y)\circ g_y^x)(u)+(v^{p+1,-p-1}(a,x,a)(y)\circ g_y^a)(u) = 0$, et donc, $h^{p,-p}(a,x,x)(y)\circ g_y^x + v^{p+1,-p-1}(a,x,a)(y)\circ g_y^a = 0$. Ceci implique l'anti-commutativité requise

Soit $\omega = (\omega^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ker}(d^0)$, avec $\omega^i \in G(F(N)^i)^{-i} = \oplus_{a\in Q^{-i}} I_a^! \otimes P_a(a)\otimes N(a)$. Rappelons que $G(F(N)^i)^{-i} = 0$, pour $i > r$. Nous définirons $n_\omega(\leq r)$ comme suit. Si $\omega = 0$, alors $n_\omega = r$ ; et sinon, $n_\omega$ est minimal pour lequel $w^{n_\omega} \neq 0$. Si $n_\omega = r$,alors évidement $\omega \in \mathrm{Im}(g)$. Supposons que $n_\omega < r$. Puisque $\omega \in \mathrm{Ker}(d^0)$, on a $v^{n_\omega,-n_\omega}(\omega^{n_\omega}) = -h^{n_\omega-1,1-n_\omega}(\omega^{n_\omega-1}) = 0$. Par l'assertion 1, la $n_\omega$-ème colonne de $G(F(N)^\bullet)^\bullet$ est, avec un twist, le décalage par $n_\omega$ de la co-résolution minimale injective de $\oplus_{a\in Q^{-n_\omega}} S_a^! \otimes P_a(a)\otimes N(a)$. Donc, $w^{n_\omega} \in S(\oplus_{a\in Q^{-n_\omega}} I_a^!\otimes P_a(a)\otimes N(a))$, et En vertu du Lemme 2.2.8, $\omega^{n_\omega} = \sum_{a\in Q^{-n_\omega}} \hat{e}_a^\star \otimes e_a \otimes u_a$, où $u_a \in N(a)$.

En vertu de l'assertion 3, on obtient $g(\sum_{a\in Q^{-n_\omega}} u_a) = \sum_{a\in Q^{-n_\omega}} \hat{e}_a^\star\otimes e_a\otimes u_a = \omega^{n_\omega}$, et assertion 6, $\nu = \omega - g(\sum_{a\in Q^{-n_\omega}} u_a) \in \mathrm{Ker}(d^0)$. Écrivons $\nu = (\nu^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ avec $\nu^i \in G(F(N)^i)^{-i}$, on voit que $\nu^{n_\omega} = \omega^{n_\omega} - g(\sum_{a\in Q^{-n_\omega}} u_a) = 0$, et $\nu^i = \omega^i = 0$ pour tout $i < n_\omega$. Par conséquent, $n_\nu < n_\omega$. Supposons par récurrence que $\nu \in \mathrm{Im}(g)$, on obtient $\omega \in \mathrm{Im}(g)$. Cela montre que $\mathrm{Ker}(d^0) = \mathrm{Im}(g)$.

Posons $\theta_N^0 = g$ et $\theta_N^i = 0$ pour tout $i \neq 0$, on obtient un quasi-isomorphisme $\theta_N^\bullet : N \to (G^C \circ F)(N)^\bullet$, qui est naturel en $N$ d'après l'assertion 4.

□

Le résultat suivant est l'un des principaux résultats de cette thèse. il généralise sous l'hyporthèse de graduation le Théorème 2.12.1 in [10] et le Théorème 30 dans [44].

**Théorème 5.3.7.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul, où $Q$ est un carquois graduable localement fini. Étant donnés $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 0$, le foncteur dérivé de Koszul $F^D : D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \to D^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda)$ est une équivalence triangulée avec un quasi-inverse $G^D : D^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda) \to D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$.*

*Démonstration.* Soit $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 0$. En vertu du théorème 5.3.3, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \arrow[r, "P_{\Lambda^!}"] \arrow[d, "F^C"'] & K^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \arrow[r, "L_{\Lambda^!}"] \arrow[d, "F^K"] & D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \arrow[d, "F^D"] \\
C^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda) \arrow[r, "P_\Lambda"] \arrow[d, "G^C"'] & K^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda) \arrow[r, "L_\Lambda"] \arrow[d, "G^K"] & D^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda) \arrow[d, "G^D"] \\
C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \arrow[r, "P_{\Lambda^!}"] & K^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!) \arrow[r, "L_{\Lambda^!}"] & D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!).
\end{tikzcd}$$

Premièrement, on prouvera que $G^D \circ F^D \cong 1_{D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda)}$. Observons que $C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$ est une sous-catégorie pleine de $C(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$. Considérons $G^C \circ F : \mathrm{Mod}\Lambda^! \to C(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$ et le foncteur canonique $\kappa : \mathrm{Mod}^{-}\Lambda^! \to C(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$. En vertu de la proproposition 5.3.6, on obtient un morphisme fonctoriel $\theta = (\theta_N^\bullet)_{N \in \mathrm{Mod}^{-}\Lambda^!} : \kappa \to G^C \circ F$, où $\theta_N^\bullet : \kappa(N)^\bullet \to (G^C \circ F)(N)^\bullet$ est un quasi-isomorphisme. En vertu des lemmes 4.0.8 et 4.0.9, $\theta$ induit un morphisme fonctoriel $\theta^C : \kappa^C \to (G^C \circ F)^C = G^C \circ F^C$.

Soit $N^\bullet \in C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$, nous prétendons que $\theta^C_{N^\bullet} : N^\bullet \to (G^C \circ F)^C(N^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme. Puisque $N^i \in \mathrm{Mod}\Lambda^!$, par la proposition 5.3.6, $\theta^\bullet_{N^i} : \kappa(N^i)^\bullet \to (G^C \circ F)(N^i)^\bullet$ est un quasi-isomorphisme, pour chaque $i \in \mathbb{Z}$. il est clair que le complexe double $\kappa(N^\bullet)^\bullet$ est diagonalement borné supérieurement. Soit un entier $n$, la $n$-diagonale du complexe double $(G^C \circ F)(N^\bullet)^\bullet$ est formée des modules

$$(G^C \circ F)(N^i)^{n-i} = \oplus_{j \in \mathbb{Z}; x \in Q^{-j}; y \in Q^{n-i-j}} I_y^! \otimes P_x(y) \otimes N^i(x);\ i \in \mathbb{Z}.$$

Si $i > n$, alors $P_x(y) = 0$, pour tout $x \in Q^{-j}$ et $y \in Q^{n-i-j}$ avec $j \in \mathbb{Z}$, et donc, $(G^C \circ F)(N^i)^{n-i} = 0$.

C-à-d, $(G^C \circ F)(N^\bullet)^\bullet$ est diagonalement borné supérieurement. En vertu du lemme 4.0.10, $\theta^C_{N^\bullet}$ est en effet un quasi-isomorphisme dans $C^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$. Par conséquent, $\theta^D_{N^\bullet} = L_{\Lambda^!}(P_{\Lambda^!}(\theta^C_{N^\bullet})) : N^\bullet \to (G^D \circ F^D)(N^\bullet)$ est un isomorphisme naturel en $D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!)$. Cela donne un isomorphisme fonctoriel $\theta^D : G^D \circ F^D \to 1_{D^{\downarrow}_{p,q}(\mathrm{Mod}\Lambda^!)}$.

Maintenant, on prouvera que $F^D \circ G^D \cong 1_{D^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda)}$. Pour cela, considérons l'injection canonique $\kappa : \mathrm{Mod}\Lambda \to C(\mathrm{Mod}\Lambda)$ et $F^C \circ G : \mathrm{Mod}\Lambda \to C(\mathrm{Mod}\Lambda)$. En vertu du lemme 5.3.5, on obtient un morphisme fonctoriel $\eta = (\eta^\bullet_M)_{M \in \mathrm{Mod}\Lambda} : F^C \circ G \to \kappa$, où $\eta^\bullet_M : (F^C \circ G)(M)^\bullet \to \kappa(M)^\bullet$ est un quasi-isomorphisme. En vertu des lemmes 4.0.8 et 4.0.9, $\eta$ induit un morphisme fonctoriel $\eta^C : (F^C \circ G)^C \to \kappa^C$, c-à-d un morphisme fonctoriel $\eta^C : F^C \circ G^C \to 1_{C(\mathrm{Mod}\Lambda)}$. Comme expliqué ci-dessus, il suffit de prouver que, pour chaque $M^\bullet \in C^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda)$, que $\eta^C_{M^\bullet} : (F^C \circ G)^C(M^\bullet) \to \kappa^C(M^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme, ce qui est équivalent à dire que son cône est acyclique.

