SOLUTION PÉRIODIQUE ET SOLUTION ANTI-PÉRIODIQUE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ABEL

par

Abdoul Aziz Dabakh Gueye

Thèse présentée au Département de mathématiques en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, novembre 2017

Le 18 Novembre 2017

Le jury a accepté la thèse de Monsieur Abdoul Aziz Dabakh Gueye dans sa version finale.

Membres du jury :

Professeur Jean Marc Belley
Directeur de thèse
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Sherbrooke

Professeure Marlène Frigon
Évaluatrice externe
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Montreal

Professeure Virginie Charette
Directrice du Département de mathématiques
Et évaluatrice interne
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Sherbrooke

Professeur Tomasz Kaczynski
Président-Rapporteur
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Sherbrooke

À mes parents
À mes frères et soeurs
À mes neveux et nièces
À la mémoire de ma sœur
Je dédie ce travail

SOMMAIRE

Soit T une constante positive. Dans le présent travail, nous nous intéressons à l'existence d'une solution T-anti-périodique et d'une solution T-périodique de l'équation différentielle d'Abel

$$\theta' = f_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j \theta^j$$

avec f_j, $(j \in \{0, 1, 2, ...\})$ à variation bornée sur $[0, T]$. Nous allons généraliser cette équation au cas impulsif où θ et θ' subissent des sauts dépendants de l'état.

Le premier chapitre consiste en un rappel de quelques définitions, notions de bases et résultats fondamentaux de l'analyse réelle et fonctionnelle que nous allons utiliser tout au long des chapitres 2 et 3.

Au deuxième chapitre, on étudie l'existence d'une solution T-anti-périodique dans le sens que $\theta(0) = -\theta(T)$. Les conditions que nous imposons nous permettent d'utiliser le théorème du point fixe de Banach. Cette méthode nous donne non seulement l'existence d'une solution, mais aussi un moyen de trouver la solution numériquement ainsi qu'une majoration de la vitesse de convergence uniforme, d'une suite d'itérations de Picard vers la solution. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont publiés dans [16].

Au troisième chapitre, on étudie l'existence d'une solution T-périodique pour la même équation. On utilise encore le théorème du point fixe de Banach pour garantir l'unicité

de la solution. L'unicité est nécessaire pour que la fonction moyenne $M(\mu)$ que nous introduirons plus tard (voir(1.34)) soit bien définie. Cette méthode nous donne également, non seulement l'existence d'une solution, mais aussi un moyen de trouver la solution numériquement ainsi qu'une majoration de la vitesse de convergence uniforme d'une suite d'itérations de Picard, vers la solution.

REMERCIEMENTS

Ces quatre années de thèse ont été pour moi une magnifique expérience scientifique, professionnelle et humaine. Plusieurs personnes ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail et je profite de ces quelques lignes pour leur exprimer toute ma gratitude.

En premier lieu, je tiens à remercier très vivement mon directeur de thèse M Jean-Marc Belley. Fidèle à ses habitudes, il a été d'une disponibilité irréprochable. Ses nombreux conseils et encouragements mathématiques ont été un soutien précieux tout au long de ce travail. J'ai beaucoup apprécié son optimisme, sa rigueur scientifique et sa persévérance. Ce fut pour moi un réel plaisir de travailler avec lui. Je dis aussi merci à toutes et à tous les professeurs qui m'ont enseigné et pour les connaissances qu'ils m'ont transmises. En particulier je remercie très vivement mon cher professeur Moussa Balde du département de mathématiques et informatique de l'université Cheikh Anta Diop de Dakar, pour son soutien moral et intellectuel, voir même au-delà de ça. Je peux dire que c'est grâce à lui que toute cette aventure a commencé. Je lui remercierai jamais assez.

Je voudrais également remercier tous mes confrères et consœurs de travail du local D4-1026 qui ont su m'épauler tout au long de la réalisation de cette thèse. Je souhaite aussi adresser mes plus sincères remerciements à toute ma famille spécialement à mon père Magueye Gueye et ma mère Codou Diagne qui, même si deux continents nous séparent, ont été d'une disponibilité irréprochable pour leurs conseils et soutiens.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à tous mes amis, pour leur soutien moral, spécialement à Catherine Martin et Mme Louise Alain qui m'ont soutenu et encouragé pendant ces quatre dernières années et d'avoir accepté de relire ma thèse sans rien y comprendre.

Mon doctorat a été rendu possible grâce aux soutiens financiers de mon directeur, du département de mathématiques, de la faculté des sciences, de l'ISM et de la Fondation Force de l'Université de Sherbrooke, auxquels je dis un grand merci.

Enfin, que toute personne qui a contribué d'une manière ou d'une autre pour l'accomplissement de ce travail trouve ici ma gratitude.

