

**ESTIMATION NON-PARAMÉTRIQUE DE LA
DISTRIBUTION ET DENSITÉ DE COPULES**

par

Nabil KADI

Mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, avril 2014

Le 02 avril 2014

le jury a accepté le mémoire de Monsieur Nabil KADI dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur Taoufik BOUEZMARNI
Directeur de recherche
Département de mathématiques

Professeur Éric MARCHAND
Membre interne
Département de mathématiques

Professeur Ernest MONGA
Président-rapporteur
Département de mathématiques

POUR MES PARENTS.

RÉSUMÉ

Les copules représentent un outil innovant pour modéliser la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires. Introduit par Sklar [1959] pour résoudre un problème de probabilité énoncé par Maurice Fréchet, les copules deviennent essentielles à l'appréhension de nombreux domaines d'application tels que l'hydrologie (Salvadori, De Michele, Kottegod, et Rosso [2007]), les sciences actuarielles (Frees et Valdez [1998]), ou la finance (Cherubini, Vecchiato, et Luciano [2004]; Mc-Neil, Frey, et Embrechts [2005]).

Le grand intérêt est qu'elles fournissent des expressions relativement simples des structures des dépendances liant les marges d'une loi multidimensionnelle. Plus précisément, pour le cas bidimensionnel, une copule C définie sur $[0, 1]^2$, associée à une distribution F de marges uniformes F_1 et F_2 , permet de représenter la fonction de répartition jointe $F(x_1, x_2)$ en fonction de ces marginales $F_1(x_1)$ et $F_2(x_2)$ par la relation :

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Cependant en pratique, la copule est inconnue, d'où l'utilité de l'estimer. Dans ce mémoire nous commençons par les définitions et les propriétés liées aux copules ainsi que les modèles paramétriques des copules. Ensuite nous présentons les différentes méthodes d'estimation : paramétriques, semi-paramétriques et non-paramétriques. Dans ce travail, on a étudié les propriétés asymptotiques d'un estimateur non-paramétrique basé sur les polynômes de Bernstein proposé par Sancetta & Satchell [2004]. Aussi, on a utilisé cet

estimateur pour proposer un nouvel estimateur du tau de Kendall.

Mots clés : Copules, modèles de copules, Estimation non-paramétrique, Estimateur de la copule de Bernstein, Tau de Kendall, Polynôme de Bernstein, Biais à la frontière.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, j'exprime mes plus vifs remerciements à tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Je remercie avec enthousiasme, Monsieur T. BOUEZMARNI, mon directeur de recherches, pour son aide et ses précieux conseils durant toute la période de ma maîtrise, je lui exprime ma profonde gratitude pour son soutien continu pour l'achèvement de ce travail.

Quand à Monsieur E. MARCHAND et Monsieur E. MONGA, qui ont bien voulu me faire l'honneur de constituer l'honorable jury devant lequel mon mémoire sera soutenu, c'est à juste titre que je leur reste obligé pour la bienveillante attention.

Un grand merci aussi à l'ensemble du personnel du Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke.

Enfin, je n'oublie pas de rendre un vibrant hommage à mes enseignants, pour l'effort et la patience dont ils ont fait preuve.

Ma haute considération va à mes parents pour le sacrifice énorme qu'ils ont consenti.

Qu'il en soit de même pour mes ami(e)s dont le soutien indéfectible à toute épreuve, que leur dictaient très certainement leur fidélité en amitié, était une position assidue et permanente à mon égard.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-----------|
| RÉSUMÉ | 1 |
| REMERCIEMENTS | 3 |
| TABLE DES MATIÈRES | 4 |
| LISTE DES TABLEAUX | 7 |
| LISTE DES FIGURES | 8 |
| CHAPITRE 1 — INTRODUCTION GÉNÉRALE | 9 |
| CHAPITRE 2 — INTRODUCTION AUX COPULES ET À LEURS AP- PLICATIONS | 13 |
| 2.1 Introduction | 13 |
| 2.2 Lois de probabilité | 14 |
| 2.2.1 La normale multidimensionnelle | 14 |
| 2.2.2 La Student multidimensionnelle | 16 |

| | | |
|--|---|-----------|
| 2.2.3 | La famille exponentielle | 16 |
| 2.3 | Copules | 18 |
| 2.4 | Mesures de dépendance | 24 |
| 2.4.1 | Corrélation de Pearson | 24 |
| 2.4.2 | Tau de Kendall et rho de Spearman | 26 |
| 2.4.3 | Dépendance de queue | 31 |
| 2.5 | Modèles de copules | 33 |
| 2.5.1 | Copules elliptiques | 33 |
| 2.5.2 | Copules Archimédiennes | 38 |
| 2.5.3 | Copules de Valeurs Extrêmes | 45 |
| 2.5.4 | Copules Archimax | 46 |
| CHAPITRE 3 — Estimation des copules | | 47 |
| 3.1 | Introduction | 47 |
| 3.2 | Estimation paramétrique | 49 |
| 3.2.1 | Méthode FML (Full Maximum Likelihood) | 49 |
| 3.2.2 | Méthode IFM (Inference Functions for Margins) | 50 |
| 3.3 | Estimation semi-paramétrique | 52 |
| 3.3.1 | Méthode CML (Canonical Maximum Likelihood) | 52 |
| 3.4 | Estimation non-paramétrique | 53 |
| 3.4.1 | Copule empirique | 53 |

| | | |
|---|---|-----------|
| 3.4.2 | Estimation de la copule C par les méthodes à noyau | 55 |
| 3.4.3 | Estimation de la densité de copule par les méthodes à noyau | 59 |
| CHAPITRE 4 — Estimateur de Bernstein | | 63 |
| 4.1 | Introduction | 63 |
| 4.2 | Propriétés asymptotiques de l'estimateur de Bernstein | 65 |
| 4.2.1 | Biais asymptotique | 67 |
| 4.2.2 | Variance asymptotique | 71 |
| 4.2.3 | Sélection du paramètre de lissage | 73 |
| 4.2.4 | Normalité asymptotique | 75 |
| 4.3 | Estimation du tau de Kendall | 76 |
| CONCLUSION | | 78 |

LISTE DES TABLEAUX

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Caractéristiques des copules elliptiques | 37 |
| 2.2 | Caractéristiques des copules archimédiennes | 44 |

LISTE DES FIGURES

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Densité de copule Gaussienne de paramètre $\rho = 0.5$ | 35 |
| 2.2 | Densité de la copule de Student avec $\rho = 0.5$ et $\nu = 14$ | 36 |
| 2.3 | Densité de la copule de Clayton pour $\theta = 0.5$ | 40 |
| 2.4 | Densité de la copule de Frank pour $\theta = 2$ | 42 |
| 2.5 | Densité de la copule de Gumbel pour $\theta = 3$ | 43 |

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Mesurer la dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires est une pratique largement répandue par les statisticiens. Un riche ensemble de mesures de dépendance entre les variables aléatoires a été proposé comme le coefficient de corrélation de Pearson, le tau de Kendall et le rho de Spearman. Bien que ces mesures sont simples à calculer et peuvent être facilement interprétées, elles ne sont pas en mesure de détecter toutes les formes de dépendances, donc il était indéniable de trouver un autre moyen pour résoudre ce problème. En effet, la fonction copule a l'avantage de modéliser complètement la dépendance entre les variables.

L'introduction des copules à des fins statistiques est un phénomène relativement récent qui trouve sa source à la fin des années 50 dans des recherches portant initialement sur les tables de contingence. Au début, il était difficile de trouver des traces de la notion copule dans la littérature statistique. Mais à partir des années 70 et avec le développement de la théorie des processus empiriques, d'autres auteurs ont redécouvert le concept des fonctions copules sous d'autres appellations en établissant, de manière originale certaines de leurs propriétés. C'est ainsi qu'elles sont nommées "représentation uniforme" par Ki-

meldorf et Sampson [1975], "fonction de dépendance" par Galambos [1978] et Deheuvels [1979], ou encore "la forme standard" par Cook et Johnson [1981].

Le terme copule vient du mot latin "*copulae*", qui signifie au sens figuré, lien, alliance, liaison ou union. Cette notion apparaît sous d'autres appellations dans certains travaux de Fréchet [1951], Féron [1956] et Dall'Aglio [1956] portant sur l'étude des tables de contingence et lois multidimensionnelles à structures marginales fixées. Mais c'était en 1959 que le terme copule a été utilisé pour la première fois grâce à Sklar [1959] dans la théorie des lois multidimensionnelles.

D'une façon explicite, une copule met en évidence la relation de dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires par la relation :

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Dans cette expression, F est la fonction de répartition conjointe des variables aléatoires X_1 et X_2 . On peut changer les fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 , à volonté tout en conservant la structure de dépendance (la copule C) intacte. Les fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 pourraient être des lois différentes. Ceci est un premier atout pour les statisticiens, puisque les copules leur autorisent une sélection plus étendue des fonctions de répartitions conjointes et ce indépendamment des différentes lois marginales considérées. Grâce à cette flexibilité, la théorie des copules trouve des applications dans de nombreux domaines comme l'hydrologie (Salvadori, De Michele, Kottegodda et Rosso [2007]), les sciences actuarielles (Frees et Valdes [1998]) et en finance (Cherubini, Vecchiato et Lucciano [2004], Mc-Neil, Frey et Embrechts [2005]).

Pourquoi la copule et non le coefficient de corrélation ?

Modéliser la dépendance par des indicateurs statistiques est une chose, la modéliser à l'aide d'une fonction de dépendance en est une autre. Ce qui est le cas de la fonction copule qui répond à cet objectif. Cela explique le choix de la copule pour modéliser

la dépendance et non le coefficient de corrélation, une mesure souvent utilisée par les praticiens car cette dernière possède plusieurs limites telles que :

- Le coefficient de corrélation n'est pas défini si les moments d'ordre deux des variables aléatoires ne sont pas finis. Ce n'est pas une mesure appropriée de la dépendance pour les distributions à queues lourdes où les variances peuvent être infinies.
- Le coefficient de corrélation peut être le même alors que la structure de dépendance est totalement différente notamment pour les valeurs extrêmes.
- Le coefficient de corrélation et sa portée de caractérisation ne fonctionnent que pour les variables gaussiennes, pour lesquelles corrélation et dépendance recouvrent la même réalité.
- La corrélation est une mesure de dépendance qui ne peut pas nous indiquer tout ce que nous voudrions savoir sur la structure de la dépendance.

Ainsi, à chaque fois qu'il est nécessaire de modéliser une structure de dépendance entre plusieurs variables aléatoires, nous pouvons faire appel à la fonction copule qui possède les avantages suivants :

- La copule est une fonction qui modélise les propriétés des structures de dépendance telles que la forme et l'intensité.
- La copule est capable de mesurer la dépendance pour les distributions à queues lourdes.
- Elles permettent de construire des modèles de distributions multidimensionnelles.
- Les copules permettent d'élaborer des modèles non gaussiens, c'est à dire qu'avec une copule, on peut construire par exemple une distribution avec une marginale gaussienne et une autre uniforme.

Ce mémoire se divise en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'introduction générale où nous présentons les grandes lignes de ce travail, nous fournissons un exposé de synthèse sur ce sujet. On commence par donner un historique des copules et expliquer le choix de la copule pour modéliser la

structure de dépendance, ensuite nous rappelons le contenu des chapitres suivants et la contribution de ce travail.

Le second chapitre est une introduction mathématique aux copules. On y retrouve les principaux théorèmes qui serviront de base aux chapitres suivants. Dans ce chapitre nous présentons quelques familles de copules paramétriques les plus utilisées en pratique et leurs propriétés fondamentales comme les copules elliptiques et les copules Archimédiennes.

L'objectif principal du troisième chapitre est de fournir différentes méthodes d'estimation des copules à savoir l'approche paramétrique, semi-paramétrique et non-paramétrique.

La première approche consiste à estimer le paramètre de la copule par l'une des méthodes suivantes :

1. Méthode FML (Full Maximum Likelihood)
2. Méthode IFM (Inference Functions for Margins)

Dans la seconde approche on utilise la méthode CML (Canonical Maximum Likelihood)

Quand à la troisième approche on peut utiliser les méthodes suivantes :

1. La méthode de la copule empirique
2. La méthode à noyau

Notre contribution se trouve dans le chapitre quatre où nous étudions une estimation non-paramétrique de la densité de la copule de Bernstein à savoir le biais et la variance asymptotique. Nous définissons le tau de Kendall basé sur l'estimateur en utilisant la copule de Bernstein.

CHAPITRE 2

INTRODUCTION AUX COPULES ET À LEURS APPLICATIONS

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de fournir une introduction à la notion de copule. D'abord nous commençons par définir quelques notations qui seront introduites tout au long de ce chapitre, ensuite nous rappelons quelques notions de probabilités par la présentation de lois célèbres dans le cas multidimensionnel. Après, nous passons à la partie des copules où nous exposerons les définitions et les propriétés accompagnées de présentations graphiques des copules les plus utilisées.

2.2 Lois de probabilité

Considérons un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$, auquel on associe la fonction de répartition

$$F(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d),$$

où $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Les fonctions de répartition marginales associées à F sont définies par

$$F_j(x_j) = \mathbb{P}(X_j \leq x_j), \quad 1 \leq j \leq d.$$

Notons que ces dernières peuvent s'exprimer en fonction de F par

$$F_j(x_j) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, \dots, t, x_j, t, \dots, t), \quad 1 \leq j \leq d.$$

Si F est absolument continue et f est la densité de probabilité telle que

$$F(x_1, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f(s_1, \dots, s_d) ds_1 \dots ds_d.$$

On en déduit alors la relation

$$f(x_1, \dots, x_d) = \frac{\partial^d F(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_1 \dots \partial x_d}.$$

De la même façon, on associe les densités marginales f_1, \dots, f_d aux fonctions de répartition F_1, \dots, F_d par

$$f_j(x) = \frac{d}{dx_j} F_j(x).$$

2.2.1 La normale multidimensionnelle

Le modèle normal multidimensionnel est le modèle le plus fréquent en statistique. Pour le décrire on considère $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$, un vecteur de variable aléatoires indépendantes, où Z_j , $1 \leq j \leq d$ est de loi normale de moyenne nulle et de variance unitaire. Soit

également Σ une matrice carrée symétrique et définie positive à d dimensions. Alors, la distribution normale multidimensionnelle associée de moyenne $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d)^T$ et de matrice de variance-covariance Σ est définie comme la loi du vecteur

$$X = \Sigma^{1/2}Z + \boldsymbol{\mu}$$

où $\Sigma^{1/2}$ est la racine carrée symétrique de Σ (voir l'ouvrage de Saporta [2006]).

Puisque les composantes de Z sont indépendantes de loi $N(0, 1)$, sa densité est donnée par :

$$f_Z(z_1, \dots, z_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d z_j^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}\right),$$

où $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d)^T$.

En considérant la transformation X décrite précédemment, on en tire la densité de la loi normale multidimensionnelle, c'est-à-dire :

$$f_X(\mathbf{x}) = f_X(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}.$$

Cas particulier : Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T$.

Pour $d = 2$, la densité de la loi normale de moyennes μ_1, μ_2 , de variances σ_1^2, σ_2^2 et de corrélation ρ s'écrit :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1} \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right\}\right].$$

Les propriétés suivantes de la loi normale bidimensionnelle sont intéressantes :

1. La loi marginale de X_j est $N(\mu_j, \sigma_j^2)$, pour $j = 1, 2$;
2. $Cor(X_1, X_2) = \rho$;
3. La loi de $aX_1 + bX_2$ est normale de moyenne $a\mu_1 + b\mu_2$ et de variance $a^2\mu_1^2 + b^2\mu_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2$;

4. Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\rho = 0$ (indépendance linéaire).

2.2.2 La Student multidimensionnelle

Un vecteur aléatoire \mathbf{X} de \mathbb{R}^d suit une loi de Student de paramètres $(\nu, \boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ s'il admet pour fonction de densité

$$t_d(x; \nu, \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})(\pi\nu)^{-d/2} |\Sigma|^{-1/2}}{\Gamma(\nu/2) [1 + (x - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (x - \boldsymbol{\mu}) / \nu]^{\nu+d/2}},$$

où $\nu \in \mathbb{R}^d (\nu > 0)$, $\boldsymbol{\mu}$, Σ et Γ désignent le degré de liberté, le vecteur moyen, une matrice inversible de dimension $d \times d$ et la fonction Gamma d'Euler respectivement.