Par définition, $\eta^C_{M^\bullet} = \eta^\bullet_{M^\bullet} = \mathbb{T}(\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet})$, où $\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet} : (F^C \circ G)(M^\bullet)^\bullet \to \kappa(M^\bullet)^\bullet$ est défini par $\eta^{i,j}_{M^\bullet} = \eta^j_{M^i}$ : $(F^C \circ G)(M^i)^j \to \kappa(M^i)^j$. En vertu du lemme 4.0.5, $C_{\eta^\bullet_{M^\bullet}} = \mathbb{T}(V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}})$. pour montrer que $C_{\eta^\bullet_{M^\bullet}}$ est acyclique, il faut montrer que $C_{\eta^\bullet_{M^\bullet}}(z) = \mathbb{T}(V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}}(z))$ est acyclique pour chaque $z \in Q_0$, où $V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}}(z)$ est le cône vertical du morphisme de complexe double $\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}(z) : (F^C \circ G)(M^\bullet)^\bullet(z) \to \kappa(M^\bullet)^\bullet(z)$. Supposons que $z \in Q^s$ avec $s \in \mathbb{Z}$. Puisque le $\eta^\bullet_{M^i} : (F^C \circ G)(M^i)^\bullet \to \kappa(M^i)^\bullet$ sont quasi-isomorphismes, en vertu du lemme 4.0.4(1), $V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}}$ admet des colonnes acycliques, et de aussi $V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}}(z)$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, la $n$-diagonale du complexe double $(F^C \circ G)(M^\bullet)^\bullet(z)$ est formée des modules

$$\begin{aligned}(F^C \circ G)(M^i)^{n-i}(z) &= \oplus_{j \in \mathbb{Z};\, x \in Q^j;\, y \in Q^{i+j-n}} P_y(z) \otimes I^!_x(y) \otimes M^i(x) \\ &= \oplus_{j \le n+s-i;\, x \in Q^j;\, y \in Q^{i+j-n}} P_y(z) \otimes I^!_x(y) \otimes M^i(x),\end{aligned}$$

avec $i \in \mathbb{Z}$. Puisque $M^\bullet \in C^{\uparrow}_{q+1,p-1}(\mathrm{Mod}\Lambda)$, il existe un $t$ pour lequel $M^i(x) = 0$ pour $x \in Q^j$ avec $i-(p-1)j > t$. Soit $x \in Q^j$ avec $j \le n+s-i$. Si $i > \frac{(p-1)(n+s)+t}{p}$, alors $i-(p-1)j \ge i-(p-1)(n+s-i) = pi-(p-1)(n+s) > t$, et donc, $M^i(x) = 0$. Cela montre que $(F^C \circ G)(M^\bullet)^\bullet(z)$ est diagonalement borné supérieurement. Puisque $\kappa(M^\bullet)^\bullet(z)$ est évidement diagonale borné supérieurement, on peut voir que $V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}}(z)$ est diagonalement borné supérieurement. Par le corollaire 4.0.3, $\mathbb{T}(V_{\eta^{\bullet\bullet}_{M^\bullet}}(z))$ est acyclique, c-à-d, $C_{\eta^\bullet_{M^\bullet}}(z)$ est acyclique.

□

**Théorème 5.3.8.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul, où $Q$ est un carquois graduable localement fini. Si $\Lambda$ est localement bornée à droite (ou à gauche, resp.) et $\Lambda^!$ est localement bornée à gauche (ou à droite, resp.), alors on obtient deux équivalences triangulées $D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda^!) \cong D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda)$ et $D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda^!) \cong D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$.*

*Démonstration.* Premièrement, supposons que $\Lambda$ est localement bornée à droite et $\Lambda^!$ est localement bornée à gauche. Alors, $P_x \in \mathrm{mod}^b\Lambda$ et $I_x^! \in \mathrm{mod}^b\Lambda^!$, pour tout $x \in Q_0$. Par conséquent,on obtient deux foncteurs de Koszul $F : \mathrm{Mod}^b\Lambda^! \to C^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda)$ et $F : \mathrm{mod}^b\Lambda^! \to C^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$, et deux foncteurs inverses de Koszul $G : \mathrm{Mod}^b\Lambda \to C^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda^!)$ and $G : \mathrm{mod}^b\Lambda \to C^b(\mathrm{mod}^b\Lambda^!)$. Donc le foncteur $F^D$ envoie un complexe borné de modules sur un complexe borné de modules projectifs (car tous les modules ont des supports finis), et d'après le théorème 5.3.7, on obtient une équivalence triangulée $F^D : D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda^!) \to D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda)$ et $F^D : D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda^!) \to D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$. Supposons que $\Lambda$ est localement bornée à gauche et $\Lambda^!$ est localement bornée à droite. Puisque $\Lambda^!$ est de Koszul avec $(\Lambda^!)^! = \Lambda$, on a une équivalence triangulée $D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda) \cong D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda^!)$ et $D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda) \cong D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda^!)$.

□

Un chemin infini dans un carquois est dit *infini à droite* si il n'a pas de point d'arrivée et *infini à gauche* si il n'a pas de point de départ.

**Corollaire 5.3.9.** *Soit $\Lambda = kQ/R$ une algèbre de Koszul, où $Q$ est un carquois graduable localement fini. Si $Q$ n'a pas de chemin infini à droite ou n'a pas de chemin infini à gauche, alors on a les équivalences triangulées $D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda^!) \cong D^b(\mathrm{Mod}^b\Lambda)$ and $D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda^!) \cong D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$.*

*Démonstration.* Si $Q$ n'a pas de chemin infini à droite, alors $Q^o$ n'a pas de chemin infini à gauche, et en particulier, $\Lambda$ est localement bornée à droite et $\Lambda^!$ est localement bornée à gauche. Si $Q$ n'admet pas de chemin infini à gauche, alors $\Lambda$ localement bornée à gauche et $\Lambda^!$ est localement bornée à droite. D'où le résultat. □

# CHAPITRE 6

# Revêtements galoisiens

Dans ce chapitre, nous présenterons le revêtement galoisien des carquois, des catégories linéaires, des catégories dérivées et des catégories singulières. Cette notion a été introduite par Bongartz-Gabriel. Le lecteur est inviter à consulter [1, 2, 6, 11] pour plus de détails sur les résultats de ce chapitre.

## 6.1 Revêtement galoisien des carquois

Une $G$-action d'un groupe $G$ sur un carquois $Q$ est un homomorphisme de $G$ vers le groupe Aut(Q) des automorphismes de $Q$.

**Définition 6.1.1.** *Soit $Q$ un carquois muni d'une $G$-action libre. Un morphisme de carquois $\phi : Q \to Q'$ est dit un $G-$revêtement galoisien, si les conditions suivantes sont vérifiées :*

*i. L'application $\phi_0$ est surjective.*

*ii. Si $g \in G$, alors $\phi \circ g = \phi$.*

*iii. Si $x, y \in Q_0$ avec $\phi_0(x) = \phi_0(y)$, alors $y = gx$, pour un $g \in G$.*

*iv. Si $x \in G$, alors $\phi_1$ induit deux bijections $x^+ \to \phi_0(x)^+$ et $x^- \to \phi_0(x)^-$.*

## 6.2 Revêtement galoisien des catégories linéaires

Lorsqu'on dit que $\Lambda$ est une catégorie linéaire, cela veut dire une $\mathbb{Z}$-catégorie linéaire, c-à-d, ses espaces de morphismes sont des $\mathbb{Z}$-modules et la composition des morphismes est $\mathbb{Z}$-bilinéaire.
Soit $G$ un groupe et $\Lambda$ une catégorie linéaire. Une $G$-action sur $\Lambda$ est tout simplement un homomorphisme de groupe $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\Lambda)$, où $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ est le groupe des automorphismes de $\Lambda$.
Le revêtement galoisien des algèbres a été introduit par Bongartz et Gabriel [11]. Récemment, Bautista et Liu [6, 7] l'ont généralisé à des catégories linéaires générales, par exemple, les catégorie des complexes, les catégorie d'homotopie et les catégories dérivées.

**Définition 6.2.1.** *Soit $\Lambda$ une catégorie linéaire munie d'une $G$-action. Une $G$-action est dite :*

*i. libre, si $g.X \cong X$ pour un objet indécomposable $X \in \Lambda$, alors $g = e$.*

*ii. localement bornée, si pour tous $X, Y$ indécomposables, $\Lambda(X, gY) \neq 0$ pour tous sauf un nombre fini de $g \in G$.*
*($\Lambda(X, gY)$ est l'ensemble de morphismes de $X$ vers $gY$).*

*iii. admissible, si elle est libre et localement bornée.*

Le lemme suivant est dans [6].

**Lemme 6.2.2.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec une $G$-action localement bornée.*
*Si $G$ est un groupe sans torsion, alors la $G$-action sur $\mathcal{C}$ est libre.*

Soit $F$ un foncteur entre deux catégories linéaires. On va identifier l'élément $g \in G$ avec $\rho(g) \in Aut(\Lambda)$. Rappelons qu'un isomorphisme fonctoriel $\delta_g : F \circ g \to F$ est la donnée d'une famille d'isomorphismes $\delta_{g,X} : (F \circ g)(X) \to F(X)$, avec $X \in \Lambda$ et qui est naturelle en $X$.