Abdoul Aziz Dabakh Gueye

Sherbrooke, Novembre, 2017

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Cette thèse est entièrement consacrée à l'étude de l'existence d'une solution anti-périodique et de l'existence d'une solution périodique de l'équation différentielle du célèbre mathématicien Niels Henrik Abel. L'équation est posée comme suit :

$$\theta' = f_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j \theta^j \tag{1}$$

où θ, θ' sont des fonctions réelles et f_j est une fonction réelle à variation bornée sur $[0, T]$ pour tout $j \in \{0, 1, 2, ...\}$ et $T > 0$ donné. Dans la littérature, l'étude de solution périodique de l'équation différentielle d'Abel est motivé par le $16e$ problème de Hilbert ([44]).

Le premier chapitre est consacré à des rappels de quelques définitions, notions de bases et résultats fondamentaux de l'analyse réelle et fonctionnelle, dont nous allons nous servir dans les chapitres 2 et 3.

Dans le chapitre 2, nous étudions l'existence d'une solution de (1) sur $[0, T]$, soumise à la condition d'anti-périodicité

$$\theta(0) = -\theta(T) \tag{2}$$

et où les f_j, $j \in \{0, 1, 2, ...\}$, sont dans l'espace NBV de toutes fonctions réelles à variations bornées sur $[0, T]$ et soumises à la condition suivante :

A1. $f_j \in NBV$ satisfait

$$f_j(0) = (-1)^{j+1} f_j(T)$$

pour $j \in \{0, 1, 2, ...\}$.

On montre, sous certaines conditions, que (1) admet une unique solution non triviale θ, T-anti-périodique dans le sens de (2). De plus, θ est absolument continue sur $[0, T]$ et θ' est à variation bornée.

Nous allons généraliser par la suite (1) au cas impulsif où θ et θ' subissent des sauts dépendants de l'état. L'équation (1) est alors remplacée par

$$\theta' = f_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j \theta^j + \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k(\theta) J_{\tau_k(\theta)} + \sum_{l \in \mathbb{N}} b_l(\theta) J'_{\sigma_l} \qquad (3)$$

où $a_k(\theta) J_{\tau_k(\theta)}$ correspond à un saut en θ', d'amplitude $a_k(\theta)$ dépendante de l'état à l'instant $\tau_k(\theta)$ dépendant de l'état, et $b_l(\theta) J'_{\sigma_l}$ correspond à un saut en θ, d'amplitude $b_l(\theta)$ dépendante de l'état à l'instant σ_l indépendant de l'état. Sous certaines conditions, que nous décrirons plus tard, on montre que (3) admet une solution non triviale à variation bornée sur $[0, T]$ qui est T-anti-périodique dans le sens de (2). Notre approche, basée sur le théorème du point fixe de Banach, nous donne un moyen de trouver la solution de (3) numériquement, ce qui entraîne aussi une majoration de la vitesse de convergence uniforme, d'une suite d'itérations de Picard, vers la solution.

Le concept de solution d'équation différentielle satisfaisant la condition au bord T-anti-périodique (2) a été introduit par Okochi [37] et par la suite, est devenu très utile pour plusieurs sortes d'équations non linéaires avec ou sans impulsions dépendantes de l'état (voir [1], [2], [17], [21]-[23], [25], [26], [29], [32]-[36], [39], [47]-[50]). Il n'y a aucun résultat dans la littérature sur l'existence de solutions anti-périodiques de l'équation d'Abel, même dans le cas sans discontinuités. Les résultats pour cette équation sont limités à l'existence de cycles limites (voir [4]-[15], [18]) et au problème qui consiste à trouver des conditions qui garantissent que toutes les solutions sont périodiques pour une période donnée (voir [30], [40] et les références qui s'y trouvent). L'équation d'Abel $\theta' = \theta$ satisfait la condition A1. À une constante multiplicative près, sa seule solution non triviale sur $[0, T]$ est $\theta(t) = e^t$, qui n'est pas T-anti-périodique pour $T > 0$ quelconque. D'autre part, $\theta' = \cos \omega t + \theta$ $(\omega = \pi/T)$ est une équation différentielle d'Abel qui satisfait aussi la condition A1. Sa solution particulière $\theta(t) = (-\cos \omega t + \omega \sin \omega t)/(1 + \omega^2)$ $(0 \leq t \leq T)$ est évidemment T-anti-périodique pour tout $T > 0$.

Au troisième chapitre, nous allons étudier l'existence d'une solution pour l'équation différentielle d'Abel donnée cette fois par

$$\theta' = f_0 + \sum_{j=1}^{m} f_j \theta^j \tag{4}$$

soumise cette fois à la condition de T-périodicité $\theta(0) = \theta(T)$. Chaque f_j, $(j \in \{0, 1, 2, ..m\})$ est une fonction réelle T-périodique à variation bornée sur $[0, T]$. Sous certaines conditions, on montre que cette équation admet une unique solution T-périodique, absolument continue sur $[0, T]$ et de moyenne donnée $\mu \in \mathbb{R}$. On utilise encore le théorème du point fixe de Banach pour garantir l'unicité de la solution, ce qui est nécessaire pour que la fonction moyenne $M(\mu)$ donnée par (1.34) soit bien définie. Nous allons généraliser par la suite cette équation au cas impulsif où θ' subit des sauts dépendants de l'état. L'équation (4) est alors remplacée par une équation plus générale

$$\theta' = f_0 + \sum_{j=0}^{m} f_j \theta^j + \sum_{k=0}^{m'} a_k(\theta)\, I_{\tau_k(\theta)} \tag{5}$$

où $a_k(\theta)\, I_{\tau_k(\theta)}$ correspond à un saut en θ' d'amplitude $a_k(\theta)$ à l'instant $\tau_k(\theta)$. Sous certaines conditions dont nous décrirons plus tard, on montre que cette équation admet une unique solution T-périodique non triviale de moyenne μ donnée, absolument continue sur $[0, T]$. Notre approche, basée sur le théorème du point fixe de Banach, nous permet de trouver la solution numériquement et de donner une majoration de la vitesse de convergence uniforme, d'une suite d'itérations de Picard, vers la solution.