Le vecteur \mathbf{X} n'a de moyenne (resp. de matrice des covariances) que si $\nu > 1$ (resp. $\nu > 2$) et dans ce cas elle coïncide avec $\boldsymbol{\mu}$ (resp. avec $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$). Le degré de liberté ν contrôle la longueur de queue de la distribution : plus ν est petit plus la queue de la distribution de \mathbf{X} est longue, et lorsque ν tend vers $+\infty$ la loi de \mathbf{X} tend en probabilité vers la loi normale de paramètre $(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

2.2.3 La famille exponentielle

Définition 2.1 (*Famille exponentielle générale*)

La loi de probabilité \mathbb{P} appartient à une famille de loi de type exponentielle générale $\mathbb{P}_\theta (\theta \in \Theta, \Theta \subset \mathbb{R}^d)$ s'il existe une mesure dominante ν telle que les lois \mathbb{P}_θ ont pour densité par rapport à ν .

$$f_\theta(y) = c(\theta)h(y) \exp \left\{ \sum_{j=1}^d \alpha_j(\theta) T_j(y) \right\},$$

$y \in \mathcal{S}$, avec $T_1(\cdot), \dots, T_d(\cdot), \alpha_1(\cdot), \dots, \alpha_d(\cdot)$ sont des fonctions mesurables, c (resp h) est une fonction de θ (resp de y) et \mathcal{S} est l'ensemble de définition de la densité $f_\theta(\cdot)$.

Exemple

– Loi exponentielle :

$$\begin{aligned} f_\theta(y) &= \frac{1}{\theta} \exp\{-y/\theta\} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(y) \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{\theta}y - \log \theta\right\} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(y). \end{aligned}$$

Ici, d est égale à 1, $\alpha_1(\theta) = -\frac{1}{\theta}$, $T_1(y) = y$, $c(\theta) = -\log \theta$ et $h(y) = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(y)$.

Définition 2.2 (Paramètres naturels d'une loi de la famille exponentielle)

Soit une loi exponentielle générale définie selon la définition précédente. Les quantités $\alpha_j(\theta), j = 1, \dots, d$, sont appelées paramètres naturels de la loi exponentielle générale et sont des éléments de l'espace naturel des paramètres.

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha = (\alpha_1(\theta), \dots, \alpha_d(\theta)) : \int_{\mathcal{Y}} h(y) \exp \sum_{j=1}^d \alpha_j(\theta) T_j(y) < \infty \right\}.$$

Remarques :

– Une famille exponentielle est dite naturelle si

$$f_\theta(y) = c(\theta)h(y) \exp \left\{ \sum_{j=1}^d \theta_j y_j \right\}.$$

– La fonction

$$\Theta \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\theta \mapsto (\alpha_1(\theta), \dots, \alpha_d(\theta))$$

n'est pas forcément bijective, et de même q n'est pas forcément égal à d .

2.3 Copules

La copule est un outil relativement innovant pour modéliser la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires. La connaissance de cet outil probabiliste est essentielle à l'appréhension de nombreux domaines d'application. Le concept de copule a été introduit par Sklar en 1959 pour résoudre un problème de probabilité énoncé par Maurice Fréchet. À l'époque, Sklar et Schweizer travaillent sur les travaux de Menger concernant les espaces métriques aléatoires (Probabilistic Metric Space ou PMS), qui sont une généralisation de l'espace métrique usuel introduit par Fréchet en 1906. Même si les copules occupent une place importante dans l'oeuvre de Sklar et Schweizer, elle ne sont pas l'objet central de leurs recherches. L'utilisation des copules par Sklar et Schweizer est assez originale, elles interviennent pour résoudre certains problèmes et ne font pas l'objet véritablement d'études appropriées.

Pendant de nombreuses années, les copules sont peu (ou pas) utilisées en statistiques. Il y a les travaux sur la dépendance de Kimeldorf et Sampson dans les années 1975 ou encore les recherches de Paul Deheuvels à la fin des années 1970, mais l'intérêt pour la recherche dans ce domaine s'est plutôt développé durant les années 80 et 90. Par exemple, les copules Archimédiennes apparaissent dans Genest & MacKay [1986] et Marshall & Olkin [1988] et ensuite dans Joe [1997]. Elles sont également devenues des outils employés couramment dans plusieurs domaines. On cite par exemple les travaux de Li [2000], Cherubini & Luciano [2002], et Bennet & Kennedy [2004]. Aussi les copules sont de plus en plus utilisées pour modéliser les distributions multidimensionnelles avec des marges continues en hydrologie (Salvadori, De Michele, Kottegoda, et Rosso [2007]), en sciences actuarielles (Frees et Valdez [1998]) ou en finance (Cherubini, Vecchiato, et Luciano [2004]; Mc-Neil, Frey, et Embrechts [2005]).

Nous nous limiterons dans ce chapitre à l'étude des copules bidimensionnelles ($d = 2$),

dont les résultats sont aisément généralisables dans la plupart des cas pour $d > 2$. La définition suivante introduit la notion des copules.

Définition 2.3 *Une copule bivariée est une fonction $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. $C(u, 0) = C(0, u) = 0, \forall u \in [0, 1]$. On dit que C est attachée ;
2. $C(u, 1) = C(1, u) = u, \forall u \in [0, 1]$. Les marges des distributions sont des marges uniformes ;
3. C est 2-croissante : $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$,
 $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$ tel que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$.

Nous pouvons maintenant passer au fameux théorème de Sklar. La grande majorité de la théorie des copules repose sur ce théorème qui permet de représenter toute fonction de répartition à l'aide d'une copule.

Théorème 2.4 *Soit F une fonction de répartition conjointe avec des marges F_1 et F_2 . Alors, il existe une copule C telle que pour tout $x = (x_1, x_2) \in \bar{\mathbb{R}}^2$:*

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (2.1)$$

Réciproquement, si C est une copule, F_1 et F_2 sont des fonctions de répartition, alors la fonction F , définie par l'équation 2.1 est une fonction de répartition conjointe avec les marges F_1, F_2 . Si F_1, F_2 , sont continues, alors C est unique.

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), F_2(X_2) \leq F_2(x_2)) \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

Le théorème de Sklar implique que pour une distribution conjointe bidimensionnelle continue, les marges et la structure de dépendance peuvent être dissociées de façon unique.

De plus, la structure de dépendance est représentée par la copule C .

Dans le cas de marges continues, on peut extraire l'unique copule associée à F comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 2.5 *Soit F une fonction de répartition conjointe avec les marges F_1, F_2 . Soient F_1^{-1}, F_2^{-1} les fonctions inverses de F_1, F_2 c'est-à-dire :*

$$F_j^{-1}(u) = \inf \{x; F_j(x) \geq u\}, \quad u \in (0, 1).$$

Alors pour tout $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, on a :

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)). \quad (2.2)$$

Cette extraction sera utile pour l'estimation de la copule.

Preuve : F_1 et F_2 sont continues, alors $F_1(X_1)$ et $F_2(X_2)$ sont uniformes sur $[0, 1]$ et par la suite.

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq u_1, F_2(X_2) \leq u_2) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), X_2 \leq F_2^{-1}(u_2)) \\ &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)). \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration du corollaire.

L'un des théorèmes essentiels à la théorie des copules est celui de l'invariance par transformations strictement croissantes.

Théorème 2.6 *Soient deux variables aléatoires continues X_1 et X_2 dont les marginales*

sont F_1 et F_2 , liées par une copule C . Soient h_1 et h_2 deux fonctions strictement croissantes (pas forcément continues) sur $Im(X_1)$ et $Im(X_2)$ respectivement, alors :

$$C(F_1(h_1(x_1)), F_2(h_2(x_2))) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

où $C(F_1(h_1(\cdot)), F_2(h_2(\cdot)))$ est la copule du couple $(h_1(X_1), h_2(X_2))$. La copule est donc invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.

Preuve : En effet,

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) &= F(x_1, x_2) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= \mathbb{P}(h(X_1) \leq h(x_1), h(X_2) \leq h(x_2)) \\ &= C(F_1(h(x_1)), F_2(h(x_2))). \end{aligned}$$

□

Bornes de Fréchet :

Les bornes de Fréchet permettent de définir une région où se situent toutes les copules.

Définissons tout d'abord deux copules importantes :

1. la copule minimale qui a pour expression $C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$ avec $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$,
2. la copule maximale qui s'écrit $C^+(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$ avec $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$.

Montrons que C^+ définit une copule. En effet :

- $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, $\min(u_1, 0) = \min(0, u_1) = 0 \Rightarrow C^+$ est attachée.
- $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, $\min(u_1, 1) = \min(1, u_1) = u_1 \Rightarrow C^+$ a de marges uniformes.
- $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, $(v_1, v_2) \in [0, 1]^2$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a les cas suivants :

1. Si $u_1 \leq u_2 < v_1 \leq v_2$, on a :

$$\min(u_2, v_2) - \min(u_2, v_1) - \min(u_1, v_2) + \min(u_1, v_1) = u_2 - u_2 - u_1 + v_1 \geq 0$$

2. Si $v_1 \leq v_2 < u_1 \leq u_2$, on a :

$$\min(u_2, v_2) - \min(u_2, v_1) - \min(u_1, v_2) + \min(u_1, v_1) = v_2 - v_1 - v_2 + v_1 \geq 0$$

3. Si $u_1 < v_1 < u_2 < v_2$, on a :

$$\min(u_2, v_2) - \min(u_2, v_1) - \min(u_1, v_2) + \min(u_1, v_1) = u_2 - v_1 - u_1 + u_1 \geq 0$$

$\Rightarrow C^+$ est 2-croissante.

Par conséquent, C^+ est une copule.

□

De la même façon, on peut montrer que C^- définit une copule.

Proposition 2.7 *Pour toute copule C nous avons :*

$$C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2).$$

Preuve : En effet,

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2 \begin{cases} C(u_1, u_2) \leq C(u_1, 1) = u_1 \\ C(u_1, u_2) \leq C(1, u_2) = u_2 \end{cases}$$

donc

$$C(u_1, u_2) \leq \min(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2). \quad (2.3)$$

De (3) de la définition 2.3 et $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, on a :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &\geq C(u_1, 1) + C(1, u_2) - C(1, 1) \\ &\geq u_1 + u_2 - 1. \end{aligned}$$

Or $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, $C(u_1, u_2) \geq 0$, donc :

$$C(u_1, u_2) \geq \max(u_1 + u_2 - 1, 0) = C^-(u_1, u_2). \quad (2.4)$$

En combinant (2.3) et (2.4) on aura : $C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2)$.

□

La densité d'une copule :

Supposons que les distributions marginales F_1, F_2 et la copule C sont différentiables, alors la densité jointe notée f de la variable aléatoire $X = (X_1, X_2)$ prend la forme suivante :

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) c(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

où, pour $1 \leq k \leq 2$, f_k est la densité de probabilité de X_k , et c est la densité de la copule C définie par :

$$c = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

Nous constatons ainsi que l'on peut séparer la densité jointe en deux blocs. Le premier, $c(F_1(x_1), F_2(x_2))$, contient l'information sur la structure de dépendance des variables aléatoires X_1, X_2 . Le second est le produit des densités marginales. Cela montre que les copules représentent un moyen d'extraire la structure de dépendance de la distribution jointe et de la séparer des comportements marginaux. Donc, il est possible de caractériser la densité d'une copule entièrement par la densité jointe et les densités marginales. En

effet, si la fonction de répartition F du couple (X_1, X_2) admet une densité continue alors la densité de copule de ce couple est donnée par :

$$c(u_1, u_2) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{f_1(F_1^{-1}(u_1))f_2(F_2^{-1}(u_2))}.$$

Cette dernière va permettre d'estimer la densité d'une copule à partir de l'estimation des lois marginales et de la loi jointe.

2.4 Mesures de dépendance

Il existe de nombreuses approches pour décrire et mesurer la dépendance entre variables aléatoires conjointement distribuées. Souvent, on utilise le coefficient de corrélation linéaire de Pearson décrit dans la section suivante.

2.4.1 Corrélation de Pearson

Définition 2.8 *Soient X et Y deux variables aléatoires de variances finies $[Var(X), Var(Y)]$ respectivement. La corrélation de Pearson entre les variables X et Y est donnée par :*

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

où $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X.Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ est la covariance entre X et Y .

Il s'agit d'un coefficient de corrélation linéaire permettant de mesurer seulement la dépendance linéaire. Il peut être utilisé pour certaines distributions de variables aléatoires comme la loi normale. Pour d'autres distributions, le coefficient de corrélation linéaire offre une interprétation limitée. La discussion des détails peut être trouvée dans Embrechts, Lindskog, et McNeil [2001] pour les limites du coefficient de corrélation comme

mesure de dépendance.

Une corrélation nulle n'est pas toujours équivalente à l'indépendance. Par exemple, considérons $X \sim N(0, 1)$ et $Y = X^2$, alors

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot X^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = 0.$$

Donc $\rho(X, Y) = 0$. Bien que X et Y sont des variables aléatoires liées, elles ont une corrélation nulle.

La corrélation linéaire est invariante par transformation linéaire, mais pas pour toutes les transformations croissantes, par exemple $\log(X)$ et $\log(Y)$ ont une corrélation différente de celle entre X et Y .

Supposons que nous avons un échantillon $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, la version empirique du coefficient de corrélation de Pearson est donnée par :

$$\rho_n(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)S_x S_y},$$

où \bar{x} et \bar{y} sont les moyennes de l'échantillon de X et de Y , S_x et S_y sont les écarts-types de l'échantillon de X et de Y tels que :

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

et

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

La corrélation de Pearson peut être exprimée en fonction des copules comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 2.9 *Si C désigne la copule des variables X et Y , la corrélation de Pearson $\rho(X, Y)$ a pour expression :*

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dF_1^{-1}(u) dF_2^{-1}(v).$$

Preuve :

En effet,

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy \quad (2.5)\end{aligned}$$

où H est la distribution jointe de X et Y . On applique le changement de variable suivant : $u = F(x)$ et $v = G(y)$, on démontre le résultat de la proposition.

On remarque que la copule ne permet pas de déduire le coefficient de corrélation. En effet, les distributions marginales sont nécessaires.

2.4.2 Tau de Kendall et rho de Spearman

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont deux mesures de concordance bien connues en statistique. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations, à la différence du coefficient de corrélation linéaire qui lui mesure la corrélation entre les valeurs des observations. Elles offrent par ailleurs l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires. Ces notions figurent dans plusieurs travaux comme Cadoux et al. [2006], Embrechts et al. [2002], Demarta et McNeil [2004] et Lindskog et al. [2003].

Pour introduire le tau de Kendall et le rho de Spearman, on considère d'abord la notion de concordance présentée dans la définition suivante.

Définition 2.10 *Deux réalisations (x, y) et (x', y') d'un vecteur aléatoire continu (X, Y) , sont dites concordantes si $(x' - x)(y' - y) > 0$ et discordantes si $(x' - x)(y' - y) < 0$. Une mesure de concordance κ entre variables continues vérifie a priori les propriétés suivantes :*

- si Y est une fonction croissante de X , alors $\kappa(X, Y) = 1$;
- si Y est une fonction décroissante de X , alors $\kappa(X, Y) = -1$;
- si α et β sont des fonctions strictement croissantes, $\kappa(\alpha(X), \beta(Y)) = \kappa(X, Y)$.

On commence par introduire le tau de Kendall, qui est une mesure de concordance, ainsi que ses importantes propriétés.

Définition 2.11 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et (X', Y') un vecteur indépendant mais de même loi que (X, Y) . Le tau de Kendall de (X, Y) est défini par :

$$\tau(X, Y) = \mathbb{P} \left\{ (X - X')(Y - Y') \geq 0 \right\} - \mathbb{P} \left\{ (X - X')(Y - Y') < 0 \right\}.$$

Le tau de Kendall n'est autre que la différence entre la probabilité de concordance et la probabilité de discordance, et il vérifie les propriétés suivantes :

- Il est symétrique, c'est à dire : $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$;
- $-1 \leq \tau \leq +1$;
- Si X et Y sont comonotones alors $\tau = 1$ (la concordance parfaite) ;
- Si X et Y sont antimonotones alors $\tau = -1$ (la discordance parfaite) ;
- Si X et Y sont indépendantes alors $\tau = 0$ (l'inverse pas forcément vrai) ;
- Si α et β sont des fonctions strictement croissantes, $\tau(\alpha(X), \beta(Y)) = \tau(X, Y)$.