**Définition 6.2.3.** *Soient $\Lambda$ et $\Lambda^{'}$ deux catégories linéaires avec $G$ un groupe qui agit sur $\Lambda$.*
*Un fonteur $F : \Lambda \to \Lambda^{'}$ est dit $G$-stable, si ils existent des isomorphismes fonctoriels $\delta_g : F \circ g \to F$, $g \in G$, tels que*

$$\delta_{h,X} \circ \delta_{g,\, h \cdot X} = \delta_{gh,X}.$$

*pour tous $g, h \in G$ et $X \in \Lambda$. Dans ce cas, on appelle $\delta = \{\delta_g \mid g \in G\}$ un $G$-stabilisateur de $F$.*

**Remarque 6.2.4.** *i. Par définition, $\delta_{g,X}^{-1} = \delta_{g^{-1},g\cdot X}$ pour $g \in G$ et $X \in \Lambda$. $\delta_e = 1_F$, où $e$ est l'élément neutre $G$.*

*ii. Si $X = Y \oplus Z$, alors*
$$\delta_{g,X} = \begin{pmatrix} \delta_{g,Y} & 0 \\ 0 & \delta_{g,Z} \end{pmatrix}.$$

*iii. le $G$-stabilisateur $\delta$ de $F$ est dit trivial si $\delta_g = 1_F$, pour tout $g \in G$. Dans ce cas, on dit que $F$ est $G$-invariant.*

**Définition 6.2.5.** *Soient $\Lambda$ et $\Lambda^{'}$ deux catégories linéaires et $G$ un groupe qui agit sur $\Lambda$.*
*Un foncteur $F : \Lambda \to \Lambda^{'}$ est dit un $G$-pré-revêtement, si $F$ admet un $G$-stabilisateur tel que, pour tous $X, Y \in \Lambda$, les deux applications suivantes sont des isomorphismes :*

$$F_{X,Y} : \oplus_{g\in G} \Lambda(X, g\cdot Y) \to \Lambda^{'}(F(X), F(Y)) : \ (u_g)_{g\in G} \mapsto \textstyle\sum_{g\in G} \delta_{g,Y} \circ F(u_g).$$
$$F^{X,Y} : \oplus_{g\in G} \Lambda(g\cdot X, Y) \to \Lambda^{'}(F(X), F(Y)) : \ (v_g)_{g\in G} \mapsto \textstyle\sum_{g\in G} F(v_g) \circ \delta_{g,X}^{-1}.$$

**Lemme 6.2.6.** *Soient $\Lambda$ et $\Lambda^{'}$ deux catégories linéaires et $G$ un groupe qui agit sur $\Lambda$.*
*Soit $F : \Lambda \to \Lambda^{'}$ un $G$-pré-revêtement de catégories linéaires avec un $G$-stabilisateur $\delta$.*

*i. Pour tous $X, Y \in \Lambda$, on a la décomposition suivante :*

$$\Lambda^{'}(F(X), F(Y)) = \oplus_{g\in G} \delta_{g,Y} \circ F(\Lambda(X, g\cdot Y)) = \oplus_{g\in G} F(\Lambda(g\cdot X, Y)) \circ \delta_{g,X}^{-1}.$$

*ii. Le foncteur $F$ est fidèle et plein, en particulier, il préserve les objets décomposables.*

**Définition 6.2.7.** *Soient $\Lambda$ et $\Lambda^{'}$ deux catégories linéaires. Supposons que $\Lambda$ est munie d'une action admissible d'un groupe $G$. Un $G$-pré-revêtement $F : \Lambda \to \Lambda^{'}$ est dit un $G$-revêtement galoisien si le foncteur $F$ est dense.*

**Définition 6.2.8.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive munie d'une $G$-action libre. Alors la catégorie des orbites de $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}/G$ a les mêmes objets de $\mathcal{C}$ et ses espaces des morphismes sont $(\mathcal{C}/G)(X, Y) = \oplus_{g\in G}(X, g.Y)$, pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$. La composition de deux morphismes est définie comme suit : Soit $f : X \to g.Y$ et $f^{'} : Y \to h.Z$, alors $f^{'}f = (gf^{'})f$, voir [19] pour plus de détails.*

La question qui se pose maintenant : Étant donné un $G$-revêtement galoisien de carquois $\tilde{Q} \to Q$, est-ce qu'ils existent $G$-revêtement galoisien $D^b(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) \to D^b(\mathrm{mod}^b \Lambda)$ de catégories dérivées et un $G$-revêtement galoisien $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) \to D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \Lambda)$ de catégories singulières bornées ? où $\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/\tilde{R}$ et $\Lambda = kQ/R$. Tous les résultats des catégories dérivées bornées sont prouvés par [6, 7] et ceux des catégories singulières bornées par [3].

## 6.3 Revêtement galoisien des catégories dérivées

D'après [6] le groupe $G$ agit sur $D^b(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda})$, et puisque la $G$-action est stable sur $K^b(\mathrm{proj}\tilde{\Lambda})$ alors cela induit une $G$-action sur $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda})$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} D^b(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{\tilde{\Lambda}}} & D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ D^b(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{\Lambda}} & D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) \end{array}$$

**Théorème 6.3.1.** *Soit $\pi : \tilde{\Lambda} \to \Lambda$ un $G$-revêtement galoisien entre deux catégories $k$-linéaires et localement bornées et $G$ un groupe qui agit librement sur $\tilde{\Lambda}$. Alors il existe*

*i. un $G$-pré-revêtement galoisien $\pi^D_\lambda : D^b(\mathrm{mod}^b\tilde{\Lambda}) \to D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$.*

*ii. un $G$-pré-revêtement galoisien $\pi^S_\lambda : D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b\tilde{\Lambda}) \to D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b\Lambda)$.*

**Remarque 6.3.2.** *Il n'est pas difficile de remarquer que la seule propriété qui empêche les foncteurs ci-dessus de ne pas être des $G$-revêtements galoisiens est la densité, c-à-d, le foncteur n'est pas dense en général. Dans ce qui suit on résoudra ce problème pour les algèbres $\Lambda$ avec* $\mathrm{rad}(\Lambda)^2 = 0$.

## 6.4 Le cas des algèbres avec $\mathrm{rad}^2 = 0$

L'objectif de cette section est de montrer comment les techniques de revêtement galoisien peuvent être appliquées pour étudier la catégorie dérivée bornée des modules sur une catégorie localement bornée avec $\mathrm{rad}^2 = 0$.

**Définition 6.4.1.** *Soit $Q$ un carquois connexe. La période de la graduation de $Q$, notée $r_Q$ est $0$ si $Q$, est graduable, et sinon, c'est le minimum des degrés positifs des marches fermées dans $Q$.*

Le carquois $Q^{\mathbb{Z}}$ est défini par ses points $(a,i)$, avec $(a,i) \in Q_0 \times \mathbb{Z}$ et ses flèches $(\alpha,i) : (a,i) \to (b,i+1)$ où $i \in \mathbb{Z}$ et $\alpha : a \to b$ une flèche dans $Q$. Remarquons que $Q^{\mathbb{Z}}$ admet un automorphisme $\rho$, qu'on va appeler *translation*, qui envoie $(a,i)$ à $(a,i+1)$, et $(\alpha,i)$ à $(\alpha,i+1)$, où $a \in Q_0$, $\alpha \in Q_1$ et $i \in \mathbb{Z}$. le groupe engendré par $\rho$ est appelé *groupe de translation* de $Q^{\mathbb{Z}}$.

Pour le reste, on suppose que $Q$ est un carquois connexe localement fini. Fixons une composante connexe $\tilde{Q}$ de $Q^{\mathbb{Z}}$ avec un groupe de translation $G =< \rho^{r_Q} >$. Alors $\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2$ est une catégorie localement bornée et connexe, avec $\mathrm{rad}^2(\tilde{A}) = 0$. La $G$-action libre sur $\tilde{Q}$ induit naturellement une $G$-action libre sur $\tilde{A}$.