La question d'étudier les solutions périodiques d'équation différentielle d'Abel est un défie. Dans la littérature, il n'existe aucun résultat sur l'existence de solutions périodiques de cette équation avec des discontinuités dépendantes de l'état. Cependant, plusieurs résultats d'existence de cycles limites dans le cas non impulsif sont prouvés sous différentes conditions (voir [4]- [15],[18]-[20], [27], [28], [38], [41], [46], [47]). Plusieurs méthodes sont utilisées, comme la théorie des groupes de Lie pour réduire le degré de l'équation, l'analyse des singularités de Painlévé pour analyser la stabilité des solutions (voir [18] et les références qui s'y trouvent), divers théorèmes de point fixe et bien d'autres. Le nombre de résultats où tous les coefficients de la partie droite de (4) sont présent sont rares. La plupart des résultats consistent à estimer le nombre de cycles limites en mettant des conditions soit sur le degré du polynôme du côté droit de (4) ou sur le signe des coefficients f_j. Nous allons obtenir des résultats qui complémentent ce qui a déjà été fait dans la littérature. À cet effet, on impose au chapitre 3, des hypothèses plus faibles que celles qui existent dans la littérature. On suppose uniquement que chaque coefficient f_j est une fonction réelle, T-périodique et à variation bornée sur $[0, T]$, et on rajoute des discontinuités dépendantes de l'état pour rendre le problème plus général et, par conséquent, plus difficile. Une équation du genre (4) n'admet pas toujours une solution T-périodique non triviale. Par exemple, la fonction triviale $\theta = 0$ est la seule solution périodique de $\theta' = \theta^2$. D'autre part, $\theta = 1/(c - \sin t)$ pour $c \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ arbitraire, est une solution 2π-périodique non triviale de $\theta' = (\cos t)\theta^2$. Dans notre travail, on obtient des conditions simples qui garantissent l'existence d'une solution T-périodique de (5).

CHAPITRE 1

RAPPELS DE QUELQUES NOTIONS ET RÉSULTATS FONDAMENTAUX

Ce chapitre est entièrement consacré à des rappels de quelques notions, définitions et résultats fondamentaux que nous allons utiliser tout au long des chapitres 2 et 3.

1.1 Notions préliminaires

Soit $L^1(T)$ l'espace de Banach des fonctions réelles T-périodiques presque partout sur $\mathbb{R}$ et Lebesgue intégrables sur $[0, T]$, muni de la norme suivante :

$$\|f\|_1 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\, dt,\ \ f \in L^1(T). \tag{1.1}$$

La valeur moyenne d'une fonction $f \in L^1(T)$, notée $\bar{f}$, est donnée par :

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt.$$

On pose

$$\widetilde{f} = f - \overline{f}.$$

Remarque 1.1 *Toute fonction $f \in L^1(T)$ peut être identifiée par sa série de Fourier donnée par :*

$$\hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(\hat{f}(n)e^{in\omega t} + \hat{f}(-n)e^{-in\omega t}) \qquad \omega = 2\pi/T,\ t \in \mathbb{R}$$

où $i = +\sqrt{-1}$ et $\widehat{f}(n) \in \mathbb{C}$ est le $n^{ième}$ coefficient de Fourier de f donné par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)e^{-in\omega s}\, ds.$$

$L^2(T)$ désigne l'espace de Banach des fonctions réelles T-périodiques presque partout sur $\mathbb{R}$ et de carrés intégrables sur $[0, T]$, muni de la norme suivante :

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2},\ f \in L^2(T).$$

On a le résultat suivant.

Théorème 1.2 *(Inégalité de Hölder, [42]) Si $f, g \in L^2(T)$ alors $fg \in L^1(T)$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

En particulier, si $f \in L^2(T)$, alors $f \in L^1(T)$ puisque

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2.$$

Il suffit de prendre $g = 1$ dans le théorème.

Définition 1.3 *(Fonction T-périodique généralisée) On définit une fonction réelle T-périodique généralisée $x(t)$, comme étant formellement une série de Fourier*

$$x(t) = \hat{x}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(\hat{x}(n)e^{in\omega t} + \hat{x}(-n)e^{-in\omega t}) \qquad \omega = 2\pi/T,\ t \in \mathbb{R}$$

où $i = +\sqrt{-1}$, les coefficients $\hat{x}(n) \in \mathbb{C}$ sont tels que $\hat{x}(-n)$ est le conjugué complexe de $\hat{x}(n)$, et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\hat{x}(n)}{n^k} \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Sa dérivée généralisée est donnée formellement par :

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} in\omega(\hat{x}(n)e^{in\omega t} - \hat{x}(-n)e^{-in\omega t})$$

(Voir par exemple [24] et [51] pour la définition d'une fonction périodique généralisée et de sa dérivée généralisée.)