Le tau de Kendall peut être déduit à partir de la copule, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.12 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire continu de copule C . Le tau de Kendall $\tau(X, Y)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) c(u, v) du dv - 1 \\ &= 4\mathbb{E}(C(U, V)) - 1. \end{aligned}$$

Preuve :

On note $U = F_X(X)$, $U' = F_X(X')$, $V = F_Y(Y)$, $V' = F_Y(Y')$ dont les lois sont uniformes sur $[0, 1]$. On a

$$\begin{aligned}
\tau(X, Y) &= \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') \geq 0\} - \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') < 0\} \\
&= 2\mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') \geq 0\} - 1 \\
&= 2\mathbb{P}\{(X - X') \geq 0, (Y - Y') \geq 0\} + 2\mathbb{P}\{(X - X') < 0, (Y - Y') < 0\} - 1 \\
&= 4\mathbb{P}\{X \geq X', Y \geq Y'\} - 1 \\
&= 4\mathbb{P}\{F_X(X) \geq F_X(X'), F_Y(Y) \geq F_Y(Y')\} - 1 \\
&= 4\mathbb{P}\{U \geq U', V \geq V'\} - 1 \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^u \int_0^1 \int_0^v c(u, v)c(u', v') dudvdu' dv' - 1 \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v)c(u, v) dudv - 1 \\
&= 4\mathbb{E}(C(U, V)) - 1.
\end{aligned}$$

□

Si on dispose d'un échantillon d'observations de taille n de (X, Y) , $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$, on peut construire un estimateur empirique du tau de Kendall. Par exemple, on peut définir

$$\hat{\tau}_n(X, Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \text{sign}\{(x_j - x_i)(y_j - y_i)\}.$$

La fonction $\text{sign}(z)$ est égale à 1 si z est positif, à -1 si z est négatif et à 0 si z est nul.

L'autre mesure de concordance, qui est très utilisée en pratique, est le rho de Spearman.

Nous donnons sa définition et quelques propriétés de cette mesure.

Définition 2.13 *Le rho de Spearman de deux variables X et Y est égal à*

$$\rho_S(X, Y) = 3(\mathbb{P}\{(X - \tilde{X})(Y - Y') > 0\} - \mathbb{P}\{(X - \tilde{X})(Y - Y') < 0\}),$$

où (X, Y) , (\tilde{X}, \tilde{Y}) et (X', Y') sont des copies indépendantes.

On peut exprimer le rho de Spearman en fonction du coefficient de corrélation entre deux variables uniformes. La proposition suivante montre ce résultat.

Proposition 2.14 *Le rho de Spearman de deux variables X et Y est égal au coefficient de corrélation entre les variables $F(X)$ et $F(Y)$.*

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F(X), F(Y)).$$

Preuve : D'après Schweizer et Wolff [1981] on a

$$\begin{aligned} \rho_S(X, Y) &= 12 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(F(X))\text{Var}(F(Y))}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

Le rho de Spearman peut aussi être exprimé en fonction de la copule comme le montre la proposition suivante

Proposition 2.15 *Si C désigne la copule des variables X et Y , le rho de Spearman $\rho_S(X, Y)$ a pour expressions :*

$$\begin{aligned} \rho_S(X, Y) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3. \end{aligned}$$

Preuve : Soient $U = F_X(X)$ et $V = F_Y(Y)$, deux variables qui suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$. Par conséquent leurs espérances et leurs variances sont respectivement égales à :

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \int_0^1 u du = 1/2$$

et

$$\text{Var}(U) = \text{Var}(V) = \int_0^1 u^2 du - \left(\int_0^1 u du \right)^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12.$$

D'une part, en utilisant la définition 2.8, on trouve

$$\begin{aligned} \rho_S(X, Y) &= \rho(F(X), F(Y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(F(X))\text{Var}(F(Y))}} \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3. \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \rho_S(X, Y) &= \rho(U, V) \\ &= \frac{\text{cov}(U, V)}{\sigma_U \sigma_V} \\ &= 12 \text{cov}(U, V) \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.16 *Contrairement au coefficient de corrélation de Pearson, le tau de Kendall et le rho de Spearman sont complètement caractérisés pas la copule et les distributions marginales sont inutiles.*

Si l'on dispose d'un échantillon d'observations de taille n de (X, Y) , $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$, on peut construire un estimateur empirique du rho de Spearman. Celui-ci est donné par la formule suivante :

$$\rho_n(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{x_i} - \bar{r}_x)(r_{y_i} - \bar{r}_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{x_i} - \bar{r}_x)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{y_i} - \bar{r}_y)^2}},$$

où r_{x_i}, \bar{r}_x (resp. r_{y_i}, \bar{r}_y) désigne le rang de x_i et la moyenne $\bar{r}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{x_i}$ (resp. le rang de y_i et la moyenne $\bar{r}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{y_i}$).

2.4.3 Dépendance de queue

Le concept de dépendance de queue fournit une description de la dépendance au niveau des queues de distribution. Ceci est utile pour étudier la survenance simultanée de valeurs extrêmes. C'est une mesure locale contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman qui mesurent la dépendance sur l'ensemble de la distribution.

Définition 2.17 *Le coefficient de dépendance de queue inférieure "lower tail dependence coefficient" entre deux variables aléatoires X et Y , de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y , est défini par la limite (si elle existe) :*

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha) | Y < F_Y^{-1}(\alpha)).$$

Le coefficient de dépendance de queue supérieure "upper tail dependence coefficient" entre deux variables aléatoires X et Y , de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y , est défini par la limite (si elle existe) :

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha)).$$

On dit que X et Y sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution si $\lambda_U \in]0, 1]$. Si $\lambda_U = 0$ on dit que X et Y sont asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution.

On peut exprimer λ_U et λ_L à l'aide de la copule C de (X, Y) tel que décrit dans la proposition suivante.

Proposition 2.18 *Etant donné deux variables aléatoires X et Y de copule $C(X, Y)$, on*

a :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}$$

et

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}.$$

Preuve : En effet, par définition, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_L(X, Y) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha) | Y < F_Y^{-1}(\alpha)) = \frac{\mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha), Y < F_Y^{-1}(\alpha))}{\mathbb{P}(Y < F_Y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha}. \end{aligned}$$

De même on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda_U(X, Y) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\mathbb{P}(X > F_X^{-1}(\alpha), Y > F_Y^{-1}(\alpha))}{\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha) \text{ ou } Y \leq F_Y^{-1}(\alpha))}{1 - \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - (\mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha) + \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)) - \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha) \text{ et } Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)))}{1 - \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - (\alpha + \alpha - C(\alpha, \alpha))}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Exemples :

Pour la couple C^+ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + \min(u, u)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + u}{1 - u} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\min(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{u}{u} \\ &= 1.\end{aligned}$$

2.5 Modèles de copules

Dans cette section, on va présenter les copules paramétriques les plus utilisées en pratique. On commence par les copules elliptiques. Ensuite, on introduit les copules archimédiennes avec quelques exemples.

2.5.1 Copules elliptiques

Les copules elliptiques sont définies à partir des lois elliptiques. Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions de la distribution elliptique ainsi que deux exemples classiques de cette famille de copule : la copule Gaussienne et la copule de Student.

Définition 2.19 *Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ est de distribution elliptique s'il admet la représentation suivante :*

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R}\mathbf{U}$$

où :

- $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbf{R}^d$.
- \mathbf{U} est un vecteur aléatoire uniforme sur la sphère unité de \mathbf{R}^d .
- \mathbf{R} est un vecteur aléatoire indépendant de \mathbf{U} .
- \mathbf{A} est une matrice de dimension $d \times d$ telle que $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ est non singulière.

Définition 2.20 *La fonction de densité d'une distribution elliptique (si elle existe) est donnée par :*

$$f(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})),$$

où g est une fonction définie de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , dite génératrice de densité.

L'une des familles des copules elliptiques les plus utilisées en pratique est la copule Gaussienne

Définition 2.21 *La copule Gaussienne bidimensionnelle, aussi appelée copule normale, est définie de la façon suivante :*

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)),$$

où ρ est le coefficient de corrélation et Φ_ρ représente la distribution normale bidimensionnelle centrée dont la matrice de corrélation est égale à $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

L'importance de cette copule réside dans le fait qu'elle est sous-jacente à la distribution normale multidimensionnelle. En effet, modéliser la structure de dépendance d'un échantillon par une copule gaussienne est cohérent avec la mesure de cette dépendance par le coefficient de corrélation linéaire. Cependant lorsque l'on souhaite modéliser une dépendance non linéaire ou entre événements extrêmes, on va faire appel à d'autres copules que nous explicitons par la suite.

En dérivant la formule définissant la copule Gaussienne, on peut extraire la densité de la copule Gaussienne bidimensionnelle qui s'écrit :

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{2(1 - \rho^2)} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)$$

avec $x_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ et $x_2 = \Phi^{-1}(u_2)$.

La figure 2.1 illustre la densité de la copule Gaussienne bidimensionnelle pour $\rho = 0.5$.

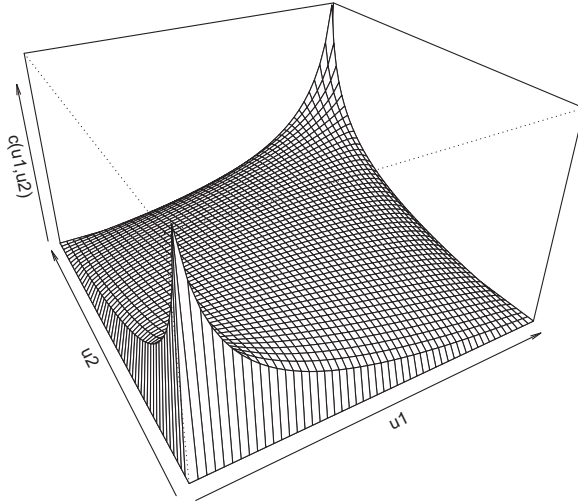


Figure 2.1 – Densité de copule Gaussienne de paramètre $\rho = 0.5$.

L'autre famille de copules elliptiques la plus utilisée est celle de Student.

Définition 2.22 *La copule Student bidimensionnelle est définie de la façon suivante :*

$$C(u_1, u_2; \rho, \kappa) = T_{\rho, \kappa}(T_{\kappa}^{-1}(u_1), T_{\kappa}^{-1}(u_2)),$$

avec ρ est le coefficient de corrélation et $T_{\rho, \kappa}$ est la distribution de Student bidimensionnelle standard de matrice de corrélation fonction de ρ et de degré de liberté κ .

Dans le cas où le coefficient de corrélation est différent de ± 1 , la copule Student présente des dépendances de queue à droite et à gauche (car la dépendance extrême est définie pour $\rho \neq -1$, voir le tableau 2.1).

La densité de la copule Student s'écrit sous la forme suivante :

$$c(u_1, u_2; \rho, \kappa) = \frac{\kappa}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\Gamma(\kappa/2)^2}{\Gamma(\kappa+1/2)^2} \frac{\left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{\kappa(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\kappa+2}{2}}}{\left[\left(1 + \frac{x_1^2}{\kappa}\right) \left(1 + \frac{x_2^2}{\kappa}\right)\right]^{-\frac{\kappa+1}{2}}}$$

avec $x_1 = T_\kappa^{-1}(u_1)$ et $x_2 = T_\kappa^{-1}(u_2)$, $\kappa > 0$ et $\rho \in (-1, 1)$.

La copule Student (t-copula) est extraite de la même manière que la copule Gaussienne mais cette fois-ci à partir de la distribution de Student bidimensionnelle.

La figure 2.2 illustre la densité de la copule de Student bidimensionnelle pour une corrélation $\rho = 0.5$ et un degré de liberté $\nu = 14$.

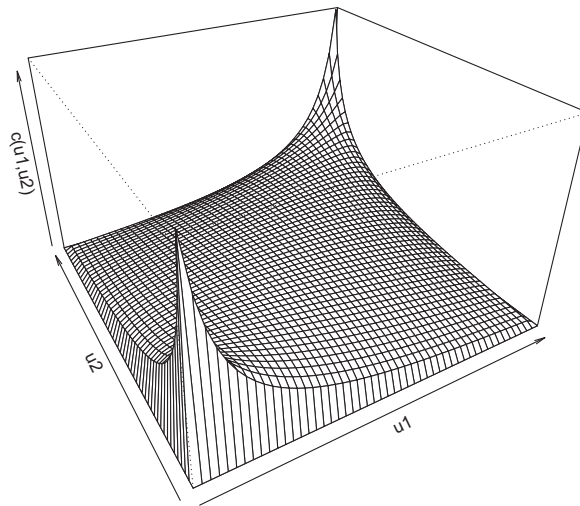


Figure 2.2 – Densité de la copule de Student avec $\rho = 0.5$ et $\nu = 14$.

Le tableau 2.1 donne les caractéristiques principales de la copule Gaussienne et de la Student. La modélisation de la dépendance des copules elliptique est symétrique.

| Copule elliptique | Paramètres | Tau de Kendall | Dépendance extrême |
|-------------------|-----------------------------|-------------------------------|--|
| Gaussienne | $\rho \in (-1, 1)$ | $\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$ | 0. |
| Student | $\rho \in (-1, 1), \nu > 2$ | $\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$ | $2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right)$. |

Tableau 2.1 – Caractéristiques des copules elliptiques

On note que $2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right)$ représente la dépendance de queue supérieure pour la copule Student. À l'inverse la copule Gaussienne ne représente aucune dépendance de queue.

Montrons maintenant que le tau de Kendall de la copule elleptique est égal à $\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\tau(X, Y) &= 4\mathbb{P} \left\{ X \geq X', Y \geq Y' \right\} - 1 \\
&= \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{-1}{4(1-\rho^2)} \left(\frac{u^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho uv}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{v^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} dudv - 1 \\
&\quad \text{on pose : } \left\{ s = \frac{u/\sigma_1 - \rho v/\sigma_2}{\sqrt{1-\rho^2}}, t = \frac{v}{\sigma_2}, dudv = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} dsdt \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\rho t/\sqrt{1-\rho^2}}^\infty \exp \left\{ \frac{-1}{4} (s^2 + t^2) \right\} dsdt - 1 \\
&\quad \text{on pose : } \{s = r \cos \theta, t = r \sin \theta, dsdt = r dr d\theta\} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2 + \arctan(\rho/\sqrt{1-\rho^2})} \int_0^\infty r \exp \left\{ \frac{-r^2}{4} \right\} dr d\theta - 1 \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right) - 1 \\
&= \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho).
\end{aligned}$$

2.5.2 Copules Archimédiennes

La classe des copules Archimédiennes, définies par Genest et Mackay [1986], joue un rôle important. D'une part, elles permettent de construire une grande variété de familles de copules, et donc de représenter une grande variété de structures de dépendance. D'autres part, les copules ainsi générées ont des formes analytiques fermées et sont faciles à simuler. En effet, contrairement aux copules gaussiennes et aux copules de Student, les copules archimédiennes ont le grand avantage de décrire des structures de dépendance très diverses dont notamment les dépendances dites asymétriques, où les coefficients de queue inférieure et de queue supérieure diffèrent. Pour plus d'éléments sur cette famille de copules le lecteur peut se référer à l'excellent ouvrage de Nelsen [2006].

Plusieurs raisons justifient l'utilisation de ce type de copules entre autres :

- Grande variété de familles paramétriques.
- Les propriétés particulières et intéressantes que cette classe possède.
- La facilité avec laquelle peuvent être construites et simulées.
- La grande variété des différentes structures de dépendance.

La définition suivante décrit la forme générale des copules Archimédiennes.

Définition 2.23 *Une copule est dite Archimédienne avec fonction génératrice φ si elle s'exprime sous la forme suivante :*

$$C(u_1, u_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) & \text{si } \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec φ vérifiant : $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(u) < 0$ et $\varphi''(u) > 0$ pour tout $0 \leq u \leq 1$.