**Lemme 6.4.2.** *Soit $Q$ un carquois localement fini et connexe, et $\tilde{Q}$ une composante connexe de $Q^{\mathbb{Z}}$ avec un groupe de translation $G$. Le $G$-revêtement galoisien $\pi : \tilde{Q} \to Q$ induit un $G$-revêtement galoisien $\pi : \tilde{A} \to A$ de catégories localement bornées.*

**Lemme 6.4.3.** *Soit $\Lambda = kQ/(kQ^+)^2$ avec $Q$ un carquois localement fini et connexe, et soit $\pi : \tilde{\Lambda} \to \Lambda$ le $G$-revêtement galoisien. Si $P^\bullet \in RC^{-,b}(\mathrm{proj}\, A)$, alors il existe $L^\bullet \in RC^{-,b}(\mathrm{proj}\, \tilde{\Lambda})$ tel que $P^\bullet \cong \pi^C(L^\bullet)$.*

**Théorème 6.4.4.** *Soit $\Lambda = kQ/(kQ^+)^2$ avec $Q$ un carquois localement fini et connexe. Soit $\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2$ avec $\tilde{Q}$ une composante connexe de $Q$ et $G$ le groupe de translations de $\tilde{Q}$. Soit $\pi : \tilde{\Lambda} \to \Lambda$ le $G$-revêtement galoisien, alors il existe un $G$-revêtement galoisien $\pi^D_\lambda : D^b(\mathrm{mod}^b\tilde{\Lambda}) \to D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$.*

Récemment, Bautista et Liu ont construit un revêtement galoisien explicite pour $D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$, où $\Lambda$ est une algèbre de radical carré nul. Cela leurs a permis de trouver une classification complète des complexes indécomposables et d'étudier leur théorie d'Auslander-Reiten.

Soit $Q$ un carquois graduable localement fini. Une $k$-representation de $Q^{op}$ est dite localement de support fini, si $(Q^{\mathrm{op}})^n \cap \mathrm{Supp}M$ est fini. Comme $Q$ est gradué, $Q^{op}$ est aussi gradué, avec $Q^{op} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(Q^{op})^n$ où $(Q^{op})^n = Q^{-n}$. Le fait de travailler avec des carquois graduables est justifié par ce qui suit. Soit $M$ une représentation. On va lui associer un complexe de cochaine $F(M)^\bullet$ sur $\mathrm{Proj}\tilde{A}$ comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit

$$F(M)^n = \oplus_{x \in Q^{-n}} P_x \otimes M(x) \in \operatorname{Proj} \tilde{\Lambda},$$

et $d^n_{F(M)} : \oplus_{x \in Q^{-n}} P_x \otimes M(x) \to \oplus_{y \in Q^{-n-1}} P_y \otimes M(y)$ l'application $\Lambda$-linéaire donnée par la matrice $(d^n_{F(M)}(y,x))_{(y,x) \in Q^{-n-1} \times Q^{-n}}$, où

$$d^n_{F(M)}(y,x) = \sum\nolimits_{\alpha \in Q_1(y,x)} P(\alpha) \otimes M(\alpha^{\circ}) : P_x \otimes M(x) \to P_y \otimes M(y).$$

Avec ça, on obtient un foncteur $\mathbf{F} : D^b(\mathrm{Rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})) \to D^b(\mathrm{Mod}\tilde{\Lambda})$. C'est exactement le foncteur de Koszul défini dans le chapitre 4. Le théorème suivant est dans [7]

**Théorème 6.4.5.** *Soit $\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2$ avec $Q$ un carquois gradable localement fini. Le foncteur de Koszul $\mathbf{F} : D^b(\mathrm{Rep}^{-,\mathrm{b}}(Q^{op})) \to D^b(\mathrm{Mod}^{\mathrm{b}}\tilde{\Lambda})$ est une équivalence de catégories triangulées qui se restreint à une équivalence de catégorie triangulée $\mathbf{F} : D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})) \to D^b(\mathrm{mod}^b\tilde{\Lambda})$.*

**Remarque 6.4.6.** *Lorsque $Q$ est fini, l'équivalence du théorème précèdent est exactement la dualité de Koszul des modules non gradué et sous la condition que $Q$ est graduable.*

La $G$-action sur $\tilde{Q}$ induit une $G$-action sur $\tilde{Q}^{\mathrm{op}}$ tel que $g \cdot \alpha^{\mathrm{o}} = (g \cdot \alpha)^{\mathrm{o}}$, pour $\alpha \in \tilde{Q}_1$. En particulier, $\rho \cdot (\tilde{Q}^{\mathrm{op}})^n = (\tilde{Q}^{\mathrm{op}})^{n-r_Q}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus, la $G$-action sur $\tilde{Q}^{\mathrm{op}}$ induit une $G$-action sur $\mathrm{Rep}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}})$ comme suit ; Fixons $g \in G$.

i. Pour un objet $M \in \mathrm{Rep}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}})$, on définit $\rho \cdot M$ par $(\rho \cdot M)(x) = M(\rho^{-1} \cdot x)$, pour $x \in \tilde{Q}_0$; et $(\rho \cdot M)(\alpha^{\mathrm{o}}) = M(\rho^{-1} \cdot \alpha^{\mathrm{o}})$, pour $\alpha \in \tilde{Q}_1$.

ii. Pour un morphisme $f : M \to N$ in $\mathrm{Rep}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}})$, on définit $\rho \cdot f : \rho \cdot M \to \rho \cdot N$ par $(\rho \cdot f)(x) = f(\rho^{-1} \cdot x)$, pour $x \in \tilde{Q}_0$.

On aura besoin d'un autre groupe. Regardons $\rho$ comme un automorphisme de $C^b(\mathrm{Rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}}))$, on obtient un automorphisme $\vartheta = \rho \circ [-r_Q]$ ($r_Q$ est la période de $Q$), appelé *translation de décalage*, de $C^b(\mathrm{Rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}}))$. Observons que $\vartheta$ est trivial si $r_Q = 0$ et d'ordre infini sinon. Donc, $\vartheta$ engendre un groupe sans torsion $\mathfrak{G}$ d'automorphismes, appelé *groupe de translation de décalage* de $C^b(\mathrm{Rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}}))$. Comme toujours, la $\mathfrak{G}$-action sur $C^b(\mathrm{Rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}}))$ induit une $\mathfrak{G}$-action sur $K^b(\mathrm{Rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}}))$ et $D^b(\mathrm{Rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}}))$.

Maintenant si on combine le dernier théorème avec le théorème 6.3.1, c-à-d la composition $\pi_\lambda^D \circ \mathbf{F}$ nous donne un $\mathfrak{G}$-revêtement galoisien et on obtient le résultat suivant [7] :

**Théorème 6.4.7.** *Let $\Lambda = kQ/(kQ^+)^2$ avec $Q$ un carquois localement fini et connexe, et soit $\pi : \tilde{Q} \to Q$ un $G$-revêtement galoisien de $Q$. Alors il existe un $\mathfrak{G}$-revêtement galoisien $\pi_\lambda^D \circ \mathbf{F} : D^b(\mathrm{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}})) \to D^b(\mathrm{mod}^b \Lambda)$ est un $\mathfrak{G}$-revêtement galoisien, où $\mathfrak{G}$ est le groupe de translation de décalage de $C^b(\mathrm{Rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}}))$.*

# CHAPITRE 7

# Catégories singulières des algèbres monomiales quadratiques

Dans ce chapitre, on présentera d'autres résultats (une pré-publication soumise, [13]). D'après ce que nous avons vu, il est naturel de penser à construire un revêtement galoisien pour les catégories singulières. L'idée c'est que $\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2$ a suffisamment de modules projectifs et modules injectifs donc $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$ et $D^{+,b}_{sg}(\mathrm{injkQ}/(\mathrm{kQ}^+)^2)$ peuvent être vues comme les quotients de Verdier de la catégorie dérivée bornée de $kQ/(kQ^+)^2$ par les catégories $K^b(\mathrm{proj}kQ/(kQ^+)^2)$ et $K^b(\mathrm{inj}kQ/(kQ^+)^2)$. Dans [52] l'auteur a trouvé un exemple où les deux catégories précédentes ne sont pas équivalentes. Cela nous a motivé d'étudier aussi la catégorie $D^{+,b}_{sg}(\mathrm{injkQ}/(\mathrm{kQ}^+)^2)$. Maintenant le fait que le foncteur construit par Bautista et Liu est le foncteur de Koszul, va nous aider à l'étendre sur les catégories singulières. De plus, nous allons prouver que son noyau contient une belle sous-catégorie triangulée, qui, avec la catégorie dérivée bornée des représentations co-présentés, nous donnera une catégorie dérivée bornée de certaine catégorie abélienne semisimple. Avant d'annoncer notre théorème, on commencera par des lemmes préparatoires. Notez qu'on prouvera juste les équivalences pour $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$, les autres équivalences sont duales.

## 7.1 Lemmes préparatoires

Pour prouver le théorème 7.1, on aura besoin de deux lemmes qui vont facilité la compréhension de la preuve. On va supposer que les représentations de $Q^{op}$ ont des supports localement finis, c-à-d, $(Q^{op})^n \cap supp(M)$ est finie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

**Lemme 7.1.1.** *Soit $Q$ un carquois localement fini, et $M$ une représentation dans* rep(Q). *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe une suite exacte courte $0 \to N \to M \to L \to 0$, où $N \in \mathrm{rep}^b(Q)$ et $L \in \mathrm{inj}(Q)$,*

(2) $M \in \mathrm{rep}^{-,b}(Q)$.