La moyenne $\overline{x}$ d'une fonction généralisée x est donnée par $\overline{x} = \hat{x}(0)$ et on pose $\tilde{x} = x - \overline{x}$. Par exemple pour la fonction delta de Dirac, donnée par (voir, [51, p. 333])

$$\delta_{t_0}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(e^{in\omega(t-t_0)} + e^{-in\omega(t-t_0)}),$$

on a

$$\overline{\delta_{t_0}} = 1$$

et

$$\widetilde{\delta_{t_0}}(t) = \delta_{t_0}(t) - \overline{\delta_{t_0}} = \sum_{n=1}^{\infty}(e^{in\omega(t-t_0)} + e^{-in\omega(t-t_0)})$$

pour $t_0 \in [0, T)$ arbitraire.

Rappelons que la variation totale d'une fonction $\theta : [\,\alpha, \beta\,] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$v(\theta) = \sup\{var(\theta, P) : P \textit{ une partition de } [\,\alpha, \beta\,]\}$$

où

$$var(\theta, P) = \sum_{j=1}^{k} |\theta(t_j) - \theta(t_{j-1})|$$

et $P = \{t_0, t_1, ...t_k\}$ est une partition quelconque de l'intervalle $[\,\alpha, \beta\,]$.

Définition 1.4 *(Fonction à variation bornée) On dit que θ est à variation bornée sur $[\alpha, \beta]$ si $v(\theta) < \infty$.*

Remarque 1.5 *Toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes. Donc les limites à gauche existent en tout point de* $(\alpha, \beta]$ *et les limites à droite existent en tout point de* $[\alpha, \beta)$ *(voir [42]).*

Définition 1.6 *(Fonction absolument continue) Une fonction* $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite absolument continue sur* $[0, T]$, *si* $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ *tel que, pour toute famille finie d'intervalles ouverts, deux à deux disjoints,* $]t_i, t_{i+1}[$ $(i \in \{1, 2, 3..., n\})$ *contenus dans* $[0, T]$ *et telle que*

$$\sum_{i=1}^{n} |t_{i+1} - t_i| < \delta$$

on a

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| < \varepsilon.$$

Toute fonction absolument continue sur $[0, T]$ est à variation bornée sur $[0, T]$ (voir [42] pour la preuve) et toute fonction à variation bornée sur $[0, T]$ est élément de L^1.

Théorème 1.7 *(Dirichlet-Jordan [31]) Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, T*-périodique et à variation bornée sur* $[0, T]$. *Alors*

(a) En tout point $t \in [0, T]$ *on a*

$$\hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}(n) e^{in\omega t} + \hat{f}(-n) e^{-in\omega t}) = \frac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$$

où $f(t-)$ *et* $f(t+)$ *sont respectivement les limites à gauche et à droite de la fonction* f.

(b) La série de Fourier de f *converge ponctuellement vers* $f(t)$ *en tout point* $t \in [0, T]$ *où la fonction* f *est continue.*

(c) La série de Fourier de f *converge uniformément vers* f *sur tout intervalle* $[\alpha, \beta] \subseteq [0, T]$ *tel que* f *est continue sur* $[\alpha, \beta]$.

Notation 1.8 *Pour $T > 0$, $NBV(T)$ désigne l'espace des fonctions T-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de variation totale $v(f) < \infty$ sur $[0, T]$ et normalisée dans le sens que*

$$f(t) = \frac{f(t-) + f(t+)}{2} \tag{1.2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Donc d'après le théorème de Dirichlet-Jordan on a

$$f(t) = \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}(n) e^{in\omega t} + \hat{f}(-n) e^{-in\omega t})$$

pour tout $f \in NBV(T)$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

Notation 1.9 *$AC(T)$ désigne l'espace des fonctions réelles T-périodiques sur $\mathbb{R}$ qui sont absolument continues sur $[0, T]$.*

Notation 1.10 *Pour $X(T) \in \{L^1(T), NBV(T), AC(T)\}$ quelconque, $\widetilde{X}(T)$ désigne l'espace des fonctions $f \in X(T)$ de moyenne nulle :*

$$\widetilde{X}(T) = \{\tilde{f} : f \in X(T)\}.$$

Rappelons que tout $f \in NBV(T)$ admet une dérivée $f' \in \widetilde{L^1}(T)$ et $v(f) \geq \int_0^T |f'|$ [42, p. 104] avec égalité lorsque $f \in AC(T)$ [3, p. 273]. De plus, la valeur moyenne de $\widetilde{f}$ s'annule et donc, pour tout $t \in [0, T]$ tel que $\widetilde{f}(t) \neq 0$, il existe $t' \in [0, T]$ tel que $\widetilde{f}(t')$ et $\widetilde{f}(t)$ sont de signes opposés. Ceci implique que