Par la suite nous présentons les trois familles de copules Archimédiennes les plus utilisées en pratique. Cela concerne la copule de Clayton, la copule de Frank et celle de Gumbel.

Nous commençons par la copule de Clayton.

Définition 2.24 *La copule de Clayton, connue aussi sous les noms : copule de Cook-Johnson ou de Kimeldorf-Sampson, est une copule archimédienne dont le générateur est défini, pour $\theta > 0$ et pour $u \in]0, 1]$, par :*

$$\varphi(u) = \theta^{-1}(u^{-\theta} - 1).$$

La copule de Clayton bidimensionnelle s'écrit donc sous la forme :

$$C(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}.$$

Cette copule est différentiable et sa densité est donnée par :

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2; \theta) &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial C(u_1, u_2; \theta)}{\partial u_1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{-1}{\theta} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}-1} (-\theta u_1^{-\theta-1}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left[(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{\frac{-1-\theta}{\theta}} (u_1^{-\theta-1}) \right] \\ &= \frac{-\theta - 1}{\theta} \left[(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{\frac{-1-\theta}{\theta}-1} (-\theta u_2^{-\theta-1}) (u_1^{-\theta-1}) \right] \\ &= (\theta + 1)(u_1 u_2)^{-\theta-1} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}-2}. \end{aligned}$$

La copule de Clayton présente une dépendance asymptotique à gauche (sur les petites valeurs) ce qui n'est pas le cas de la copule gaussienne.

La figure 2.3 illustre la densité bidimensionnelle de la copule de Clayton pour $\theta = 0.5$.

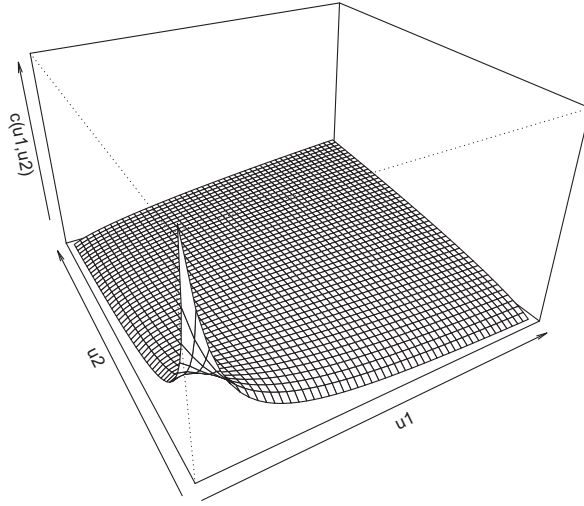


Figure 2.3 – Densité de la copule de Clayton pour $\theta = 0.5$.

En utilisant la règle de l'Hôpital, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
 \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + (2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{1 - u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2(2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta - 1} u^{-\theta - 1}}{-1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0^+} (2 - u^\theta)^{-1/\theta} \\
 &= 2^{-\frac{1}{\theta}}.
 \end{aligned}$$

La copule de Clayton possède donc une dépendance de queue inférieure mais pas une dépendance de queue supérieure.

D'après la formule

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt,$$

où C est une copule Archimédienne générée par φ (voir l'ouvrage de Nelsen [2006]), nous pouvons calculer le tau de Kendall pour la copule de Clayton.

On a :

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta}.$$

donc

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\theta}{\theta+2}. \end{aligned}$$

Dans la définition suivante, la copule de Frank, permet une modélisation symétrique comme dans le cas des copules elliptiques.

Définition 2.25 *Le générateur de cette copule Archimédienne est donné par :*

$$\varphi(u) = -\ln \left(\frac{\exp^{-\theta u} - 1}{\exp^{-\theta} - 1} \right),$$

où $\theta \neq 0$ et $u \in]0, 1]$. La copule de Frank bidimensionnelle s'écrit donc sous la forme :

$$C(u_1, u_2; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp^{-\theta u_1} - 1)(\exp^{-\theta u_2} - 1)}{(\exp^{-\theta} - 1)} \right).$$

La densité de la copule de Frank est égale à :

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2; \theta) &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial C(u_1, u_2; \theta)}{\partial u_1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{-1}{\theta} \left(\frac{-\theta \exp^{-\theta u_1} (\exp^{-\theta u_2} - 1)}{(\exp^{-\theta} - 1) + (\exp^{-\theta u_1} - 1)(\exp^{-\theta u_2} - 1)} \right) \right] \\ &= \frac{\theta(1 - \exp^{-\theta}) \exp^{-\theta(u_1+u_2)}}{[(1 - \exp^{-\theta}) - (\exp^{-\theta u_1} - 1)(\exp^{-\theta u_2} - 1)]^2}. \end{aligned}$$

Le tau de Kendall correspond à la copule de Frank est donné par la formule suivante (voir Genest [1987]) :

$$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta} (1 - D_1(\theta)),$$

où $D_k(x)$ est la fonction de Debye donnée par :

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{\exp t - 1} dt \quad \forall k \geq 0.$$

La copule de Frank ne possède pas de dépendance dans les extrêmes.

La figure 2.4 correspond à la densité de la copule de Frank bidimensionnelle pour $\theta = 2$.

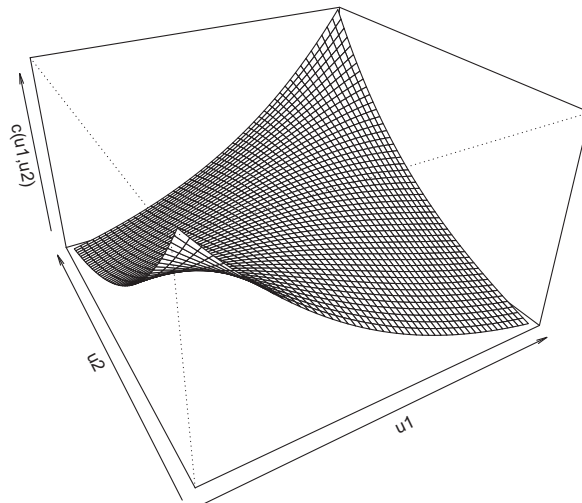


Figure 2.4 – Densité de la copule de Frank pour $\theta = 2$.

La copule de Gumbel est plus adéquate aux données qui représentent une forte dépendance à droite et une faible à gauche.

Définition 2.26 La copule de Gumbel appartient à la famille des copules Archimédiennes et son générateur est :

$$\varphi(u) = (-\ln(u))^\theta$$

avec $\theta > 1$ et $u \in]0, 1]$. La copule de Gumbel s'écrit donc sous la forme :

$$C(u_1, u_2) = \exp(-(\tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta)^{1/\theta})$$

où $\tilde{u} = -\ln u$.

La figure 2.5 correspond à la densité de la copule de Gumbel bidimensionnelle pour $\theta = 3$.

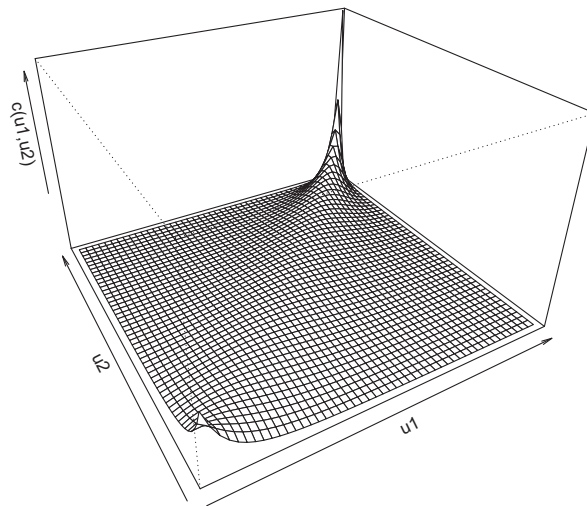


Figure 2.5 – Densité de la copule de Gumbel pour $\theta = 3$.

En utilisant la règle de l'Hôpital, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + u^{2^{1/\theta}}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2^{1/\theta} u^{2^{1/\theta} - 1}}{-1} \\ &= 2 - 2^{1/\theta}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^{2^{1/\theta}}}{u} \\ &= 0.\end{aligned}$$

La copule de Gumbel possède donc une dépendance de queue supérieure mais pas une dépendance de queue inférieure.

Le tau de Kendall de la copule de Gumbel s'écrit :

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left(\left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\theta}.\end{aligned}$$

Dans le tableau 2.2, nous donnons quelques propriétés de ces copules Archimédiennes bidimensionnelles.

| Copule archimédienne | Générateur | Copule bidimensionnelle | Tau de Kendall | Dépendance extrême |
|----------------------------|--|---|---|---------------------------------|
| Clayton ($\theta > 0$) | $u^{-\theta} - 1$ | $(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$ | $\frac{\theta}{\theta+2}$ | $(2^{-\frac{1}{\theta}}, 0)$ |
| Gumbel ($\theta \geq 1$) | $(-\ln(u))^\theta$ | $\exp(-(\tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta)^{1/\theta})$ | $1 - \frac{1}{\theta}$ | $(0, 2 - 2^{\frac{1}{\theta}})$ |
| Frank ($\theta \neq 0$) | $-\ln \frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ | $-\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$ | $(1 - \frac{4}{\theta} + 4 \frac{D_1(\theta)}{\theta})$ | $(0, 0)$ |

Tableau 2.2 – Caractéristiques des copules archimédiennes

2.5.3 Copules de Valeurs Extrêmes

Une autre classe particulière des copules est celle des valeurs extrêmes. Le nom "extreme value copula" suggère un lien entre la théorie des valeurs extrêmes et ses copules. Dans le cas bidimensionnel, Geoffroy [1958], Tiago de Olivera [1958] et Sibuya [1960] ont donné la forme générale des copules des valeurs extrêmes.

Définition 2.27 Une copule de Valeurs Extrêmes (VE) vérifie la relation suivante :

$$C(u_1^\kappa, u_2^\kappa) = C^\kappa(u_1, u_2)$$

pour tout réel κ positif.

Pour construire une distribution de valeurs extrêmes bidimensionnelle, il suffit ainsi de coupler des marges issues de loi de la théorie de valeurs extrêmes avec une copule VE.

Par exemple, la copule de Gumbel est une copule de valeurs extrêmes :

$$\begin{aligned} C(u_1^k, u_2^k; \theta) &= \exp\left(-\left[(-\ln u_1^k)^\theta + (-\ln u_2^k)^\theta\right]^{1/\theta}\right) \\ &= \exp\left(-\left(k^\theta \left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]\right)^{1/\theta}\right) \\ &= \left[\exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]^{1/\theta}\right)\right]^k \\ &= C^k(u_1, u_2; \theta). \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas le cas de la copule Farlie-Gumbel-Morgenstern :

$$\begin{aligned} C(u_1^k, u_2^k; \theta) &= u_1^k u_2^k + \theta u_1^k u_2^k (1 - u_1^k)(1 - u_2^k) \\ &= u_1^k u_2^k (1 + \theta - \theta u_1^k - \theta u_2^k + \theta u_1^k u_2^k) \\ &\neq u_1^k u_2^k (1 + \theta - \theta u_1 - \theta u_2 + \theta u_1 u_2)^k \\ &\neq C^k(u_1, u_2; \theta). \end{aligned}$$

2.5.4 Copules Archimax

On considère une nouvelle famille de copules introduite par Capéraà et al. [2000] qui englobe la plupart des familles connues des copules, notamment les copules Archimédiennes et toutes les copules de valeurs extrêmes. Cette nouvelle famille offre plus de flexibilité pour la modélisation.

Définition 2.28 *Une fonction bidimensionnelle est une copule Archimax si et seulement si elle est de la forme :*

$$C_{\varphi,A}(u_1, u_2) = \varphi^{-1} \left[(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) A \left(\frac{\varphi(u_1)}{\varphi(u_1) + \varphi(u_2)} \right) \right],$$

pour tout $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ avec :

1. $A : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ tel que $\max(t, t-1) \leq A(t) \leq 1$ pour tout $0 \leq t \leq 1$,
2. $\varphi : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction convexe, décroissante qui vérifie $\varphi(1) = 0$.

avec la convention suivante : $\varphi(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t)$ et $\varphi^{-1}(s)$ pour tout $s \geq \varphi(0)$.

Nous pouvons remarquer que l'ensemble des copules archimax $C_{\varphi,A}$ contient les copules de valeurs extrêmes ainsi que les copules archimédiennes. En effet si l'on pose $\varphi(t) = \ln(1/t)$, la copule $C_{\varphi,A}$ est alors une copule de valeurs extrêmes, c'est à dire :

$$C_{\varphi,A}(u_1, u_2) = C_A(u_1, u_2) = \exp \left[\ln(u_1 u_2) \frac{\ln u_1}{\ln(u_1 u_2)} \right]$$

Si on pose $A(t) = 1$. On retrouve la forme générale des copules Archimédiennes :

$$C_{\varphi,A}(u_1, u_2) = C_{\varphi}(u_1, u_2) = \varphi^{-1} ((\varphi(u_1) + \varphi(u_2))).$$

CHAPITRE 3

Estimation des copules

3.1 Introduction

Bien que la fonction copule a l'avantage de modéliser complètement la dépendance entre les variables, elle reste inconnue en pratique, d'où le besoin de l'estimer. Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques méthodes d'estimation de copules. Il existe plusieurs approches bien connues pour l'estimation d'une copule. Elles sont divisées en approches paramétriques, semi-paramétriques et non-paramétriques. Tout d'abord l'approche paramétrique impose un modèle spécifique pour la copule et les distributions marginales à la fois, habituellement nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance complète (FML) pour obtenir des estimateurs des paramètres (voir Shi & Louis [1995], Joe [1997] et Joe [2005]). Nous pouvons estimer conjointement les paramètres des distributions marginales et les paramètres de copules. Un inconvénient de cette méthode est qu'elle a besoin de calculs intensifs et parfois le problème d'optimisation est difficile à résoudre. Joe et Xu [1996] ont proposé une procédure en deux étapes appelée fonction d'inférence pour les marges (IFM). D'abord on estime les paramètres des marginales, ensuite les paramètres

de copules en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Tout comme la FML, l'inconvénient de cette méthode est qu'elle dépend des hypothèses de la distribution marginale. Cette approche est largement utilisée dans la pratique en raison de sa simplicité (pour plus de détails voir Oakes [1982], Romano [2002] et Joe [2005]). Notons que cette approche a été proposée en premier par Genest et al. [1995]. Deuxièmement, l'approche semi-paramétrique, suppose un modèle paramétrique pour la copule et non-paramétrique pour les distributions marginales. Par exemple la méthode CML (Canonical Maximum Likelihood) est semi-paramétrique avec les distributions marginales estimées par la distribution empirique et la méthode du maximum de vraisemblance est utilisée pour estimer le vecteur des paramètres de la copule paramétrique. Cette approche est étudiée par Oakes [1986], Genest & Rivest [1993], et Genest, Ghoudi & Rivest [1995]. Récemment, Kim, Silvapulle et Silvapulle [2007] comparent les méthodes semi-paramétrique et paramétrique pour l'estimation des copules. Finalement, l'approche non-paramétrique tient compte à la fois des modèles non-paramétrique pour la copule et pour les distributions marginales. Deheuvels [1979] suggère la distribution multidimensionnelle empirique pour estimer la fonction copule. Gijbels & Mielniczuk [1990] estiment une copule bidimensionnelle en utilisant une méthode basée sur le lissage à noyau. En outre ils suggèrent la méthode de réflexion afin de résoudre le problème du biais aux frontières. Plus récemment Chen & Huang [2007] proposent un estimateur bidimensionnel basé sur l'estimateur local linéaire. Pour les données i.i.d, Sancetta & Satchell [2004] développent un estimateur basé sur les polynômes de Bernstein de la fonction copule appelé par la suite estimateur de Bernstein. Dans ce qui suit, on présente les principales méthodes d'estimation de copules. On commence par les méthodes Full Maximum Likelihood et Inference Functions for Margins dans le cas paramétrique, ensuite la méthode Canonical Maximum Likelihood dans le cas semi-paramétrique et on termine par la méthode de copule empirique et les méthodes à noyau dans le cas non-paramétrique.