*Son dual est :*

(3) *Il existe une suite exacte courte $0 \to N \to M \to L \to 0$, où $L \in \mathrm{rep}^b(Q)$ et $N \in \mathrm{proj}(Q)$,*

(4) $M \in \mathrm{rep}^{+,b}(Q)$

*Démonstration.* Voir [7, 8] et [13] pour une autre démonstration qui marche aussi pour les représentations d'un carquois graduable avec des relations monomiales quadratiques. □

**Lemme 7.1.2.** *Soit $Q$ un carquois localement fini. Alors, les deux catégories $\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q)[\Sigma^{-1}]$ et $\mathrm{rep}^{+,\mathrm{b}}(Q)[\Sigma^{-1}]$ sont abéliennes semi-simples, où $\Sigma = \{s \in \mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q), /Ker(s), Coker(s) \in \mathrm{rep}^{\mathrm{b}}(Q)\}$.*

*Démonstration.* Observons que $\mathrm{rep}^{\mathrm{b}}(Q)$ est une sous-catégorie abélienne, stable par les extensions, les sous-objets et les quotients, donc $\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q)[\Sigma^{-1}]$ est abélienne. Maintenant, on doit prouver que toute suite exacte courte dans $\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q)[\Sigma^{-1}]$ est scindée. Premièrement, en vertu du lemme précédent, pour toute représentation $M$ dans $\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q)$, il existe une suite exacte courte $0 \to N \to M \to L \to 0$, où $N$ est une représentation de dimension finie et $L$ est isomorphe à un objet dans $\mathrm{inj}(Q)$. Maintenant soit $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ une suite exacte courte $\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q)[\Sigma^{-1}]$. Comme mentionné ci-haut, on peut identifier les objets $A, B$ et $C$ à des objets dans $\mathrm{inj}(Q)$. Considérons le diagramme suivant $A \xrightarrow{\alpha} Z \xleftarrow{\beta} B$ qui représente un morphisme $f$, où $Ker\beta, Coker\beta$ et $Ker\alpha$ sont dans $\mathrm{rep}^b(Q)$(en effet,$Ker\alpha$ est dans $\mathrm{rep}^b(Q)$ parce que le morphisme $f$ est un monomorphisme dans $\mathrm{rep}^{-,b}(Q)[\Sigma^{-1}]$, voir proposition 3.2.4).

Puisque $\text{rep}^{-,b}(Q)$ est héréditaire et $A$ est injectif, l'image de $\alpha$ est aussi injective. Considérons la suite exacte courte $0 \to Im\alpha \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Coker\alpha \to 0$ dans $\text{rep}^{-,b}(Q)$, qui est clairement scindée. Puisque le morphisme $A \to Im\alpha$ est inversible dans $\text{rep}^{-,b}(Q)[\Sigma^{-1}]$, car $Ker\alpha$ est un objet dans $\text{rep}^b(Q)$, notons $a$ sont inverse. Le fait que le morphisme $\alpha$ est la composition de $Im\alpha \xrightarrow{i} Z$ et la projection $A \to Im\alpha$, c-à-d , $f = \beta^{-1}\alpha = \beta^{-1}ia^{-1}$, donne un diagramme commutative à lignes exacts :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Im\alpha \arrow[r, "i"] \arrow[d, "a"'] & Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta^{-1}"'] & coker\alpha \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Il est clair que les deux suites sont isomorphes dans $\text{rep}^{-,b}(Q)[\Sigma^{-1}]$ (car les morphismes verticaux dans le diagramme ci-haut sont des isomorphismes dans $\text{rep}^{-,b}(Q)[\Sigma^{-1}]$) et en vertu de l'exactitude du foncteur de projection ( voir proposition 3.2.4), la suite exacte courte $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ est scindée dans $\text{rep}^{-,b}(Q)[\Sigma^{-1}]$, d'où le résultat. □

Maintenant, on est prêt à prouver nos théorèmes.

## 7.2 Théorèmes

Le théorème suivant peut être vu comme la dualité de Koszul des catégories singulières.

**Théorème 7.2.1.** *Supposons que $Q$ est un carquois graduable localement fini. Alors il existe des équi` valences triangulées :*

(1) $D^b_{sg}(\text{mod}^b kQ/(kQ^+)^2) \xrightarrow{\mathcal{F}} D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(Q^{op})[\Sigma^{-1}])$.

(2) $D^{+,b}_{sg}(\text{inj}kQ/(kQ^+)^2) \xrightarrow{\mathcal{G}} D^b(\text{rep}^{+,\text{b}}(Q^{op})[\Sigma^{-1}])$.

*Démonstration.* On prouvera seulement (1) car (2) est duale. Soit $D^b_{\text{rep}^b(Q^{op})}(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ la catégorie dérivée bornée de $\text{rep}^{-,b}(Q^{op})$ avec les groupes de cohomologies dans $\text{rep}^b(Q^{op})$. Il est bien connu que $D^b_{\text{rep}^b(Q^{op})}(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ est une sous-catégorie épaisse de $D^b(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$, voir [45] et la définition au début de la page 34. Soit $i$ le foncteur canonique $D^b(\text{rep}^b(Q^{op})) \to D^b_{\text{rep}^b(Q^{op})}(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ et $j$ le foncteur de $D^b_{\text{rep}^b(Q^{op})}(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ à $D^b(\text{rep}^b(Q^{op}))$, qui envoie un complexe $X^\bullet$ dans $D^b_{\text{rep}^b(Q^{op})}(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ à son complexe de cohomologie $\oplus_i H^i(X^\bullet)[-i]$. Maintenant puisque $\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ est héréditaire, il n'est pas difficile de voir que ces deux foncteurs sont quasi-inverse ( car dans la catégorie dérivée bornée tout complexe est isomorphe à une somme directe finie de décalages des complexes concentrés en degré zéro de ses groupes de cohomologie), donc le foncteur canonique $D^b(\text{rep}^b(Q^{op})) \to D^b_{\text{rep}^b(Q^{op})}(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ est une équivalence et $D^b(\text{rep}^b(Q^{op})))$ est une sous-catégorie épaisse de la catégorie $D^b(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$. D'autre puisque l'équivalence entre $D^b(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ et $D^b(\text{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$ est donnée par le foncteur de Koszul (complexes totaux), la composition de l'équivalence $D^b(\text{rep}^{-,b}(Q^{op})) \xrightarrow{\mathcal{H}} D^b(\text{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$ [7] avec le foncteur de projection $D^b(\text{mod}^{\text{b}} kQ/(kQ^+)^2) \xrightarrow{\mathcal{P}} D^b_{sg}(\text{mod}^{\text{b}} kQ/(kQ^+)^2)$ envoie les objets de $D^b(\text{rep}^b(Q^{op}))$ à l'objet zéro de $D^b_{sg}(\text{mod}^b \tilde{\Lambda})$, donc il existe un foncteur $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{PH} = \mathcal{FP}$, c-à-d, le diagramme suivant de catégories triangulées commute (voir la définition du quotient de Verdier).

$$\begin{array}{ccc} D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(Q^{op})) & \xrightarrow{\mathcal{P}} & D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(Q^{op}))/D^b(\text{rep}^{\text{b}}(Q^{op}))) \\ {\scriptstyle\mathcal{H}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}} \\ D^b(\text{mod}^{\text{b}} kQ/(kQ^+)^2) & \xrightarrow{\mathcal{P}} & D^b_{sg}(\text{mod}^{\text{b}} kQ/(kQ^+)^2) \end{array}$$

où $\mathcal{P}$ est le foncteur de projection.

Soit $\gamma$ un morphisme dans $D^b(\text{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$, dont le cône est isomorphe à un objet $Z^\bullet$ dans $K^b(\text{proj} kQ/(kQ^+)^2)$. En vertu de ([7], proposition 2.1 (1)), $Z^\bullet$ est isomorphe à un objet $Z^{\bullet'}$ dans $RC^b(\text{proj} kQ/(kQ^+)^2)$, et ce dernier est isomorphe à une somme directe finie des images par le foncteur de Koszul des représentations dans $\text{rep}^{\text{b}}(Q^{op}))$ ([7], proposition 3.2). Soit $f = \mathcal{P}(\alpha)\mathcal{P}(\beta)^{-1}$ un morphisme dans $D^b_{sg}(\text{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$ avec le cône de $\beta$, $C(\beta)$ est isomorphe à un objet dans $K^b(\text{proj} kQ/(kQ^+)^2)$. D'après ce que nous avons prouvé ci-dessus et d'après l'équivalence ([7], Théorème 3.9) on peut avoir deux morphismes $\alpha^{'}, \beta^{'}$ tel que $C(\beta^{'}) \in D^b(\text{rep}^{\text{b}}(Q^{op})))$. Maintenant posons $f^{'} = \mathcal{P}(\alpha^{'})\mathcal{P}(\beta^{'})^{-1}$, alors on a $\mathcal{F}(f^{'}) = f$. Soit $g = \mathcal{P}(\epsilon)\mathcal{P}(\eta)^{-1}$ un morphisme dans $D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(Q^{op}))/D^b(\text{rep}^{\text{b}}(Q^{op})))$ et supposons que $\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(\mathcal{P}(\epsilon)\mathcal{P}(\eta)^{-1}) = 0$. Alors $\mathcal{F}(\mathcal{P}(\epsilon)) = F(\epsilon) = \mathcal{P}(\mathcal{H}(\epsilon)) = 0$, où $\mathcal{H}$ est l'équivalence entre $D^b(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ et $D^b(\text{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$ ( voir le diagramme ci-dessus). D'après le lemme 3.1.4 il existe un morphisme $\theta$ dans $D^b(\text{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$ tel que $\mathcal{H}(\epsilon)\theta = 0$ avec $C(\theta)$ isomorphe à un objet dans $K^b(\text{proj} kQ/(kQ^+)^2)$. Maintenant d'après l'équivalence $\mathcal{H}$, on peut trouver un morphisme $\theta^{'}$ dans $D^b(\text{rep}^{-,b}(Q^{op}))$ avec $C(\theta^{'}) \in D^b(\text{rep}^b(Q^{op}))$ tel que $\mathcal{H}(\theta^{'}) = \theta$. Il suffit maintenant de voir que