$$\big|\widetilde{f}(t)\big| \leq \big|\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(t')\big| \leq v\big(\widetilde{f}\big) \tag{1.3}$$

pour tout $t \in [0, T]$ et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par T-périodicité. Par rapport à la norme supremum essentiel $\|\widetilde{f}\|_\infty$ de $\widetilde{f}$, (1.3) entraîne

$$\big\|\widetilde{f}\big\|_\infty \leq v\big(\widetilde{f}\big). \tag{1.4}$$

Notation 1.11 *Pour $f, g \in L^1(T)$, la convolution $f * g$ est l'élément de $L^1(T)$ donné par*

$$f * g(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)g(t-s)\,ds = \hat{f}(0)\hat{g}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(\widehat{f}(n)\widehat{g}(n)e^{in\omega t} + \widehat{f}(-n)\widehat{g}(-n)e^{-in\omega t}).$$

Un élément important de $\widetilde{L^1}(T)$ pour ce qui suit est donné par la série de Fourier T-périodique absolument convergente

$$\varepsilon_{t_0}(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\omega(t-t_0)} + e^{-in\omega(t-t_0)}}{n^2\omega^2} \qquad (\omega = 2\pi/T, \quad i = +\sqrt{-1}) \tag{1.5}$$

ayant pour dérivée généralisée

$$\varepsilon'_{t_0}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\omega(t-t_0)} - e^{-in\omega(t-t_0)}}{in\omega}. \tag{1.6}$$

En comparant les coefficients de Fourier on obtient

$$\varepsilon_{t_0}(t) = \frac{6T\,(t-t_0) - 6\,(t-t_0)^2 - T^2}{12}$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$ et

$$\varepsilon'_{t_0}(t) = \begin{cases} (T + 2(t_0 - t))/2 & \text{si } \ t_0 < t < t_0 + T \\ 0 & \text{si } \ t = t_0, t_0 + T \end{cases}$$

respectivement [31, p. 53]. Évidemment on a $\varepsilon_{t_0} \in \widetilde{AC}(T)$ et $\varepsilon'_{t_0} \in \widetilde{NBV}(T)$.

L'espace $\widetilde{NBV}(T)$ muni de la norme variation totale v sur $[0, T]$ est un espace de Banach. Toute boule fermée dans $\widetilde{NBV}(T)$ muni de la métrique $d = v$ est un espace métrique complet.

Définition 1.12 *(Application contractante, [43], [45]) Soit E un espace muni de la métrique d. Une application $g : E \longrightarrow E$ est dite contractante s'il existe $\lambda \in [0, 1)$ tel que $\forall\ x, y \in E$, $d(g(x), g(y)) \leq \lambda d(x, y)$.*

Théorème 1.13 *(Théorème de point fixe de Banach, [43], [45]) Soit g une contraction définie dans un espace métrique complet non vide E vers lui-même. Alors g admet un point unique $a \in E$ tel que $g(a) = a$.*

Remarque 1.14 *La démonstration du Théorème 1.13 donne non seulement l'existence et l'unicité d'un point fixe mais aussi une majoration de la vitesse de convergence de toute suite d'éléments de E vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n \in \{0, ..., n\})$, appelée suite d'itérations de Picard. On a alors :*

$$d(x_n, a) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1).$$

Donc, les itérations de Picard nous donnent un moyen d'approximer numériquement le point fixe. C'est la méthode dite des approximations successives.

1.2 Transformation du problème d'existence d'une solution anti-périodique de l'équation différentielle d'Abel à un problème d'existence d'un point fixe

Étant donné $T > 0$, $L^1(2T)$ désigne l'espace de Banach de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrables sur $[0, 2T]$ et $2T$-périodiques presque partout avec supremum essentiel $\|f\|_\infty$ et norme

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} |f(t)| \, dt$$

qui est équivalente a (1.1) lorsque $|f(t)| = |f(t+T)|$ pour presque tout $t \in [0, T]$. $NBV(2T)$ désigne la famille des fonctions $2T$-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à variations bornées sur $[0, 2T]$ et normalisées dans le sens de (1.2) et NBV est l'espace linéaire réel de toutes fonctions dans $NBV(2T)$ restreintes à $[0, T]$. Pour $f \in NBV$, $v(f)$ va désigner sa variation totale sur l'intervalle $[0, T]$. La famille AC des fonctions réelles absolument continues sur $[0, T]$ est un important sous-espace de NBV [3, p. 269] qui à son tour est un sous-espace de l'espace L^1 des fonctions réelles Lebesgue intégrables sur $[0, T]$. Si $X \in \{L^1, NBV, AC\}$, X_{Tap} va désigner le sous-espace de toutes les fonctions dans X T-anti-périodiques dans le sens de (2). Toute fonction $\theta \in X_{Tap}$ peut être prolongée de $[0, T]$ à $[0, 2T]$ via

$$\theta(t) = -\theta(t + T) \tag{1.7}$$

et ensuite à tout $\mathbb{R}$ par $2T$-périodicité. Cette fonction prolongée satisfait (1.7) pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pose $X_{Tap}(2T)$ pour désigner l'espace réel linéaire de toutes ces fonctions prolongées à $\mathbb{R}$. Notons que X_{Tap} peut être identifié avec $X_{Tap}(2T)$. NBV_{Tap} avec la norme v et $NBV_{Tap}(2T)$ avec la norme variation totale sur tout intervalle de longueur T sont des espaces de Banach équivalents.