3.2 Estimation paramétrique

Lorsqu'il s'agit d'une estimation paramétrique d'une copule, on impose un modèle paramétrique pour la copule et pour les distributions marginales. Pour estimer ces paramètres il existe différentes méthodes. Dans cette section, on présente la méthode FML (Full Maximum likelihood) et la méthode IFM (Inference Functions for Margins).

3.2.1 Méthode FML (Full Maximum Likelihood)

Si la copule appartient à une famille paramétrique de copules, il est fréquent d'utiliser la méthode FML pour obtenir l'estimation des paramètres (voir Shih & Louis [1995]).

Supposons que nous ayons un échantillon $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ généré à partir d'une distribution H . Les fonctions de distribution marginales sont $F(x; \beta_1)$ et $G(y; \beta_2)$, où β_1 (resp. β_2) est un vecteur de paramètres. Nous supposons que les fonctions de densité marginales existent et seront notées $f(x; \beta_1)$ et $g(y; \beta_2)$. Nous supposons aussi que la fonction de copule C appartient à une famille paramétrique, par exemple une copule elliptique ou Archimédienne vue au Chapitre 2, et sera notée $C(., ., \alpha)$ où α est un vecteur de paramètres. Le vecteur de paramètres à estimer est $\theta = (\beta_1, \beta_2, \alpha)'$. La distribution conjointe peut être écrite comme suit :

$$H(x, y; \theta) = C(F(x; \beta_1), G(y; \beta_2); \alpha).$$

La fonction de densité conjointe est

$$h(x, y; \theta) = c(F(x; \beta_1), G(y; \beta_2); \alpha) f(x; \beta_1) g(y; \beta_2),$$

où c est la densité associée à C .

La fonction de log-vraisemblance est donnée par

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c(F(x_i; \beta_1), G(y_i; \beta_2); \alpha) + \sum_{i=1}^n (\log f(x_i; \beta_1) + \log g(y_i; \beta_2)).$$

En maximisant la fonction de log-vraisemblance par rapport à θ , nous obtenons l'estimateur FML,

$$\hat{\theta}_{FML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta),$$

où Θ est l'espace des paramètres.

Sous des conditions de régularité, on peut montrer que l'estimateur $\hat{\theta}_{FML}$ existe, qu'il est convergent, asymptotiquement efficace et vérifie la propriété de la normalité asymptotique :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{FML} - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(0, F^{-1}(\theta_0)),$$

avec $F(\theta_0)$ est l'information de Fisher et θ_0 est la vraie valeur de θ .

Le problème avec cette méthode est qu'elle peut engendrer des temps de calcul très longs dans le cas d'une grande dimension car elle nécessite d'estimer conjointement les paramètres des lois marginales et les paramètres de la structure de dépendance. De plus, l'estimation de la copule est sensible à une éventuelle erreur d'estimation des marginales car elles interviennent dans le calcul de la log-vraisemblance.

3.2.2 Méthode IFM (Inference Functions for Margins)

La méthode d'estimation FML estime conjointement les paramètres des distributions marginales et ceux de la fonction de copule, donc elle exige des calculs intensifs parce que l'estimation des paramètres des lois marginales et des paramètres de la copule se fait d'une façon simultanée. Joe et Xu [1996] ont proposé la méthode IFM (Inference Functions for Margins) et ont estimé les paramètres séparément. Cette méthode repose sur le fait que la représentation en copule permet de séparer les paramètres spécifiques des distributions marginales (β_1, β_2) de ceux de la structure de dépendance α , cette méthode se compose de deux étapes (voir Shih et Louis [1995]) :

– Estimation des paramètres des marginales

$$\hat{\beta}_1 = \arg \max_{\beta_1} \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \beta_1)$$

et

$$\hat{\beta}_2 = \arg \max_{\beta_2} \sum_{i=1}^n \log g(y_i; \beta_2).$$

– Estimation du vecteur des paramètres de la copule, compte tenu des estimations de l'étape précédente

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \log c \left(F(x_i; \hat{\beta}_1), G(y_i; \hat{\beta}_2); \alpha \right).$$

Cette méthode d'estimation est appelée par Shih et Louis [1995] "two-stage parametric ML method", alors que Joe et Xu [1996] utilisent le terme "Inference Functions for Margins".

L'estimateur IFM est défini par

$$\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2; \hat{\alpha})'.$$

Joe [1997] a montré que sous des conditions de régularité, l'estimateur IFM vérifie la propriété de la normalité asymptotique :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(0, \mathcal{G}(\theta_0))$$

où $\mathcal{G}(\theta_0)$ est la matrice de l'information de Godambe. Si on définit $g(\theta) = \left(\frac{\partial l_1}{\partial \beta_1}, \frac{\partial l_2}{\partial \beta_2} \right)$

où $l_1 = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \beta_1)$ et $l_2 = \sum_{i=1}^n \log g(y_i; \beta_2)$, alors la matrice de Godambe s'écrit : $\mathcal{G}(\theta_0) = D^{-1}M(D^{-1})^T$ où $D = E \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (g(\theta)^T) \right]$ et $M = [g(\theta)^T g(\theta)]$.

Cette méthode pourrait présenter l'avantage de reposer sur de calculs plus légers que ceux générés par la méthode du maximum de vraisemblance mais la détermination de

la matrice de Godambe peut s'avérer très complexe en raison des multiples calculs de dérivées. Là encore, la méthode est sensible à une éventuelle erreur de spécification des marginales pour la même raison que celle évoquée dans la méthode précédente.

3.3 Estimation semi-paramétrique

L'approche semi-paramétrique suppose un modèle paramétrique pour la copule, $C = C(\cdot, \cdot, \alpha)$, et non-paramétrique pour les distributions marginales. La méthode d'estimation semi-paramétrique que nous étudions ici est aussi connue sous le nom de pseudo maximum de vraisemblance (PML) ou encore de maximum de vraisemblance canonique.

3.3.1 Méthode CML (Canonical Maximum Likelihood)

Dans la méthode IFM, l'estimation du paramètre de la copule dépend de l'estimation des paramètres des distributions marginales. Genest et al. [1995] ont proposé la méthode de maximum de vraisemblance canonique (CML), qui ne fait aucune hypothèse sur les distributions marginales. En utilisant les fonctions de distributions empiriques, nous construisons un nouveau échantillon :

$$F_n(x_i) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{x_j \leq x_i\}}$$

$$G_n(y_i) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{y_j \leq y_i\}}.$$

Dans les équations ci-dessus, nous utilisons $n+1$, au lieu de n , pour éviter le problème d'absence de limites de la fonction de densité de la copule. Après la transformation, l'estimation du paramètre de la famille de la copule paramétrique est donné par :

$$\hat{\alpha} = \operatorname{arg\,max}_{\alpha} \sum_{i=1}^n \log c(F_n(x_i), G_n(y_i); \alpha).$$

Les temps de calculs sont raisonnables et le paramètre de la copule est estimé indépendamment de la spécification des lois marginales.

Kim, J.Silvapulle et P.Silvapulle [2007] ont comparé les méthodes paramétriques et semi-paramétriques pour l'estimation des copules, leur étude a conclu que :

- Les méthodes IFM et FML ne sont pas robustes contre les erreurs de spécification des distributions marginales.
- La méthode CML est conceptuellement presque la même que l'IFM, mais elle surmonte sa non robustesse contre une mauvaise spécification des distributions marginales.
- En termes de calculs statistiques et d'analyse des données, la CML est aussi facile à implémenter que la méthode IFM.
- Un avantage de plus pour la CML sur l'IFM, est que la CML n'impose pas de modèles paramétriques pour les distributions marginales.
- Leurs résultats de simulation montrent que l'estimateur de CML est meilleur que ceux de IFM et FML dans la plupart des situations pratiques.

3.4 Estimation non-paramétrique

Si le modèle paramétrique de la copule est mal spécifié, l'approche paramétrique et semi-paramétrique conduisent généralement à un mauvais ajustement aux données. Dans ce cas les méthodes d'estimation non paramétriques peuvent être une bonne alternative.

3.4.1 Copule empirique

Deheuvels [1979] a introduit les copules empiriques connue aussi sous l'appellation fonction empirique de dépendance, qui sont utilisées pour construire des tests non paramé-

triques pour l'indépendance. Celle-ci se base sur le rang des observations pour extraire ensuite la structure de dépendance. Aussi, Deheuvels [1981] a établi la convergence faible du processus de copule empirique ($\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C)$, où C_n est la copule empirique) dans le cas des marges indépendantes. Gaenssler et Stute [1987] ont étudié la convergence faible du processus de copule empirique dans l'espace Skorokhod $D([0, 1]^2)$. Van der Vaart et Wellner [1996] ont prouvé la convergence faible du processus de copule empirique dans $l^\infty([u, v]^2)$, pour certains $0 < u < v < 1$. Fermanian et al. [2004] ont prouvé la convergence faible de ce processus dans $l^\infty([0, 1]^2)$ sous de faibles hypothèses.

Supposons que nous ayons un échantillon $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ généré à partir d'une distribution \mathbb{H} . Nous construisons la fonction de répartition empirique comme suit :

$$\mathbb{H}_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \leq x, y_i \leq y\}}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

Soient \mathbb{F}_n et \mathbb{G}_n les distributions marginales qui lui sont associées :

$$\mathbb{F}_n(x) = \mathbb{H}_n(x, \infty) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

et

$$\mathbb{G}_n(y) = \mathbb{H}_n(\infty, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{y_i \leq y\}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

En utilisant la formule 2.2 dans le corollaire 2.5, la fonction copule empirique est définie par :

$$C_n(u, v) = \mathbb{H}_n(\mathbb{F}_n^{-1}(u), \mathbb{G}_n^{-1}(v)), \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

Cette copule est constante sur les pavés $([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}])$, alors sa forme explicite s'écrit sous la forme :

$$C_n(0, 0) = C_n(0, \frac{i}{n}) = C_n(\frac{j}{n}, 0), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{x_k \leq x_{(i)}, y_k \leq y_{(j)}\}}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

$$C_n(u, v) = \begin{cases} C_n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right) & \text{si } \frac{i-1}{n} \leq u < \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \leq v < \frac{j}{n} \\ 1 & \text{si } u = 1, v = 1. \end{cases}$$

On peut montrer que cette copule empirique satisfait plusieurs propriétés, la convergence asymptotique vers la vraie copule C en est un exemple.

3.4.2 Estimation de la copule C par les méthodes à noyau

Malgré les qualités de C_n , cet estimateur présente des discontinuités. Dans cette partie, nous présentons les estimateurs à noyau les plus utilisés en pratique et qui résoud ce problème.

Fermanian, Radulovic & Wegkamp [2004] ont proposé une version lisse notée SE (Smooth version of empirical copula) pour la copule empirique, à savoir :

$$\hat{C}_n^{(SE)}(u, v) = \hat{H}_n(\hat{F}_n^{-1}(u), \hat{G}_n^{-1}(v)).$$

où les quantités \hat{H}_n , \hat{F}_n , \hat{G}_n sont données par :

$$\hat{H}_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_n(x - X_i, y - Y_i),$$

$$\hat{F}_n(x) = \hat{H}_n(x, +\infty), \quad \hat{G}_n(y) = \hat{H}_n(+\infty, y),$$

avec

$$K_n(x, y) = K \left(\frac{x}{b_n}, \frac{y}{b_n} \right), \quad K(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y k(s, t) ds dt,$$

où $k(s, t)$ est la fonction densité du noyau bidimensionnelle, et b_n est un paramètre de lissage qui tend vers zéro quand n converge vers l'infini.

Cependant cet estimateur souffre du problème du biais, ce biais typique associé à l'estimation à noyaux est présent puisque le support d'une copule est borné sur $[0, 1]^2$. L'estimateur $\hat{C}_n^{(SE)}$ n'est pas convergent. Pour trouver solution à ce problème, plusieurs méthodes sont proposées. La première méthode est basée sur la transformation des données proposée par Gijbels, Omelka et Veraverbeke [2009]. La seconde méthode est l'estimateur de Chen et Huang [2007], qui ont proposé d'utiliser un noyau linéaire local afin de faire face aux biais près des frontières du carré unité.

Estimateur par transformation des données

Comme la fonction copule est invariante par transformations croissantes pour les marginales, il est possible de transformer les données originales en $X'_i = T_1(X_i)$ et $Y'_i = T_2(Y_i)$, où T_1 et T_2 sont des fonctions croissantes, puis utiliser (X'_i, Y'_i) au lieu des observations originales (X_i, Y_i) dans l'estimateur à noyau $\hat{C}_n^{(SE)}$. L'objectif de cette transformation est de corriger le problème du biais aux bornes de l'estimateur à noyau. Mais comme le choix direct des fonctions T_1 et T_2 est difficile, Gijbels, Omelka et Veraverbeke [2009] ont proposé la procédure suivante :

1. D'abord nous construisons des pseudo-observations uniformes

$$\hat{U}_i^{(E)} = \frac{n}{n+1} F_n(X_i) \quad \text{et} \quad \hat{V}_i^{(E)} = \frac{n}{n+1} G_n(Y_i)$$

2. Ensuite, pour une fonction de distribution donnée Φ , on pose $\hat{S}_i = \Phi^{-1}(\hat{U}_i^{(E)})$ et $\hat{T}_i = \Phi^{-1}(\hat{V}_i^{(E)})$.
3. Finalement, nous utilisons ces pseudo-observations transformées (\hat{S}_i, \hat{T}_i) à la place des observations originales (X_i, Y_i) dans l'estimateur de la distribution conjointe.

Dans le cas de noyau multiplicatif l'estimateur proposé s'écrit sous la forme :

$$\hat{C}_n^{(T)}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{\Phi^{-1}(u) - \hat{S}_i}{h_n} \right) \times K \left(\frac{\Phi^{-1}(v) - \hat{T}_i}{h_n} \right).$$

Notons que cette approche peut être étendue en considérant différentes transformations Φ , différents noyaux K ou différents paramètres de lissages h_n .

L'avantage de cet estimateur est qu'il n'est pas affecté par les distributions marginales. Le calcul du biais montre que, si nous choisissons Φ , de sorte que $\frac{(\Phi')^2}{\Phi}$ soit bornée, nous corrigeons le problème du biais au niveau des coins qui est présent si nous avons estimé directement la distribution conjointe en utilisant les pseudo-observations. La condition ci-dessus est satisfaite, par exemple, par la fonction de distribution cumulative normale Φ .

Estimateur local linéaire

Chen & Huang [2007] ont construit leur estimateur de la manière suivante. Dans la première étape, ils estiment les marginales par :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{b_{n1}}\right),$$

et

$$\hat{G}_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y - Y_i}{b_{n2}}\right),$$

avec K étant l'intégrale d'une fonction à noyau k symétrique délimitée sur $[-1, 1]$, b_{n1} et b_{n2} sont des paramètres de lissage. Dans la seconde étape, les pseudo-observations $\hat{U}_i = \hat{F}_n(X_i)$ et $\hat{V}_i = \hat{G}_n(Y_i)$ sont utilisées pour estimer la fonction de distribution conjointe pour les non observées $F(X_i)$ et $G(Y_i)$, ce qui donne l'estimation de la copule C .

Pour éviter le problème du biais au niveau des bords, Chen & Huang [2007] ont suggéré d'utiliser une version locale linéaire pour le noyau k :

$$k_{u,h}(x) = \frac{k(x)[a_2(u, h) - a_1(u, h)x]}{a_0(u, h)a_2(u, h) - a_1^2(u, h)} \mathbf{1}_{\left\{\frac{u-1}{u} < x < \frac{u}{h}\right\}}$$

où

$$a_l(u, h) = \int_{(u-1)/h}^{u/h} t^l k(t) dt, \quad \text{pour } l = 0, 1, 2.$$

Finalement, l'estimateur local linéaire de la copule est donné par :

$$\hat{C}_n^{(LL)}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{u, h_n} \left(\frac{u - \hat{U}_i}{h_n} \right) K_{v, h_n} \left(\frac{v - \hat{V}_i}{h_n} \right)$$

où

$$K_{u, h}(x) = \int_{-\infty}^x k_{u, h}(s) ds.$$

Chen & Huang [2007] ont dérivé les expressions pour le biais, la variance et l'erreur quadratique moyenne asymptotique de cet estimateur et ont montré qu'un choix convenable des constantes de lissage $h = h_n$ dans la seconde étape peut considérablement réduire la variance et l'erreur quadratique moyenne de l'estimation de la copule.