$\mathcal{H}(\epsilon)\theta = \mathcal{H}(\epsilon)\mathcal{H}(\theta^{'}) = \mathcal{H}(\epsilon\theta^{'}) = 0$ entraîne que $\epsilon\theta^{'} = 0$. Donc le morphisme $g = 0$ ( car $\mathcal{P}(\epsilon) = 0$). Cela montre la fidélité de $\mathcal{F}$. La densité maintenant est claire et en vertu du théorème ([45], Théorème 3.2]) et le fait que $D^b(\mathrm{rep}^b(Q^{op}))$ est équivalente à $D^b_{\mathrm{rep}^b(Q^{op})}(\mathrm{rep}^{-,b}(Q^{op}))$, on peut identifier la catégorie $D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q^{op}))/D^b(\mathrm{rep}^{\mathrm{b}}(Q^{op})))$ avec la catégorie $D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q^{op})[\Sigma^{-1}])$.
Pour le (2), il suffit de savoir que le foncteur de dualité $D$ est contravariant, exact et il envoie une représentation projective sur une representation injective du carquois opposé. $\square$

On a besoin de quelques notions préparatoires pour bien comprendre la preuve du lemme ci-dessous. Prenons une composante connexe graduable $\tilde{Q}$ du carquois $Q^{\mathbb{Z}}$ [5, Lemme 7.2]. Le groupe de translation $G$ est le groupe engendré par la translation $\rho$, c-à-d, un automorphisme de $\tilde{Q}$ qui envoie $(x, n)$ to $(x, n+r_Q)$. Évidemment, $G$ est un groupe sans torsion. En vertu de [5, Théorème 7.5(2)], il existe un $G$-revêtement galoisien $\pi : \tilde{Q} \to Q$ tel que $\pi(x, n) = x$, appelé le $G$-revêtement graduable minimal de $\tilde{Q}$, ce dernier induit un $G$-revêtement galoisien $D^b(\mathrm{mod}^{\mathrm{b}} k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2) \to D^b(\mathrm{mod}^{\mathrm{b}} kQ/(kQ^+)^2)$. la $G$-action sur $\tilde{Q}$ induit une $G$-action sur $D^b(\mathrm{mod}^{\mathrm{b}} kQ/(k\tilde{Q}^+)^2)$, et puisque elle est $G$-stable sur $K^b(\mathrm{proj} k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2)$, elle induit une $G$-action sur $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathrm{b}} k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2)$. Remarquons que $k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2$ est localement bornée puisque $\tilde{Q}$ est localement finie. Pour étudier la relation entre nos foncteurs et les deux actions , on a besoin du foncteur de torsion définit dans [5, Lemme 4.3] et au début de cette thèse, plus précisément, c'est un automorphisme $\mathfrak{t}$, qui envoie un complexe $X^{\bullet}$ à un autre complexe $\mathfrak{t}(X^{\bullet})$, où $\mathfrak{t}(X^{\bullet})^n = X^n$ et sa différentielle $d^n_{\mathfrak{t}(X^{\bullet})}$ :$\mathfrak{t}(X^{\bullet})^n = X^n \xrightarrow{-d^n_{X^{\bullet}}} \mathfrak{t}(X^{\bullet})^{n+1} = X^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Observons que pour chaque $p \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme fonctoriel $\kappa_p : \mathfrak{t}^p \to 1_{C(\mathcal{A})}$ défini par $\kappa_{p,X^{\bullet}} = ((-1_{X^n})^{pn})_{n\in\mathbb{Z}}$ : $\mathfrak{t}^p(X^{\bullet}) \to X^{\bullet}$, pour tout complexe $X^{\bullet}$. L'avantage d'utiliser $\mathfrak{t}$ vient du fait que l'équivalence (qu'on va prouver) $\mathcal{F} : D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q^{op})[\Sigma^{-1}]) \to D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2)$ va vérifier , $\mathcal{F}(\vartheta^k X^{\bullet}) = \mathfrak{t}^{kr_Q}(\rho^k \mathcal{F}(X^{\bullet}))$ ( car le foncteur $\mathcal{PH}$ est juste la composition $\mathcal{F}\pi$ et $\mathcal{H}$ vérifie la dernière égalité, voir [7] et le diagramme en bas), pour tout $k \in \mathbb{Z}$ pour tout $X^{\bullet} \in D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$. Plus précisément il nous aidera à prouver des isomorphismes de groupes pour qu'on puisse obtenir le revêtement galoisien désiré.

Remarquons que la $G$-action sur $\mathrm{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op})$ ( voir la page 82) est $G$-stable sur $\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]$, donc cela donne une $G$-action sur $\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]$, telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\text{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op}) \arrow[r, "\mathcal{S}_{\tilde{Q}^{op}}"] \arrow[d, "g"'] & \text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}] \arrow[d, "g"] \\
\text{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op}) \arrow[r, "\mathcal{S}_{\tilde{Q}^{op}}"] & \text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]
\end{tikzcd}$$

avec $\mathcal{S}_{\tilde{Q}^{op}}$ le foncteur de projection. Considèrons la $\mathfrak{G}$-action définie sur $D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$, où $\mathfrak{G}$ est le groupe engendré par $\rho[-r_Q]$ ( voir le chapitre 6, page 82). Comme cette action est $\mathfrak{G}$-stable sur $D^b(\text{rep}^{\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$, elle induit une $\mathfrak{G}$-action sur $D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
C^b(\text{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op})) \arrow[r, "\mathcal{P}_{\tilde{Q}^{op}}"] \arrow[d, "h"] & K^b(\text{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op})) \arrow[r, "\mathcal{L}_{\tilde{Q}^{op}}"] \arrow[d, "h"] & D^b(\text{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op})) \arrow[r, "\mathcal{P}'_{\tilde{Q}^{op}}"] \arrow[d, "h"] & D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]) \arrow[d, "h"] \\
C^b(\text{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op})) \arrow[r, "\mathcal{P}_{\tilde{Q}^{op}}"] & K^b(\text{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op})) \arrow[r, "\mathcal{L}_{\tilde{Q}^{op}}"] & D^b(\text{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op})) \arrow[r, "\mathcal{P}'_{\tilde{Q}^{op}}"] & D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]),
\end{tikzcd}$$

avec $g \in \mathfrak{G}$. De la même façon on prouve que le groupe $\mathfrak{H}$ engendré par $\rho^{-1}[r_Q]$ agit sur la catégorie $D^b(\text{rep}^{+,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$

**Lemme 7.2.2.** *Soit $Q$ un carquois localement fini.*

(1) *La $\mathfrak{G}$-action sur $D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$ est localement bornée.*

(2) *La $\mathfrak{H}$-action sur $D^b(\text{rep}^{+,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$ est localement bornée.*

*Démonstration.* Si $Q$ est graduable, alors le groupe est trivial, donc son action est localement bornée. Sinon, $r_Q > 0$ et soient $M, N \in \text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]$. Puisque $\vartheta^p = \rho^p[-pr_Q]$, on a l'égalité entre les groupes de morphismes de la catégorie $D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$ $\text{Hom}_{D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])}(N, \vartheta^p \cdot M) = \text{Hom}_{D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])}(N, \rho^p{\cdot}M[-pr_Q]) = Ext^{pr_{\tilde{Q}}}_{\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]}(N, \rho^p M)$. Puisque la catégorie $\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]$ est semi-simple, on a que $Ext^{pr_{\tilde{Q}}}_{\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]}(N, \rho^p M) \neq 0$ si et seulement si $p = 0$. Maintenant puisque chaque complexe est une somme directe finie de décalages des complexes concentrés en degré zéro, alors la somme directe des groupes de morphismes $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\text{Hom}_{D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])}(X^\bullet, \vartheta^p{\cdot}Y^\bullet)$ est finie pour tous $X^\bullet, Y^\bullet \in D^b(\text{rep}^{-,\text{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$. D'où le résultat.