Pour commencer, on considère l'équation d'Abel (1) sur $[0, T]$ avec condition d'anti-périodicité (2) et soumise à la condition A1. Pour $r \geq 0$, soit B_r l'ensemble des fonctions données par

$$B_r = \{f \in NBV : v(f) \leq r,\ f(0) = -f(T)\} \tag{1.8}$$

et

$$B_r(2T) = \{f \in NBV(2T) : v(f) \leq r,\ f(t) = -f(t + T)\, \forall t \in \mathbb{R}\}. \tag{1.9}$$

Notons que les boules fermées B_r et $B_r(2T)$ sont équivalentes. De plus, chaque f_j dans A1 peut être prolongée de $[0, T]$ à $[0, 2T]$ de la façon suivante

$$f_j(t + T) = (-1)^{j+1} f_j(t) \tag{1.10}$$

et ensuite à tout $\mathbb{R}$ par 2T-périodicité. Conservant la même notation f_j pour toutes ces fonctions prolongées, il n'y a pas de perte de généralité à étudier (1) et (1.7) simultanément sur $\mathbb{R}$ au lieu de (1) et (2) sur $[0, T]$. Évidemment, A1 est équivalent à

A′1. f_j est dans $NBV(2T)$ et satisfait (1.10) pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Notre théorème général (voir Théorème 2.3) admet la présence de sauts en θ' d'amplitudes $a_k(\theta)$ dépendantes de l'état aux instants $\tau_k(\theta) \in [0,T)$ dépendants de l'état pour tout $k \in \mathbb{N}$ et de sauts en θ d'amplitudes $b_l(\theta)$ dépendantes de l'état aux instants $\sigma_l \in [0,T)$ indépendants de l'état pour tout $l \in \mathbb{N}$. Ces amplitudes sont caractérisées par

$$a_k(\theta) = \begin{cases} \theta'(\tau_k(\theta)+) - \theta'(\tau_k(\theta)-) & \text{si } \ 0 < \tau_k(\theta) < T \\ \theta'(0+) + \theta'(T-) & \text{si } \ \tau_k(\theta) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

et

$$b_l(\theta) = \begin{cases} \theta(\sigma_l+) - \theta(\sigma_l-) & \text{si } \ 0 < \sigma_l < T \\ \theta(0+) + \theta(T-) & \text{si } \ \sigma_l = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

respectivement. Les formules (1.11) pour $\tau_k(\theta) = 0$ et (1.12) pour $\sigma_l = 0$ sont évidentes une fois qu'on prolonge la fonction θ qui satisfait (2) à une fonction $2T$-périodique satisfaisant la condition (1.7) sur $\mathbb{R}$. On a dans ce cas $\theta(0-) = \theta(2T-) = -\theta(T-)$ et $\theta'(0-) = \theta'(2T-) = -\theta'(T-)$. On considère maintenant les conditions suivantes par rapport aux amplitudes et instants des discontinuités.

A2. $a_k : NBV \to [-\alpha_k, \alpha_k]$ pour $\alpha_k > 0$ et il existe $a'_k \geq 0$ tel que

$$|a_k(x) - a_k(y)| \leq a'_k v(x-y)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in NBV$. On pose

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \qquad A' = \sum_{k ß \mathbb{N}} a'_k$$

que nous supposons bornés.

A3. $\tau_k : NBV \to [0,T)$ et il existe $\tau'_k \geq 0$ tel que

$$|\tau_k(x) - \tau_k(y)| \leq \tau'_k v(x-y)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in NBV$. On pose

$$C = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \tau'_k$$

que nous supposons borné.

A4. $b_l : NBV \to [-\beta_l, \beta_l]$ pour $\beta_l > 0$ et il existe $b_l' \geq 0$ tel que

$$|b_l(x) - b_l(y)| \leq b_l' v(x-y)$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in NBV$. On pose

$$B = \sum_{l \in \mathbb{N}} \beta_l \qquad B' = \sum_{l \in \mathbb{N}} b_l'$$

que nous supposons bornés.