Par ailleurs leurs expériences de Monte Carlo ont montré que l'estimateur $\hat{C}_n^{(LL)}$ est moins sensible au choix des constantes b_{n1} et b_{n2} utilisées pour lisser les marginales dans la première étape.

Mais l'inconvénient théorique de l'estimateur $\hat{C}_n^{(LL)}$ est que pour de nombreuses familles de copules (par exemple : Clayton, Gumbel, Gaussienne, Student) le biais de l'estimateur dans quelques coins de l'unité carrée est seulement d'ordre $O(h_n)$ comparé à $O(h_n^2)$ qui est l'ordre du biais à l'intérieur.

Le problème est causé par l'absence de limites des dérivées partielles du second ordre pour de nombreuses familles de copules. Bien que les modèles paramétriques avec des densités unidimensionnelles non bornées sont plutôt rares dans les modèles paramétriques standard, les familles de copules avec de densités non bornées sont très fréquentes. À titre de référence, nous pouvons prendre la densité normale bidimensionnelle, qui est généralement censée avoir un bon comportement comme modèle. Mais la densité de la copule normale résultante est sans limite aux bornes.

Le biais de l'estimateur $\hat{C}_n^{(LL)}$ dépend des termes de la forme $h^2 C_{uu}(u, v)$, $h^2 C_{uv}(u, v)$, et $h^2 C_{vv}(u, v)$, où $C_{uu}(u, v)$, $C_{uv}(u, v)$, et $C_{vv}(u, v)$ sont les dérivées partielles du second

ordre de C , c'est-à-dire : $C_{uu}(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u^2}$, de même pour $C_{uv}(u, v)$ et $C_{vv}(u, v)$.

Le problème est que pour de nombreuses familles de copules, les dérivées partielles du second ordre ne sont pas bornées aux coins. En effet, on peut montrer que pour plusieurs familles de copules paramétriques :

$$C_{uu}(u, v) = O\left(\frac{1}{u(1-u)}\right), \quad C_{vv}(u, v) = O\left(\frac{1}{v(1-v)}\right)$$

$$C_{uv}(u, v) = O\left(\frac{1}{\sqrt{uv(1-u)(1-v)}}\right).$$

Afin de maintenir le biais borné, Gijbels, Omelka et Veraverbeke [2009] proposent une amélioration de l'estimateur $\hat{C}_n^{(LL)}$ donnée par :

$$\hat{C}_n^{(LLS)}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{u, h_n} \left(\frac{u - \hat{U}_i}{b(u)h_n} \right) K_{v, h_n} \left(\frac{v - \hat{V}_i}{b(v)h_n} \right).$$

avec $b(u) = \min(\sqrt{u}, \sqrt{1-u})$, où le paramètre de lissage h_n est remplacé par une fonction de lissage $b(u)h_n$ qui réduit la valeur du paramètre de lissage au niveau des coins de l'unité carrée.

3.4.3 Estimation de la densité de copule par les méthodes à noyau

Dans cette sous-section, nous présentons deux méthodes d'estimation de la densité de copule. La première approche est proposée dans les travaux de Gijbels et Mielniczuk [1990]. Ils prennent soins de la correction du biais aux frontières à travers l'augmentation des données obtenues en réfléchissant les données originales par rapport aux bords et les coins du carré de l'unité. La seconde approche est l'oeuvre de Chen [1999, 2000] basée sur le noyau bêta. Une autre approche pour estimer la densité de copule est basée sur les polynômes de Bernstein et fera l'objet du chapitre 4.

Méthode de l'image miroir

L'idée de cette méthode, développée par Deheuvels & Hominal [1979], et Schuster [1985] pour les densités unidimensionnelles f , est d'ajouter certaines masses manquantes en reflétant l'échantillon par rapport aux bords. Ils se concentraient sur le cas où les variables sont positives, c'est-à-dire dont le support est $[0, \infty)$.

Formellement et dans sa forme la plus simple, la méthode consiste à remplacer $K(x - X_i)$ par $K(x - X_i) + K(x + X_i)$. L'estimateur de la densité f sera ensuite.

$$\hat{f}_{h_n}(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \left\{ K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) + K\left(\frac{x + X_i}{h_n}\right) \right\}.$$

Dans le cas des densités dont le support est $[0, 1] \times [0, 1]$, la non-cohérence peut être corrigée sur les bords, mais le taux de convergence du biais restera $O(h_n)$ sur les bords, ce qui est plus large que le taux habituel $O(h_n^2)$ obtenu à l'intérieur. Le seul cas où le taux de convergence habituel est obtenu sur les bords est quand la dérivée de la densité est égale à zéro sur ces sous-ensembles.

En ce qui concerne les copules, au lieu d'utiliser seulement les "pseudo-observations" $(\hat{U}_i, \hat{V}_i) = (\hat{F}_n(X_i), \hat{G}_n(Y_i))$, on ajoute des observations supplémentaires, à savoir, $(\pm\hat{U}_i, \pm\hat{V}_i)$, $(\pm\hat{U}_i, 2 - \hat{V}_i)$, $(2 - \hat{U}_i, \pm\hat{V}_i)$, $(2 - \hat{U}_i, 2 - \hat{V}_i)$, pour résoudre le problème du biais aux frontières. L'estimateur par image miroir de la copule est donné par :

$$\hat{C}_n^{(MR)}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^9 \left[K\left(\frac{u - \hat{U}_i^{(l)}}{h_n}\right) - K\left(\frac{-\hat{U}_i^{(l)}}{h_n}\right) \right] \\ \times \left[K\left(\frac{v - \hat{V}_i^{(l)}}{h_n}\right) - K\left(\frac{-\hat{V}_i^{(l)}}{h_n}\right) \right].$$

L'estimateur de type miroir fait face au même problème que celui de l'estimateur linéaire local à savoir le biais au niveau des bords. Pour éviter ce problème, Gijbels, Omelka et

Veraverbeke [2009] ont proposé le nouvel estimateur $\hat{C}_n^{(MRS)}$ comme suit :

$$\hat{C}_n^{(MRS)}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^9 \left[K \left(\frac{u - \hat{U}_i^{(l)}}{b(u)h_n} \right) - K \left(\frac{-\hat{U}_i^{(l)}}{b(u)h_n} \right) \right] \\ \times \left[K \left(\frac{v - \hat{V}_i^{(l)}}{b(v)h_n} \right) - K \left(\frac{-\hat{V}_i^{(l)}}{b(v)h_n} \right) \right].$$

Méthode à noyau Bêta

L'idée de lissage du noyau bêta a été introduite par Brown et Chen [1999] et Chen [1999, 2000] pour l'estimation non paramétrique des courbes de régression et des densités univariées à support compact, respectivement.

Pour éliminer le biais au bord de l'estimateur à noyau standard et suite à une idée de Harrell et Davis [1982], Chen [1999, 2000] ont introduit l'estimateur à noyau bêta comme un estimateur de la fonction de densité avec support compact connu $[0, 1]$:

$$\hat{f}_{h_n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K \left(X_i, \frac{x}{h_n} + 1, \frac{1-x}{h_n} + 1 \right),$$

où $K(\cdot, \alpha, \beta)$ représente la densité de la distribution bêta avec paramètres α et β ,

$$K(x, \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad x \in [0, 1],$$

où

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

La principale difficulté lorsqu'on travaille avec cet estimateur est le manque d'une simple méthode pour choisir le paramètre de lissage h_n .

Le noyau bêta présente deux avantages principaux. D'abord, il peut correspondre au support compact de l'objet à estimer. Deuxièmement, il a une forme flexible qui change d'une manière naturelle quand on s'éloigne des bords. En conséquence, les estimateurs à noyau bêta sont naturellement sans biais aux bords.

L'estimateur à noyau bêta pour la densité de copule est donné par :

$$\hat{c}_{h_n}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K \left(X_i, \frac{u}{h_n} + 1, \frac{1-u}{h_n} + 1 \right) \times K \left(Y_i, \frac{v}{h_n} + 1, \frac{1-v}{h_n} + 1 \right).$$

Les propriétés asymptotiques de cet estimateur ont été étudiées par Charpentier, Fermandian et Scaillet [2006]). Ainsi, ils ont montré la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{c}_{h_n}(u, v)$.

$$(nh_n^{\kappa'})^{1/2} [\hat{c}_{h_n}(u, v) - c(u, v)] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma(u, v)^2)$$

$$nh_n^{\kappa'} \rightarrow \infty, \text{ et } h_n \rightarrow 0$$

où κ' dépend de la position et où $\sigma(u, v)^2$ est proportionnelle à $c(u, v)$.

CHAPITRE 4

Estimateur de Bernstein

4.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons présenté différentes méthodes d'estimation de la distribution et de la densité de copule. Les méthodes paramétriques et semi-paramétriques sont simples et souvent utilisées pour modéliser la dépendance des données en pratique. Cependant, elles dépendent de la copule paramétrique et ne sont pas robustes à une mauvaise spécification de cette copule. Plusieurs travaux sont consacrés aux tests d'adéquation des copules, par exemple. Ces méthodes choisissent la meilleure copule parmi des familles riches mais qui ne couvrent pas toutes les formes de dépendance. Les méthodes non-paramétriques ne dépendent pas d'une famille de copule spécifique et se basent sur les données pour décider leur forme de dépendance. Dans le chapitre 3, nous avons vu la copule empirique et l'estimateur à noyau pour la distribution de copule. Nous avons vu aussi deux méthodes d'estimation pour la densité de copule : méthode de l'image miroir et l'approche par le noyau bêta. Dans ce chapitre, nous allons étudier une autre méthode d'estimation de la densité de copule basée sur les polynômes de Bernstein.

Basés sur le théorème de Weierstrass, les polynômes de Bernstein ont été considérés par Lorentz [1953] pour prouver que toute fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ peut être approximée par un polynôme. Pour les fonctions de densité, l'estimation en utilisant les polynômes de Bernstein fut suggérée par Vitale [1975] et Grawronski & *Stadtmüller* [1981] avec une légère modification. Tenbusch [1994] a étudié l'estimateur de Bernstein pour les fonctions de densité bidimensionnelles et Bouezmarni & Rolin [2007] ont démontré la convergence de l'estimateur de Bernstein pour les fonctions de densité de probabilités non bornées. Kakizawa [2004] et Kakizawa [2006] utilisent les polynômes de Bernstein pour estimer la densité et la fonction de densité spectrale respectivement. Tenbusch [1997] et Brown & Chen [1999] proposent des estimateurs des fonctions de régression basés sur le polynôme de Bernstein. Dans le cadre Bayésien, ces polynômes ont été explorés par Petrone [1999a], Petrone [1999b], Petrone & Wasserman [2012] et Ghosal [2001].

La fonction de copule est définie sur le support $[0, 1]^2$, donc l'estimateur à noyau classique souffre de problème du biais aux bornes. L'estimateur de Bernstein est un estimateur naturel puisque son support est exactement $[0, 1]^2$ et qui ne souffre pas de problème de biais. Aussi, la majorité des copules ne sont pas nécessairement bornées aux bornes. Récemment, Bouezmarni & El Ghouch & Taamouti [2013] ont montré la consistance de cet estimateur quand la densité de copule est non bornée aux bornes. Ils ont aussi montré la performance de cet estimateur en le comparant avec plusieurs autres estimateurs.

L'utilisation de l'estimateur de Bernstein pour les densités de copules fut proposée en premier par Sancetta & Satchell [2004] pour des données i.i.d. L'estimateur de la densité de copule a été étudié par Bouezmarni, Rombouts & Taamouti [2010] pour les séries temporelles. Cependant, ces deux références supposent que les distributions marginales sont connues.

4.2 Propriétés asymptotiques de l'estimateur de Bernstein

Ma contribution est d'étudier les propriétés asymptotiques de cet estimateur mais avec les marginales estimées. On commence par définir l'estimateur non-paramétrique de la distribution de la copule de Bernstein :

$$\hat{C}_{m,n}(u, v) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_n \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) p_{k,m}(u) p_{l,m}(v), \quad (4.1)$$

où $p_{k,m}$ est la probabilité binomiale de paramètres (m, u) , c-à-d.

$$p_{k,m}(u) = \binom{m}{k} u^k (1-u)^{m-k}$$

et C_n est l'estimateur de la copule empirique. Les propriétés asymptotiques de cet estimateur ont été étudiées par Janssen & Swanepoel & Veraverbeke [2012]. Ils ont montré la convergence presque sûre, la normalité asymptotique ainsi que le biais et la variance asymptotiques de l'estimateur de la copule de Bernstein. Par des simulations, ils ont montré la performance de cet estimateur.

L'estimateur non-paramétrique de la densité de la copule de Bernstein s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{c}_{m,n}(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \hat{C}_{m,n}(u, v) \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_n \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) p'_{k,m}(u) p'_{l,m}(v). \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'estimateur de la densité de la copule de Bernstein peut aussi se réécrire sous la forme :

$$\hat{c}_{m,n}(u, v) = m^2 \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_n(B_{kl}) p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v) \quad (4.3)$$

où $C_n(B_{kl})$ est définie par la formule :

$$C_n(B_{kl}) = C_n\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l+1}{m}\right) - C_n\left(\frac{k}{m}, \frac{l+1}{m}\right) - C_n\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l}{m}\right) + C_n\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right), \quad (4.4)$$

avec

$$B_{kl} = \left] \frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \right] \times \left] \frac{l}{m}, \frac{l+1}{m} \right].$$

Notations :

Par la suite, on notera par :

1. $a_n = O(b_n) \iff$ il existe une constante cst et un entier N tel que $|\frac{a_n}{b_n}| < cst$ pour tout $n \geq N$.
2. $a_n = o(b_n) \iff |\frac{a_n}{b_n}| \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini.
3. $a_n = O_p(b_n) \iff$ il existe une constante cst tel que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier N tel que $\mathbb{P}|\frac{a_n}{b_n}| > \epsilon$ pour tout $n \geq N$.
4. $a_n = o_p(b_n) \iff |\frac{a_n}{b_n}|$ converge en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini.
- 5.

$$C_u(B_{kl}, U_i) = \alpha_{kl}^u \left[\mathbf{1}_{\{U_i \leq \frac{k+1}{m}\}} - \frac{k+1}{m} \right] + \beta_{kl}^u \left[\mathbf{1}_{\{U_i \leq \frac{k}{m}\}} - \frac{k}{m} \right]$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_{kl}^u &= C_u\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l+1}{m}\right) - C_u\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l}{m}\right) \\ \beta_{kl}^u &= C_u\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) - C_u\left(\frac{k}{m}, \frac{l+1}{m}\right) \end{aligned}$$

De même

$$C_v(B_{kl}, V_i) = \alpha_{kl}^v \left[\mathbf{1}_{\{V_i \leq \frac{l+1}{m}\}} - \frac{l+1}{m} \right] + \beta_{kl}^v \left[\mathbf{1}_{\{V_i \leq \frac{l}{m}\}} - \frac{l}{m} \right]$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_{kl}^v &= C_v\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l+1}{m}\right) - C_v\left(\frac{k}{m}, \frac{l+1}{m}\right) \\ \beta_{kl}^v &= C_v\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) - C_v\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l}{m}\right). \end{aligned}$$

avec $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ sont des vecteurs aléatoires indépendants de fonction de distribution C et de marges uniformes sur $[0, 1]$. C_u (resp. C_v) désigne la dérivée partielle de la copule C selon u (resp. selon v).