□

**Théorème 7.2.3.** *Soit $Q$ un carquois localement fini. Alors il existe,*

(1) *Un $G$-revêtement galoisien* $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathrm{b}} k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2) \to D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$.

(2) *Un $\mathfrak{G}$-revêtement galoisien* $D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]) \to D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$.

(3) *Un $\mathfrak{H}$-revêtement galoisien* $D^b(\mathrm{rep}^{+,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]) \to D^{+,b}_{sg}(\mathrm{inj} kQ/(kQ^+)^2)$.

*Démonstration.* (1). Pour simplifier les notations, on notera $\Lambda = kQ/(kQ^+)^2)$ et $\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/(k\tilde{Q}^+)^2$. D'après ([3], Théorème 3.4) le $G$-revêtement galoisien $D^b(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) \xrightarrow{\pi^D} D^b(\mathrm{mod}^b \Lambda)$ induit un $G$-pré-revêtement galoisien $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) \xrightarrow{\pi^S} D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \Lambda)$. Plus précisément on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
D^b(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) \arrow[r, "\mathcal{P}_{\tilde{\Lambda}}"] \arrow[d, "\pi^D"'] & D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda}) \arrow[d, "\pi^S"] \\
D^b(\mathrm{mod}^b \Lambda) \arrow[r, "\mathcal{P}_{\Lambda}"] & D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \Lambda)
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{P}_{\Lambda}$ et $\mathcal{P}_{\tilde{\Lambda}}$ sont les foncteurs de projections et $\pi^D$ un $G$-revetement galoisien et $\pi^S$ un pré-revêtements galoisien.

Il reste à vérifier que la $G$-action est localement bornée. En vertu du théorème 7.2.1, on a pour tous complexes $X^\bullet, Y^\bullet \in D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$ un isomorphisme

$$\mathcal{F}_{X,Y} : \oplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])}(X^\bullet, \vartheta^p \cdot Y^\bullet) \to \oplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda})}(\mathcal{F}(X^\bullet), \mathcal{F}(\vartheta^p \cdot Y^\bullet)) \qquad (1)$$

qui envoie $(f_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ à $(\mathcal{F}(f_p))_{p\in\mathbb{Z}}$, où $f_p \in \mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{Rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{\mathrm{op}}))}(X^\bullet, \vartheta^p \cdot Y^\bullet)$. En vertu du lemme 4.4(2) dans [7], on déduit que $\mathcal{F}(\vartheta^p \cdot X^\bullet) = \mathfrak{t}^{pr}(\rho^p \cdot \mathcal{F}(X^\bullet))$. Posons $\tilde{\kappa}_{pr,\,\rho^p\cdot\mathcal{F}(X^\bullet)} = \pi_{\tilde{\Lambda}} \mathcal{P}_{\tilde{\Lambda}} (\mathcal{L}_{\tilde{\Lambda}} (\kappa_{pr,\,\rho^p\cdot\mathcal{F}(X^\bullet)}))$, on obtient un isomorphisme

$$\oplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda})}(\mathcal{F}(X^\bullet), \mathcal{F}(\vartheta^p \cdot Y^\bullet)) \to \oplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda})}(\mathcal{F}(X^\bullet), \rho^p \cdot \mathcal{F}(Y^\bullet)) \qquad (2)$$

, qui envoie $\mathcal{F}(f_p))_{p\in\mathbb{Z}}$ à $(\tilde{\kappa}_{pr,\,\rho^p\cdot\mathcal{F}(X^\bullet)} \circ \mathcal{F}(f_p))_{p\in\mathbb{Z}}$.

En vertu du lemme 7.2.2, on sait que la $\mathfrak{G}$-action sur $D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$ est localement bornée, et d'après les deux isomorphismes (1) et (2), la somme directe $\oplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda})}(X^\bullet, \rho^p \cdot Y^\bullet)$ est finie pour tous $X^\bullet, Y^\bullet \in D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda})$. Par conséquent, la $G-$action sur $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \tilde{\Lambda})$ est localement bornée. De plus, le groupe est sans torsion, donc d'après le lemme 6.2.2, la $G-$action est libre. D'où $\pi^S$ est un

$G$-revêtement galoisien de catégories singulières bornées.

(2) Il reste à prouver que la composition $\pi^S\mathcal{F}$ est un $\mathfrak{G}$-revêtement galoisien. Considérons le diagramme commutatif ci-dessous et soit $\vartheta \in \mathfrak{G}$.

$$\begin{tikzcd}
D^b(\mathrm{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op})) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathcal{P}'_{Q^{\mathrm{op}}}"] & D^b(\mathrm{mod}^{\mathrm{b}}\tilde{\Lambda}) \arrow[r, "\pi^D"] \arrow[d, "\mathcal{P}_{\tilde{\Lambda}}"] & D^b(\mathrm{mod}^{\mathrm{b}}\Lambda) \arrow[d, "\mathcal{P}_{\Lambda}"] \\
D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}]) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & D^b_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathrm{b}}\tilde{\Lambda}) \arrow[r, "\pi^S"] & D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b\Lambda)
\end{tikzcd}$$

on a que $\pi^S\mathcal{F}\vartheta \cong \pi^S F\vartheta \cong \pi^S\mathcal{F}$, avec un $\mathfrak{G}-$stabilisateur $\pi(\delta) = (\pi(\delta_\vartheta))_{\vartheta\in\mathfrak{G}}$, où $\delta = (\delta_\vartheta)_{\vartheta\in\mathfrak{G}}$ est un $\mathfrak{G}$-stabilisateur du $\mathfrak{G}$-revêtement galoisien $D^b(\mathrm{rep}^{-,b}(\tilde{Q}^{op})) \to D^b(\mathrm{mod}^b\Lambda)$. D'où le résultat. $\square$

**Théorème 7.2.4.** *Le $G$-revêtement galoisien $\tilde{Q}^{op} \to Q$ induit l'équivalence triangulée suivante :*

$$D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2) \cong D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}$$

.

*Démonstration.* (i) D'après le théorème 7.2.3, on sait que $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b\Lambda) \cong D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}$ comme catégories additives. D'autre part, la catégorie $D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}$ admet un foncteur de décalage. Remarquons que cette dernière équivalence commute avec le foncteur de décalage de la catégorie $D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}$ et celui de $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b\Lambda)$. Maintenant on doit définir une structure triangulée sur $D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}$. Pour ça, on peut prendre comme triangles distinguées, les triangles qui sont dans $D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}$ et qui sont isomorphes aux images des triangles distingués dans $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b\Lambda)$ En vertu de l'équivalence ci-dessus. On peut facilement vérifier que cette famille de triangles vérifie les axiomes des catégories triangulées. Pour convaincre le lecteur, on vérifiera $(v)$ de la définition 3.3.2. Considérons de diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \arrow[d, "a[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

dans $D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])/\mathfrak{G}$, où les lignes horizontales sont des triangles distingués.

L'équivalence additive ci-haut, entraîne l'existence d'un diagramme dans $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \Lambda)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "x"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "y"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, dashed, "z"] & A[1] \arrow[d, "i[1]"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "k'"] & A'[1] \end{tikzcd}$$

qui est isomorphe au premier diagramme.

Alors il existe un morphisme $c$, l'image du morphisme $z$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "c"] & X[1] \arrow[d, "a[1]"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

D'où le résultat. □

Le corollaire suivant nous donne une méthode facile pour calculer les générateurs de $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \Lambda)$.

**Corollaire 7.2.5.** *i. Tout complexe* $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b kQ/(kQ^+)^2)$ *est une somme directe finie de décalages des complexes concentrés en degré zéro de modules semi-simples.*

*ii. Tout complexe de la forme* $S_a$ *dans* $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \Lambda)$ *est isomorphe à une somme directe finie* $\oplus S_{a_i}[1]$*, avec* $a_i \in a^+$.