A5. $\sigma_l \in [0, T)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Étant donné de telles discontinuités, on remplace (1) avec l'équation plus générale (3) restreinte à $[0, T]$ où, pour $t_0 \in [0, T)$ arbitraire, $J_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne la fonction $2T$-périodique caractérisée par

$$J_{t_0}(t) = \begin{cases} -1/2 & \text{si } \ t_0 < t < t_0 + T \\ 1/2 & \text{si } \ t_0 + T < t < t_0 + 2T \\ 0 & \text{si } \ t = t_0,\ t_0 + T,\ t_0 + 2T. \end{cases} \tag{1.13}$$

Lorsque la fonction ε_{t_0} de (1.5) est dans $L^1(2T)$ (à la place de $L^1(T)$) elle devient

$$\varepsilon_{t_0}(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\omega(t-t_0)} + e^{-in\omega(t-t_0)}}{n^2\omega^2} \qquad (\omega = \pi/T, \quad i = +\sqrt{-1}) \tag{1.14}$$

avec dérivée généralisée

$$\varepsilon_{t_0}'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\omega(t-t_0)} + e^{-in\omega(t-t_0)}}{in\omega}.$$

En comparant les coefficients de Fourier, on obtient pour tout $t \in [t_0, t_0 + 2T]$,

$$\varepsilon_{t_0}(t) = \frac{6T(t-t_0) - 3(t-t_0)^2 - 2T^2}{6}$$

et

$$\varepsilon_{t_0}'(t) = \begin{cases} T + t_0 - t & \text{si } \ t_0 < t < t_0 + 2T \\ 0 & \text{si } \ t = t_0, t_0 + 2T \end{cases}$$

respectivement [31, p. 53]. Évidemment, ε_{t_0} est absolument continue et ε'_{t_0} est à variation bornée sur $[0, 2T]$. De plus, dans le sens des fonctions généralisées, $1 + \varepsilon''_{t_0}(t)$ est précisément la fonction delta de Dirac

$$\delta_{t_0}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (e^{in\omega(t-t_o)} + e^{-in\omega(t-t_o)})$$

associée à une impulsion qui se traduit en un saut en ε'_{t_0} d'amplitude $2T$ aux instants $t_0 + 2kT$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ [51, p. 333]. Il est facile de vérifier que

$$J_{t_0}(t) = \frac{\varepsilon'_{t_0+T}(t) - \varepsilon'_{t_0}(t)}{2T} \tag{1.15}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La dérivée généralisée J'_{t_0} devient la fonction généralisée

$$J'_{t_0} = \frac{\varepsilon''_{t_0+T} - \varepsilon''_{t_0}}{2T} = \frac{\delta_{t_0+T} - \delta_{t_0}}{2T}.$$

Chaque terme $a_k(\theta) J_{\tau_k(\theta)}$ correspond à un saut en θ' d'amplitude $a_k(\theta)$ à l'instant $\tau_k(\theta)$ et chaque dérivée généralisée $b_l(\theta) J'_{\sigma_l}$ est associée à un saut en θ d'amplitude $b_l(\theta)$ à l'instant $\sigma_l \in [0, T)$. Les conditions $A < \infty$ dans A2 et $B < \infty$ dans A4 entraînent que les sommes $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\theta) J_{\tau_k(\theta)}$ et $\sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J'_{\sigma_l}$ sont à variations bornées sur $[0, T]$. Étant donné $t_0 \in [0, T)$, la fonction $2T$-périodique $J_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ caractérisée par (1.13) satisfait (1.2) et (1.7). Elle est aussi à variation bornée sur $[0, 2T]$, ce qui fait d'elle un élément de $NBV_{Tap}(2T)$. Sa restriction à $[0, T]$ satisfait évidemment (2). Sous les conditions A1-A5, étudier (3) et (2) simultanément sur $[0, T]$ est équivalent à étudier (3) et (1.7) simultanément sur tout $\mathbb{R}$. Cette équivalence va être utilisée pour prouver nos résultats.

Soient F_0 et F les opérateurs sur $NBV_{Tap}(2T)$ donnés explicitement par

$$F_0(\theta) = f_0 * \varepsilon'_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} G_j(\theta) + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\theta) H_k(\theta) \tag{1.16}$$

et

$$F(\theta) = F_0(\theta) + \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J_{\sigma_l} \tag{1.17}$$

où G_j et H_k sont définis sur $NBV_{Tap}(2T)$ par

$$G_j(\theta) = \left(f_j \theta^j\right) * \varepsilon_0' \tag{1.18}$$

et

$$H_k(\theta) = J_{\tau_k(\theta)} * \varepsilon_0' = \frac{\varepsilon_{\tau_k(\theta)+T} - \varepsilon_{\tau_k(\theta)}}{2T}. \tag{1.19}$$

Cette fois-ci les convolutions sont dans le sens des fonctions généralisées $2T$-périodiques. Ceci implique que T est remplacé par $2T$ dans Notation 1.11. Évidemment, F_0 et F peuvent être vus comme des opérateurs soit sur NBV_{Tap} ou $NBV_{Tap}(2T)$ puisque les deux espaces sont équivalents dans le sens qu'un élément de NBV_{Tap} est la restriction à $[0, T]$ d'un unique élément de $NBV_{Tap}(2T)$.

Si $x \in L^1_{Tap}(2T)$ et $y \in L^1(2T)$ alors $x * y$, qui est nécessairement élément de $L^1(2T)$ [31, p. 4-5], satisfait (1.7) puisque

$$\begin{aligned}(x * y)(t) &= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t-s)y(s)\, ds \\ &= -\frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t+T-s)y(s)\, ds \\ &= -(x*y)(t+T).\end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme suivant.