4.2.1 Biais asymptotique

Nous commençons par étudier le biais asymptotique de l'estimateur de Bernstein $\hat{c}_{m,n}$. Pour cela, on considère la fonction suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{c}_m(u, v) &= \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) p'_{k,m}(u) p'_{l,m}(v) \\ &= m^2 \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C(B_{kl}) p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v)\end{aligned}$$

avec

$$C(B_{kl}) = C\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l+1}{m}\right) - C\left(\frac{k}{m}, \frac{l+1}{m}\right) - C\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l}{m}\right) + C\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right).$$

Le lemme suivant sera utile pour le calcul du biais asymptotique de l'estimateur de la copule de densité $\hat{c}_{n,m}$

Lemme 4.1 *Supposons que C est continûment dérivable. Soit $\hat{c}_{m,n}$ l'estimateur de la densité de la copule de Bernstein.*

On a :

$$\hat{c}_{m,n}(u, v) - \tilde{c}_m(u, v) = \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i + O_p(mn^{-3/4} \xi_n)$$

où $\xi_n = (\log n)^{1/2} (\log \log n)^{1/4}$ et les Y_i sont des variables aléatoires i.i.d données par :

$$Y_i = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} (\mathbf{1}_{\{(U_i, V_i) \in B_{kl}\}} - C(B_{kl}) - C_u(B_{kl}, U_i) - C_v(B_{kl}, V_i)) p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v).$$

Preuve :

On remarque que :

$$\hat{c}_{m,n}(u, v) - \tilde{c}_m(u, v) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m \left[C_n \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) - C \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \right] p'_{k,m}(u) p'_{l,m}(v). \quad (4.5)$$

D'après Stute [1984], on a :

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{1}_{\{U_i \leq u, V_i \leq v\}} - C_u(u, v) [\mathbf{1}_{\{U_i \leq u\}} - u] - C_v(u, v) [\mathbf{1}_{\{V_i \leq v\}} - v] \right\} + O_p(n^{-3/4} \xi_n),$$

Donc,

$$\begin{aligned} \hat{c}_{m,n}(u, v) - \tilde{c}_m(u, v) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m \left(\mathbf{1}_{\{U_i \leq \frac{k}{m}, V_i \leq \frac{l}{m}\}} - C \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \right) p'_{k,m}(u) p'_{l,m}(v) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_u \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \left[\mathbf{1}_{\{U_i \leq \frac{k}{m}\}} - \frac{k}{m} \right] p'_{k,m}(u) p'_{l,m}(v) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_v \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \left[\mathbf{1}_{\{V_i \leq \frac{l}{m}\}} - \frac{l}{m} \right] p'_{k,m}(u) p'_{l,m}(v) \right\} \\ &\quad + O_p(mn^{-3/4} \xi_n). \end{aligned}$$

Pour le dernier terme on a utilisé le fait que $\sum_{k=0}^m |p'_{k,m}(u)| = \frac{1}{u(1-u)} p_{k,m}(u)(k - mu)$,

ensuite la formule de Stirling, $\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+1/2}$, pour montrer que $\sum_{k=0}^m |p'_{k,m}(u)| = O(m^{1/2})$.

Maintenant, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m \left(\mathbf{1}_{\{U_i \leq \frac{k}{m}, V_i \leq \frac{l}{m}\}} - C \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \right) p'_{k,m}(u) p'_{l,m}(v) &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} \left(\mathbf{1}_{\{(U_i, V_i) \in B_{kl}\}} - C(B_{kl}) \right) \\ &\quad p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v), \end{aligned}$$

que

$$\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_u \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \left[\mathbf{1}_{\{U_i \leq \frac{k}{m}\}} - \frac{k}{m} \right] p'_{k,m}(u) p'_{l,m}(v) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_u(B_{kl}, U_i) p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v),$$

et que

$$\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_v \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \left[\mathbf{1}_{\{V_i \leq \frac{l}{m}\}} - \frac{l}{m} \right] p'_{k,m}(u) p'_{l,m}(v) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_v(B_{kl}, V_i) p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v).$$

Ce qui conclut la preuve de lemme. □

La proposition suivante établit le biais asymptotique de l'estimateur de la densité de la copule $\hat{c}_{m,n}$.

Proposition 4.2 *Supposons que c est deux fois continuellement dérivable. Soit $\hat{c}_{m,n}$ l'estimateur de la densité de la copule de Bernstein défini dans la formule (4.3). Si m tend vers l'infini, alors*

$$\mathbb{E}(\hat{c}_{m,n}(u, v)) = c(u, v) + m^{-1}\gamma(u, v) + o(m^{-1}) + O(mn^{-3/4}\xi_n),$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma(u, v) = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{dc(u, v)}{du}(1 - 2u) + \frac{d^2c(u, v)}{du^2}u(1 - u) \right. \\ & \left. + \frac{dc(u, v)}{dv}(1 - 2v) + \frac{d^2c(u, v)}{dv^2}v(1 - v) \right\}. \end{aligned}$$

Preuve :

D'après Bouezmarni, Rombouts & Taamouti [2010], on a :

$$\tilde{c}_m(u, v) = c(u, v) + m^{-1}\gamma(u, v) + o(m^{-1}).$$

Montrons que $\mathbb{E}(\hat{c}_{m,n}(u, v) - \tilde{c}_m(u, v)) = O(mn^{-3/4}\xi_n)$. En effet d'après le lemme 4.1, on

a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{c}_{m,n}(u, v) - \tilde{c}_m(u, v)) &= \mathbb{E} \left(\frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right) + O(mn^{-3/4}\xi_n) \\ &= m^2 \mathbb{E}(Y_1) + O(mn^{-3/4}\xi_n), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} (\mathbf{1}_{\{(U_1, V_1) \in B_{kl}\}} - C(B_{kl}) - C_u(B_{kl}, U_1) - C_v(B_{kl}, V_1)) p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} \mathbb{E} (\mathbf{1}_{\{(U_1, V_1) \in B_{kl}\}} - C(B_{kl}) - C_u(B_{kl}, U_1) - C_v(B_{kl}, V_1)) p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v).\end{aligned}$$

Or :

$$\mathbb{E} (\mathbf{1}_{\{(U_1, V_1) \in B_{kl}\}}) = P((U_1, V_1) \in B_{kl}) = C(B_{kl}).$$

Aussi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C_u(B_{kl}, U_1)) &= \mathbb{E} \left\{ \alpha_{kl}^u \left[\mathbf{1}_{\{U_1 \leq \frac{k+1}{m}\}} - \frac{k+1}{m} \right] + \beta_{kl}^u \left[\mathbf{1}_{\{U_1 \leq \frac{k}{m}\}} - \frac{k}{m} \right] \right\} \\ &= \alpha_{kl}^u \left[P \left(U_1 \leq \frac{k+1}{m} \right) - \frac{k+1}{m} \right] + \beta_{kl}^u \left[P \left(U_1 \leq \frac{k}{m} \right) - \frac{k}{m} \right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

puisque U_1 est uniforme sur $[0, 1]$. De même, puisque V_1 est une variable uniforme sur $[0, 1]$, on peut montrer que :

$$\mathbb{E}(C_v(B_{kl}, V_1)) = 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1) &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} [C(B_{kl}) - C(B_{kl})] p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v) \\ &= 0,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathbb{E}(\hat{c}_{m,n}(u, v)) = \tilde{c}_m(u, v) + O(mn^{-3/4} \xi_n).$$

□

4.2.2 Variance asymptotique

La proposition suivante établit la variance asymptotique de l'estimateur de la densité de la copule de Bernstein $\hat{c}_{m,n}$.

Proposition 4.3 *Soit \hat{c} l'estimateur de la densité de la copule de Bernstein défini en (4.3). Si $\frac{m}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors pour $(u, v) \in (0, 1)^2$, on a :*

$$\text{Var}(\hat{c}_{m,n}(u, v)) = \frac{n^{-1}m}{4\pi} \frac{c(u, v)}{(u(1-u)v(1-v))^{1/2}} + o(n^{-1}m) + O(mn^{-3/4}\xi_n).$$

Preuve :

D'après le lemme 4.1, on peut réécrire $\hat{c}_{m,n}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{c}_{m,n}(u, v) &= \tilde{c}_m(u, v) + \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(1)} + \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(2)} + \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(3)} \\ &+ O_p(mn^{-3/4}\xi_n) \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec $\tilde{c}_m(u, v)$ la partie déterministique,

$$Y_i^{(1)} = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{1}_{\{(U_i, V_i) \in B_{kl}\}} p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v),$$

$$Y_i^{(2)} = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_u(B_{kl}, U_i) p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v),$$

et

$$Y_i^{(3)} = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_v(B_{kl}, V_i) p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v).$$

Commençons par calculer la variance du terme $Y_i^{(1)}$. D'abord, on note que $(\mathbf{1}_{\{(U_i, V_i) \in B_{kl}\}})$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et de variance $p - p^2$.

où

$$p \equiv C(B_{kl}) = \int_{k/m}^{(k+1)/m} \int_{l/m}^{(l+1)/m} c(u, v) dudv.$$

D'après Sancetta & Satchell [2004] on a :

$$p = \frac{c\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right)}{m^2} + o(m^{-2}).$$

Puisque $p \leq 1$, il s'ensuit que $p^2 = o(p)$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(Y_i^{(1)}\right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} \text{Var}\left(\mathbf{1}_{\{(U_i, V_i) \in B_{kl}\}}\right) p_{k, m-1}^2(u) p_{l, m-1}^2(v) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} \left\{ \frac{c\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right)}{m^2} + o(m^{-2}) \right\} p_{k, m-1}^2(u) p_{l, m-1}^2(v). \end{aligned}$$

D'après Bouezmarni, Rombouts & Taamouti [2010], on a :

$$\text{Var}\left(\frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(1)}\right) = \frac{n^{-1}m}{4\pi} \frac{c(u, v)}{(u(1-u)v(1-v))^{1/2}} + o(n^{-1}m).$$

Montrons que les deux termes $Y_i^{(2)}$ et $Y_i^{(3)}$ sont d'ordre $O_p(n^{-1/2}m^{1/4})$ et qu'ils sont alors négligeables par rapport au terme $Y_i^{(1)}$. En effet,

$$\begin{aligned} C_u\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l+1}{m}\right) - C_u\left(\frac{k+1}{m}, \frac{l}{m}\right) &= \int_{l/m}^{(l+1)/m} c\left(\frac{k+1}{m}, v\right) dv \\ &= \int_{l/m}^{(l+1)/m} c\left(\frac{k}{m}, v\right) dv + O(m^{-2}) \\ &= \frac{1}{m}c\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) + \int_{l/m}^{(l+1)/m} c_1\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) \left(v - \frac{l}{m}\right) dv \\ &\quad + O(m^{-2}) \\ &= \frac{1}{m}c\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) + O(m^{-2}). \end{aligned}$$

De même pour

$$C_u\left(\frac{k}{m}, \frac{l+1}{m}\right) - C_u\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) = \frac{1}{m}c\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) + O(m^{-2}).$$

Donc, si on ignore le terme négligeable $O(m^{-2})$ et si on note par $A = \sup_{u,v} |c(u,v)|$, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(2)} &\approx \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{m} c\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) \mathbf{1}_{\{\frac{k}{m} < U_i \leq \frac{k+1}{m}\}} p_{k,m-1}(u) p_{l,m-1}(v) \right) \\ &\leq A \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{1}_{\{\frac{k}{m} < U_i \leq \frac{k+1}{m}\}} p_{k,m-1}(u) \right) \\ &= AB_{n,m}(u) \end{aligned}$$

De la même manière $B_{n,m}(u)$ désigne l'estimateur de Bernstein de la densité univariée. D'après Vitale[1973], la variance de $B_{n,m}$ est d'ordre $O(n^{-1}m^{1/2})$. Donc,

$$Var\left(\frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(2)}\right) = O(n^{-1}m^{1/2}).$$

Par conséquent, le terme $\frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(2)}$ est négligeable par rapport à $\frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(1)}$. De la même manière on peut montrer que le terme $\frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(3)}$ est négligeable par rapport à $\frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(1)}$, ce qui clôt la démonstration.

4.2.3 Sélection du paramètre de lissage

Le paramètre de lissage joue un rôle crucial dans la performance de l'estimation non-paramétrique en général. Pour l'estimateur de Bernstein, on remarque que le biais diminue avec le paramètre de lissage m , voir la Proposition 4.2. Cependant pour une grande valeur du paramètre m la variance augmente. Ce qui nous ramène à calculer puis minimiser l'erreur quadratique moyenne intégrée asymptotique (AMISE) de l'estimateur de copule de Bernstein pour sélectionner le paramètre de lissage optimal.

Proposition 4.4 Soit \hat{c} l'estimateur de la densité de la copule de Bernstein défini en (4.3). Si $m \rightarrow \infty$ tel que $\frac{m}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors

$$AMISE(\hat{c}_{m,n}) = m^{-2} \int \int \gamma^2(u, v) dudv + \frac{n^{-1}m}{4\pi} \int \int \frac{c(u, v)}{(u(1-u)v(1-v))^{1/2}} dudv \quad (4.7)$$

où γ est définie dans la proposition 4.2.

Preuve :

Évidente d'après la proposition 4.2 et la proposition 4.3.

Le paramètre de lissage, m_{opt} , qui minimise AMISE est donc donné par

$$m_{opt} = n^{1/3} \left(\frac{8\pi \int \int \gamma^2(u, v) dudv}{\int \int \frac{c(u, v)}{(u(1-u)v(1-v))^{1/2}} dudv} \right)^{1/3}.$$

En remplaçant l'expression de m_{opt} dans la formule (4.7) on trouve la formule de l'AMISE optimale, $AMISE^*$,

$$AMISE^*(\hat{c}_{m,n}) = 3(8\pi)^{-2/3} n^{-2/3} \left(\int \int \frac{c(u, v)}{(u(1-u)v(1-v))^{1/2}} dudv \right)^{2/3} \left(\int \int \gamma^2(u, v) dudv \right)^{1/3}.$$

On remarque que le paramètre de lissage m_{opt} ne peut pas être utilisé en pratique puisque il dépend de la densité de copule c . Une méthode pratique pour résoudre ce problème est d'utiliser une copule paramétrique de référence, par exemple la copule de Frank. Ensuite utiliser une des méthodes vues dans le chapitre 3 pour estimer les paramètres de cette copule paramétrique, Finalement, remplacer la densité de copule dans l'expression de m_{opt} par cette copule paramétrique. Une autre méthode, utilisée par Bouezmarni & El Ghouch & Taamouti [2013] est celle basée sur les validations croisées, voir leur papier pour plus de détails.

4.2.4 Normalité asymptotique

Dans cette partie nous allons introduire la normalité asymptotique qui sera utile pour les tests d'hypothèses et la construction des intervalles de confiance.

Proposition 4.5 *Supposons que c est deux fois continuellement dérivable. Soit $\hat{c}_{m,n}$ l'estimateur de la densité de la copule de Bernstein défini dans la formule (4.3). Si n tend vers l'infini, pour $(u, v) \in (0, 1)^2$, on a alors :*

$$n^{1/2}m^{-1/2} \left(\frac{\hat{c}_{m,n}(u, v) - \tilde{c}_m(u, v)}{\sqrt{V(u, v)}} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

où

$$V(u, v) = \frac{1}{4\pi} \frac{c(u, v)}{(u(1-u)v(1-v))^{1/2}}.$$

Preuve :

D'après l'expression 4.6, on a

$$\hat{c}_{m,n}(u, v) = \tilde{c}_m(u, v) + \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(1)} + o_p(n^{-1}m).$$

Donc, il suffit de montrer la normalité de $n^{1/2}m^{-1/2} \left\{ \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^{(1)} \right\} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n Z_i$. Pour cela, on utilise le théorème de Lyapunov. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|Z_i|^3)}{(n \operatorname{var}(Z_i))^{3/2}} &\leq \|Z_i\|_{\infty} (n \operatorname{var}(Z_i))^{-1/2} \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Donc, $n^{-1/2} \sum_{i=1}^n Z_i$ converge vers une loi normale de moyenne nulle et de variance donnée par la proposition 4.3.

4.3 Estimation du tau de Kendall

Dans le chapitre 2 on a vu différentes mesures de dépendances à savoir : le coefficient de corrélation linéaire, le rho de Spearman et le tau de Kendall. Sancetta et Satchell [2004] ont trouvé une approximation du rho de Spearman en utilisant la copule de Bernstein. Ils ont donné une forme explicite de cette approximation. Dans cette section on s'intéresse à l'estimation du tau de Kendall. Ce dernier s'exprime en fonction de la copule C comme suit :

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) c(u_1, u_2) du_1 du_2 - 1.$$

En utilisant les copules de Bernstein, une approximation du tau de Kendall est donnée par

$$\tilde{\tau} = 4 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}_m(u_1, u_2) \tilde{c}_m(u_1, u_2) du_1 du_2 - 1.$$

où

$$\tilde{C}_m(u, v) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right) p_{k,m}(u) p_{l,m}(v).$$

Étant donné que l'approximation $\tilde{\tau}$ ne peut être utilisée en pratique, on propose un nouvel estimateur, $\hat{\tau}_B$, du tau de Kendall en estimant C et c par les estimateurs de Bernstein $\hat{C}_{m,n}$ et $\hat{c}_{m,n}$ respectivement :

$$\hat{\tau}_B = 4 \int_0^1 \int_0^1 \hat{C}_{m,n}(u_1, u_2) \hat{c}_{m,n}(u_1, u_2) du_1 du_2 - 1$$

La proposition suivante établit une forme explicite de l'estimation du tau de Kendall $\hat{\tau}_B$.