*Démonstration.* (1) Soit $Z^\bullet \in D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \Lambda)$. le revêtement galoisien $\pi^S \mathcal{F}$ garantit l'existence d'un objet $M^\bullet \in D^b(\mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(\tilde{Q}^{op})[\Sigma^{-1}])$ tel que $\pi^S \mathcal{F}(M^\bullet) \cong Z^\bullet$. Puisque la catégorie est héréditaire, $M^\bullet$ est isomorphe à une somme directe finie $\oplus_1^r M_i[s_i]$, où $M_i \in \mathrm{rep}^{-,\mathrm{b}}(Q^{op})[\Sigma^{-1}]$, et $s_i \in \mathbb{Z}$. En vertu du lemme 7.1.1, $M_i \cong \oplus_1^m \mathcal{I}_{a_i}$, où $a_i \in \tilde{Q}_0$. D'après le diagramme ci-dessus et [6, Lemma 3.4], $\mathcal{HP}(M^\bullet) \cong \mathcal{F}(M^\bullet) \cong \oplus_1^{m'}(S_{a_j}[t_j])$. Maintenant, puisque $\pi^S$ préserve les simples, on obtient $\pi^S \mathcal{F}(M^\bullet) \cong \oplus_1^{m'}(S_{\pi^S(a_j)}[t_j])$.
(2) Soit $S_a$ un complexe dans $D^b_{sg}(\mathrm{mod}^b \Lambda)$ avec $S_a$ un $\Lambda$-module simple. En vertu du $G$-revêtement galoisien $\pi : \tilde{Q} \to Q$, il existe $b \in \tilde{Q}_0$ tel que $\pi(b) = a$. Soit $a^+ = \{\alpha_i \,/ a \xrightarrow{\alpha} a_i\}$ qui est fini puisque $Q$ est localement fini. Alors $b^+ = \{\beta_i \,/ b \xrightarrow{\beta} b_i\}$ est aussi fini et $(b^o)^- = b^+$ dans $\tilde{Q}^{op}$. En vertu du lemme 7.1.1 et le lemme 7.1.2, le module injectif $\mathcal{I}_b$ est isomorphe à $\oplus \mathcal{I}_{b_i}$ et d'après le revêtement galoisien prouvé dans (1) l'image de $\mathcal{I}_b$ est exactement $S_a[t]$ est isomorphe à $\oplus S_{a_i}[t+1]$ □

# Bibliographie

[1] H. Asashiba, A covering technique for derived equivalence, J. Algebra 191 (1997) 382 - 415.

[2] H. Asashiba, A generalization of Gabriel's Galois covering functors and derived equivalences, J. Algebra 334 (2011) 109 - 149.

[3] H.Asashiba, R.Hafezi, R.Vahed, Gorenstein versions of covering techniques for linear categories and their applications, J.Algebra 507(2018), 320-361.

[4] Amnon Neeman, Triangulated Categories, Annals of Mathematics Studies 148 (Princeton University Press, Princeton, 2001).

[5] I. Assem, A. Skowronski, Iterated tilted algebras of type $\tilde{A}_n$, Math. Z. 195 (1987), 269–290.

[6] R. Bautista and S. Liu, "Covering theory for linear categories with application to derived categories", J. Algebra 406 (2014) 173 - 225.

[7] R. Bautista and S. Liu, "The bounded derived categories of an algebra with radical squared zero", J. Algebra 482 (2017) 303 - 345.

[8] R. Bautista, S. Liu and C. Paquette, "Representation theory of strongly locally finite quivers", Proc. London Math. Soc. 106 (2013) 97 - 162.

[9] I. Bernstein, I. Gelfand, and S. Gelfand, "Algebraic bundles over $\mathbb{P}^n$ and problems of linear algebras", Funkts. Anal. Prilozh. 12 (1978) ; English translation in Functional Analysis and its Applications 12 (1918) 212 - 214.

[10] A. Beilinson, V. Ginzburg and W. Soergel, "Koszul duality patterns in representation theory", J. Amer. Math. Soc. 9 (1996) 473 - 527.

[11] K. Bongartz and P. Gabriel, "Covering spaces in representation theory", Invent. Math. 65 (1982) 331 - 378.

[12] A.M. Bouhada, M. Huang and S. Liu, Koszul duality for non-graded derived categories, 2019, (soumis) arXiv, 1908.06153, 2019

[13] A.M. Bouhada, New descriptions of the singularity categories of quadratic monomial algebras (soumis).

[14] A. K. Bousfield, E. B. Curtis, D. M. Kan, D. G. Quillen, D. L. Rector and J. W. Schlesinger, "The mod-p lower central series and the Adams spectral sequence", Topology 5 (1966) 331 - 342.

[15] R.O. Buchweitz, Maximal Cohen-Macaulay Modules and Tate Cohomology over Gorenstein Rings, unpublished Manuscript, 1987. Disponible sur : http ://hdl.handle.net/1807/16682.

[16] H. Cartan and S. Eilenberg, "Homological Algebra", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[17] X.W.Chen, The singularity category of an algebra with radical square zero, Doc.Math.16(2011), 921-936.

[18] X.W.Chen, The singularity category of a quadratic monomial algebra, The Quarterly Journal of Maths, V.69, Issue 3, 2018, Pages 1015–1033

[19] C. Cibils, E. Marcos, Skew category, Galois covering and smash product of a k-category Proc. Amer. Math. Soc., 134 (1) (2006), pp. 39-50

[20] Dragan Milicic, Lecture Notes on Derived Categories, preprint.

[21] D. Eisenbud, "Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry", Springer-Verlarg, New York, 1995.

[22] G. Fløystad, "Koszul Duality and Equivalences of Categories", Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006) 2373 - 2398.

[23] P. Gabriel, des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323-448.

[24] P.Gabriel, M.Zisman. Calculus of fractions and homoropy theory. Springer Ergebnisse 35(1967).

[25] P. Gabriel, The Universal Cover of a Representation-Finite Algebra, Lecture Notes in Math., vol. 903, Springer-Verlag, Berlin/New York (1981), pp. 68-105.

[26] E.L. Green and R. Martinez-Villa, "Koszul and Yoneda algebras," Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 18 (1996) 247 - 298.

[27] E.L. Green and R. Martinez-Villa, "Koszul and Yoneda algebras II," Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 24 (1998) 227 - 244.

[28] E. L. Green, Ø. Solberg and D. Zacharia, "Minimal projective resolutions," Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) 2915 - 2939.

[29] M. Goresky, R. Kottwitz and R. MacPherson, "Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem", Invent. Math. 131 (1998) 25 - 83.

[30] M. Kalck, Singularity categories of gentle algebras, Bull, Lond. Math. Soc. 47 (2015), no 1, 65-74

[31] B.Keller, On triangulated orbit categories, Doc. Math. 10 (2005), 551-581.

[32] B. Keller, "Koszul duality and coderived categories (after K. Lefèvre)", Preprint 2003.

[33] B. Keller, "On the construction of triangle equivalences", Lecture Notes in Math. 1685 (1998) 155 - 176.

[34] B. Keller, D. Vossieck, Sous les catégories dérivées, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 305 (1987),no. 6, 225–228.

[35] H. Krause. Derived categories, resolutions, and Brown representability. In Interactions between homotopy theory and algebra, volume 436 of Contemp. Math., pages 101–139. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[36] S. Liu and J.-P. Morin, "The strong no loop conjecture for special biserial algebras", Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004) 3513 - 3523.

[37] S. MacLane, “Homology", Springer-Verlag, Berline, Heidelberg, New York, 1971.

[38] YU. I. MANIN, “Some remarks on Koszul algebras and quantum groups", Ann. Inst. Fourier 37 (1987) 191 - 205.

[39] R. Martinez-Villa, “Introduction to Koszul algebras," Rev. Un. Mat. Argentina 48 (2007) 67 - 95.

[40] R. Martinez-Villa,“Applications of Koszul algebras : The preprojective algebra," Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 18 (1996) 487 - 504.

[41] R. Martinez-Villa and Ø. Solberg, “Graded and Koszul categories", Appl. Categ. Struct. 18 (2010) 615 - 652.

[42] R. Martinez-Villa and M. Saorin, “Koszul equivalences and dualities", Pacific J. Math. 214 (2004) 359 - 378.

[43] J. P. May, “The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras", J. Algebra 3 (1966) 123 - 146.

[44] V. Mazorchuk, S. Ovsienko, and C. Stroppel, “Quadratic duals, Koszul dual functors, and applications", Trans. Amer. Math. Soc. 361(3) (2009) 1129 - 1172.

[45] J.I.Miyachi, Localization of triangulated categories and derived categories.J.Algebra 141,463-483(1991).

[46] D. Orlov, Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models, Trudy Steklov Math. Institute 204 (2004), 240–262.

[47] S. B. Priddy, “Koszul resolutions and the Steenrod algebra", Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970) 834 - 839.

[48] S. B. Priddy, “Koszul resolutions", Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970) 39 - 60.

[49] J. Rickard, “Morita theory for derived categories", J. London Math. Soc. (2) 39 (1989) 436 - 456.

[50] J.Rickard, Derived categories and stable equivalence, J. Pure Appl. Algebra 61 (1989),303–317.

[51] S. Ryom-Hansen, “Koszul duality of translation and Zuckermann functor", J. Lie Theory 14 (2004) 151 - 163.

[52] D.Shen, The singularity category of a Nakayama algebra, J.Algebra 429(2015), 1-18.

[53] S.P.Smith, Equivalence of categories involving graded modules over path algebras of quivers, Adv.Math. 230(2012), 1780-1810.

[54] J. Verdier, “Catégories dérivées, état 0, 262-311. Lecture Notes in Math., Vol. 569. Springer-Verlag. Berlin. 1977

[55] C. A. Weibel, “An introduction to homological algebra", Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38 (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

[56] G.Zhou, A.Zimmermann, Verdier quotients of homotopy categories, preprint, disponible sur arXiv : 1711.05445 [math.RT].