Proposition 4.6 Soient C_n l'estimateur de la copule empirique et $C_n(B_{kl})$ la fonction

définie dans la formule (4.4). Alors, on a :

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_B &= 4m^2 \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_n \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \sum_{k'=0}^{m-1} \sum_{l'=0}^{m-1} C_n(B_{k'l'}) \binom{m}{k} \binom{m-1}{k'} \binom{m}{l} \binom{m-1}{l'} \\ &\quad \text{B\hat{e}ta}(k+k'+1, 2m-k-k') \text{B\hat{e}ta}(l+l'+1, 2m-l-l') - 1,\end{aligned}$$

où *B\hat{e}ta* est la fonction *B\hat{e}ta* donnée par :

$$\text{B\hat{e}ta}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Preuve : En effet,

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_B &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \hat{C}_{m,n}(u_1, u_2) \hat{c}_{m,n}(u_1, u_2) du_1 du_2 - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_n \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) p_{k,m}(u_1) p_{l,m}(u_2) \right] \\ &\quad \left[m^2 \sum_{k'=0}^{m-1} \sum_{l'=0}^{m-1} C_n(B_{k'l'}) p_{k',m-1}(u_1) p_{l',m-1}(u_2) \right] du_1 du_2 - 1 \\ &= 4m^2 \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_n \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \sum_{k'=0}^{m-1} \sum_{l'=0}^{m-1} C_n(B_{k'l'}) \\ &\quad \int_0^1 \int_0^1 p_{k,m}(u_1) p_{l,m}(u_2) p_{k',m-1}(u_1) p_{l',m-1}(u_2) du_1 du_2 - 1 \\ &= 4m^2 \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_n \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \sum_{k'=0}^{m-1} \sum_{l'=0}^{m-1} C_n(B_{k'l'}) \int_0^1 \int_0^1 \binom{m}{k} \binom{m-1}{k'} u_1^{k+k'} \\ &\quad (1-u_1)^{2m-k-k'-1} \binom{m}{l} \binom{m-1}{l'} u_2^{l+l'} (1-u_2)^{2m-l-l'-1} du_1 du_2 - 1 \\ &= 4m^2 \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_n \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \sum_{k'=0}^{m-1} \sum_{l'=0}^{m-1} C_n(B_{k'l'}) \binom{m}{k} \binom{m-1}{k'} \binom{m}{l} \binom{m-1}{l'} \\ &\quad \int_0^1 \int_0^1 u_1^{k+k'} (1-u_1)^{2m-k-k'-1} u_2^{l+l'} (1-u_2)^{2m-l-l'-1} du_1 du_2 - 1 \\ &= 4m^2 \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m C_n \left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m} \right) \sum_{k'=0}^{m-1} \sum_{l'=0}^{m-1} C_n(B_{k'l'}) \binom{m}{k} \binom{m-1}{k'} \binom{m}{l} \binom{m-1}{l'} \\ &\quad \text{B\hat{e}ta}(k+k'+1, 2m-k-k') \text{B\hat{e}ta}(l+l'+1, 2m-l-l') - 1.\end{aligned}$$

CONCLUSION

La copule est un concept de modélisation de la structure de dépendance. Contrairement aux différentes mesures de dépendance, la relation entre les variables est bien expliquée par la copule. Autrement dit, au lieu de résumer la structure de la dépendance par un seul nombre, par exemple le coefficient de corrélation, on peut utiliser la fonction copule qui décrit au mieux cette dépendance.

Dans ce mémoire on a abordé la notion des copules ainsi que les différentes propriétés qui lui sont associées. Au début, on a présenté quelques familles de copules paramétriques les plus utilisées et leurs propriétés fondamentales à savoir : les copules elliptiques et les copules Archimédiennes. Nous avons présenté trois méthodes pour estimer la copule. La première méthode est paramétrique, c'est-à-dire elle impose un modèle paramétrique pour la copule et pour les distributions marginales. La seconde approche est semi-paramétrique, c'est-à-dire elle suppose un modèle paramétrique pour la copule et non-paramétrique pour les distributions marginales. Une comparaison entre ces deux approches a montré que la méthode "IFM" pourrait présenter l'avantage de reposer sur des calculs plus légers que ceux générés par la méthode "FML". Cependant la détermination de la matrice de Godambe peut s'avérer très complexe en raison de multiples calculs de dérivées. La troisième méthode d'estimation de la copule est non-paramétrique, celle-ci ne fait pas de restriction sur les modèles. L'une des approches non-paramétriques est celle basée sur la

copule de Bernstein proposée par Sancetta & Satchell [2004].

Nous avons étudié les propriétés asymptotiques de l'estimateur de Bernstein de la densité de copule. Nous avons calculé le biais et la variance asymptotiques de cet estimateur. Nous avons établi une représentation i.i.d de l'estimateur de Bernstein ainsi que la normalité asymptotique.

Finalement, cet estimateur a été utilisé pour proposer un nouvel estimateur du tau de Kendall. Une forme explicite de l'estimateur du tau de Kendall a été donnée. Les propriétés asymptotiques de ce dernier reste une question ouverte.

Bibliographie

- [BC99] B. Brown and S. Chen. Beta-Bernstein smoothing for regression curves with compact supports. *Scandinavian Journal of Statistics*, 26 :47–59, 1999.
- [BC06] G. J. Babu and Y. P. Chaubey. Smooth estimation of a distribution and density function on a hypercube using Bernstein polynomials for dependent random vectors. *Statistics & Probability Letters*, 76 :959–969, 2006.
- [BEGT13] T. Bouezmarni, A. El Ghouch, and A. Taamouti. Bernstein Estimator for Unbounded Copula Densities. *Statistics & Risk Modeling*, 30 :343–360, 2013.
- [BR07] T. Bouezmarni and J. M. Rolin. Bernstein estimator for unbounded density function. *Journal of Nonparametric Statistics*, 19 :145–161, 2007.
- [BRT10] T. Bouezmarni, J. Rombouts, and A. Taamouti. Asymptotic properties of the Bernstein density copula estimator for α -mixing data. *Journal of Multivariate Analysis*, 101 :1–10, 2010.
- [CFG00] P. Capéraà, A. L. Fougères, and C. Genest. Bivariate distributions with given extreme value attractor. *Journal of Multivariate Analysis*, 72 :30–49, 2000.
- [CFS06] A. Charpentier, J. D. Fermanian, and O. Scaillet. The Estimation of Copulas : Theory and Practice. 2006.

- [CH07] S. X. Chen and T. M. Huang. Nonparametric estimation of copula functions for dependence modelling. *La Revue Canadienne de statistique*, 35 :265–282, 2007.
- [Che99] S. X. Chen. Beta kernel estimators for density functions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 31 :131–145, 1999.
- [Che00] S. X. Chen. Probability Density Function Estimation using Gamma Kernels. *Ann. Inst. Statist. Maths*, 52 :471–480, 2000.
- [CJ81] R. D. Cook and M. E. Johnson. A family of distributions for modeling non-elliptically symmetric multivariate data. *J. Roy. Statist. Soc, Ser. B* 43 :210–218, 1981.
- [CL02] C. Cherubini and U. Luciano. Value at risk trade-off and capital allocation with copulas. *Economic Notes*, 30 (2) :235–256, 2002.
- [CLV04] C. Cherubini, U. Luciano, and W. Vecchiato. Copula Methods in Finance. *Wiley*, 2004.
- [Dal56] G. Dall’Aglia. Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze (3)*, 10 :35–74, 1956.
- [Deh79] P. Deheuvels. La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non-paramétrique d’indépendance. *Académie Royale de Belgique-Bulletin de la Classe des Sciences*, 65(5) :274–292, 1979.
- [Deh1a] P. Deheuvels. An asymptotic decomposition for multivariate distribution-free tests of independence. *J. Multivariate. Anal*, 11 :102–113, 1981a.
- [Deh1b] P. Deheuvels. A Kolmogorov-Smirnov type test for independence and multivariate samples. *Rev. Roumaine Math., Pures Appl.* 26 :213–226, 1981b.
- [Deh1c] P. Deheuvels. A nonparametric test for independence. *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*, 26 :29–50, 1981c.

- [Fré51] M. Fréchet. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann. Univ. Lyon, Sect. A* 9 :53–77, 1951.
- [Fér56] R. Féron. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, cas de l'espace à trois dimensions. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 5, pages 3–12, 1956.
- [FRW04] J. D. Fermanian, D. Radulovic, and M. Wegkamp. Weak Convergence of Empirical Copula Processes. *Bernoulli*, 10 :847–860, 2004.
- [FV98] E. W. Frees and E. A. Valdez. Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal*, 3 :137–142, 1998.
- [Gal78] J. Galambos. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. John Wiley & Sons, USA, 1978.
- [Geo58] J. Geoffroy. Contributions à la théorie des valeurs extrêmes. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 7 :37–121, 1958.
- [GGR95] C. Genest, K. Ghoudi, and L. P. Rivest. A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, 82 :543–552, 1995.
- [Gho01] S. Ghosal. Convergence rates for density estimation with Bernstein polynomials. *The Annals of Statistics*, 28 :1264–1280, 2001.
- [GM90] I. Gijbels and J. Mielniczuk. Estimating the density of a copula function. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 19 :445–464, 1990.
- [GM6a] C. Genest and J. MacKay. Copules Archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *La Revue Canadienne de statistique*, 14 :145–159, 1986a.
- [GM6b] C. Genest and J. MacKay. The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, 40 :280–285, 1986b.

- [GR93] C. Genest and L. P. Rivest. Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88 :1034–1043, 1993.
- [GRB09] C. Genest, B. Rémillard, and D. Beaudoin. Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44 :199–213, 2009.
- [GRQ06] C. Genest, B. Rémillard, and J-F. Quessy. On the joint asymptotic behavior of two rank-based estimators of the association parameter in the gamma frailty model. *Statistics & Probability Letters*, 76 :10–18, 2006.
- [GS81] N. Grawronski and U. Stadtmüller. Smoothing histograms by lattice and continuous distributions. *Metrika*, 28 :155–164, 1981.
- [GS87] P. Gaenssler and W. Stute. Seminar on Empirical Processes. *DMV Sem. 9. Birkhäuser, Basel*, 1987.
- [GVA12] I. Gijbels, N. Veraverbeke, and F. Abegaz. Semiparametric estimation of conditional copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 110 :43–73, 2012.
- [GVO11a] I. Gijbels, N. Veraverbeke, and M. Omelka. Conditional copulas, association measures and their applications. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55 :1919–1932, 2011.
- [GVO11b] I. Gijbels, N. Veraverbeke, and M. Omelka. Estimation of a Conditional Copula and Association Measures. *Scandinavian Journal of Statistics*, 38 :766–780, 2011.
- [Joe97] H. Joe. Multivariate Models and Dependence Concepts. *Chapman & Hall, London*, 73, 1997.
- [Joe05] H. Joe. Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. *Journal of Multivariate Analysis*, 94 :401–419, 2005.

- [JSV12] P. Janssen, J. Swanepoel, and N. Veraverbeke. Large Sample Behaviour of the Bernstein Copula Estimator. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142 :1189–1197, 2012.
- [JX96] H. Joe and J. Xu. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. *Technical Report, Department of Statistics, University of British Columbia*, 166, 1996.
- [Kak04] Y. Kakizawa. Bernstein polynomial probability density estimation. *Journal of Nonparametric Statistics*, 16 :709–729, 2004.
- [Kak06] Y. Kakizawa. Bernstein polynomial estimation of a spectral density. *Journal of Time Series Analysis*, 27 :253–287, 2006.
- [KS5b] G. Kimeldorf and A. Sampson. Uniform representations of bivariate distributions. *Communications in Statistics. A-Theory Methods*, 4 :617–627, 1975b.
- [KSS07] G. Kim, J. Silvapulle, and P. Silvapulle. Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51 :2836–2850, 2007.
- [KY10] I. Kojadinovic and J. Yan. Modeling Multivariate Distributions with continuous margins using the copula R package. *Journal of Statistics Software*, 34, 2010.
- [Lor53] G. G. Lorentz. *Bernstein Polynomials*. University of Toronto Press, Toronto, 1953.
- [MFE05] A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative risk management*. Princeton University Press, USA, 2005.
- [MO88] A. W. Marshall and I. Olkin. Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 83 :834–841, 1988.

- [Nel06] R. B. Nelson. *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics, USA, 2006.
- [Oak82] D. Oakes. A model for association in bivariate survival data. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B* 44 :414–422, 1982.
- [Oak86] D. Oakes. Semiparametric inference in a model for association in bivariate survival data. *Biometrika*, 73 :353–361, 1986.
- [OGV09] M. Omelka, I. Gijbels, and N. Veraverbeke. Improved Kernel Estimation of Copulas : Weak Convergence and Goodness-of-fit Testing. *The Annals of Statistics*, 37 :3023–3058, 2009.
- [Pet9a] S. Petrone. Bayesian density estimation using Bernstein polynomials. *La Revue Canadienne de statistique*, 27 :105–126, 1999a.
- [Pet9b] S. Petrone. Random Bernstein polynomials. *Scandinavian Journal of Statistics*, 26 :373–393, 1999b.
- [PW02] S. Petrone and L. Wasserman. Consistency of Bernstein polynomial density estimators. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B* 64 :79–100, 2002.
- [Que05] J-F. Quessy. Méthodologie et application des copules : Tests d’adéquation, tests d’indépendance, et bornes pour la valeur à risque. *Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences et de Génie, Université Laval, Québec*, 2005.
- [San07] A. Sancetta. Nonparametric estimation of distributions with given marginals via Bernstein-Kantorovich polynomials : L_1 and pointwise convergence theory. *Journal of Multivariate Analysis*, 98 :1376–1390, 2007.
- [Sap06] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions TECHNIP, France, 2006.
- [SDMKR07] G. Salvadori, C. De Michele, N. T. Kottegoda, and R. Rosso. *Extremes in Nature, An Approach Using Copulas*. Water Science and Technology Library, volume 56. Springer, Dordrecht (NL), 2007.

- [Sib60] M. Sibuya. Bivariate extreme statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 11 :195–210, 1960.
- [Skl59] A. Sklar. Fonction de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* 8, pages 229–231, 1959.
- [SL95] J. H. Shih and T. A. Louis. Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data. *Biometrics*, 51 :1384–1399, 1995.
- [SS04] A. Sancetta and S. Satchell. The Bernstein Copula and its Applications to Modeling and Approximations of Multivariate Distributions. *Economic Theory*, 20 :535–562, 2004.
- [Stu84] W. Stute. The Oscillation Behavior of Empirical Processes : The Multivariate Case. *The Annals of Probability*, 12 :361–379, 1984.
- [SW81] B. Schweizer and E. F. Wolff. On nonparametric measures of dependence for random variables. *The Annals of Statistics*, 9 :879–885, 1981.
- [TdO58] J. Tiago de Olivera. Extremal distributions. *Rev. Fac. Ciencias. Univ. Lisboa*, A 8 :299–310, 1958.
- [Ten94] A. Tenbusch. Two-dimensional Bernstein polynomial density estimation. *Metrika*, 41 :233–253, 1994.
- [Ten97] A. Tenbusch. Nonparametric curve estimation with Bernstein estimates. *Metrika*, 45 :1–30, 1997.
- [Vit75] R. Vitale. A Bernstein polynomial approach to density estimation. In *M. Puri (Ed.), Statistical Inference and Related Topics. Academic Press, New York*, 2 :87–99, 1975.
- [VW96] A. W. Van Der. Vaart and J. Wellner. Weak convergence and empirical processes. *Springer*, 1996.