Lemme 1.15 *Si $x \in L^1_{Tap}(2T)$ et $y \in L^1(2T)$ alors $x * y \in L^1_{Tap}(2T)$.*

Étant donné $x \in NBV_{Tap}(2T)$ et $t \in [0, T]$, il existe $t' \in [0, T]$ tel que $|x(t)| \leq |x(t) - x(t')|$ et donc on a

$$|x(t)| \leq v(x) \tag{1.20}$$

pour tout $t \in [0, T]$. D'après (1.7) on obtient (1.20) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.16 *Si* $x \in NBV_{Tap}(2T)$ *et* ε_0 *est donné par (1.14) alors* $x * \varepsilon_0' \in AC_{Tap}(2T)$ *et*

$$v\left(x * \varepsilon_0'\right) = T\|x\|_1. \tag{1.21}$$

Démonstration. D'après Lemme 1.15, $x * \varepsilon_0'$ est T-anti-périodique. Étant donné $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 2T$ on a

$$\left|\left(x * \varepsilon_0'\right)(t_2) - \left(x * \varepsilon_0'\right)(t_1)\right| \leq \|x\varepsilon_{t_2}' - x\varepsilon_{t_1}'\|_1 \leq v(x)\|\varepsilon_{t_2}' - \varepsilon_{t_1}'\|_1$$

où

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{t_2}' - \varepsilon_{t_1}'\|_1 &= \frac{1}{2T}\int_{[t_1,t_2]} |\varepsilon_{t_2}' - \varepsilon_{t_1}'| + \frac{1}{2T}\int_{[0,2T]\setminus[t_1,t_2]} |\varepsilon_{t_2}' - \varepsilon_{t_1}'| \\ &\leq \frac{1}{2T}\left(\int_{[t_1,t_2]} 2T\right) + \frac{1}{2T}\left(\int_{[0,2T]\setminus[t_1,t_2]} |t_2 - t_1|\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\|\varepsilon_{t_2}' - \varepsilon_{t_1}'\|_1 \leq 2|t_2 - t_1|. \tag{1.22}$$

D'après (1.22) on obtient

$$\left|\left(x * \varepsilon_0'\right)(t_2) - \left(x * \varepsilon_0'\right)(t_1)\right| \leq 2v(x)|t_2 - t_1|$$

et donc $x * \varepsilon_0'$ est absolument continue sur tout intervalle de longueur $2T$. Ainsi $x * \varepsilon_0' \in AC_{Tap}(2T)$ et donc $\left(x * \varepsilon_0'\right)'$ existe dans $L^1_{Tap}(2T)$. Puisque $\left(x * \varepsilon_0'\right)' = x$ Lebesgue presque partout [31, p. 13] on a

$$v\left(x * \varepsilon_0'\right) = \int_0^T \left|\left(x * \varepsilon_0'\right)'\right| = \int_0^T |x| = \frac{1}{2}\int_0^{2T} |x| = T\|x\|_1$$

ce qui prouve (1.21). ■

Le corollaire suivant est une conséquence de (1.18), (1.19) et Proposition 1.16.

Corollaire 1.17 *Les opérateurs* G_j *et* H_k *envoient* $NBV_{Tap}(2T)$ *vers* $AC_{Tap}(2T)$ *et donc nous avons* $F_0 : B_r(2T) \to AC_{Tap}(2T)$ *pour tout* $r \in (0, \rho)$.

Ceci montre que, prouver l'existence d'une solution T-anti-périodique de (3) sur $[0, T]$, soumise aux conditions (2) et A1-A5, revient à montrer l'existence d'un point fixe de l'opérateur F sur $NBV_{Tap}(2T)$. Dans le cas sans discontinuités, le problème se réduit à montrer l'existence d'une solution de (1) sur $[0, T]$, soumise aux deux conditions (2) et A1, ce qui revient à montrer l'existence d'un point fixe de $F_0 - \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\theta) H_k(\theta)$ sur $NBV_{Tap}(2T)$.

1.3 Transformation du problème d'existence d'une solution périodique de l'équation différentielle d'Abel à un problème d'existence d'un point fixe

Étant donnés $T > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, nous étudions l'équation différentielle d'Abel (4) sur $\mathbb{R}$ avec $\{f_j\}_{j=0}^m$ dans l'espace $NBV(T)$. Pour $r \geq 0$ soit $B_r(T)$ le sous-espace de $\widetilde{NBV}(T)$ donné explicitement par

$$B_r(T) = \{\theta \in \widetilde{NBV}(T) : v(\theta) \leq r\}. \tag{1.23}$$

Résoudre (4) pour $\theta \in AC(T)$ est équivalent à résoudre

$$\left(\widetilde{\theta}\right)' = \sum_{j=0}^{m} f_j(\bar{\theta} + \widetilde{\theta})^j$$

pour $\overline{\theta} \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{\theta} \in \widetilde{AC}(T)$. Si pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$ on montre l'existence de $\theta_\mu \in \widetilde{AC}(T)$ tel que

$$\theta'_\mu = \widetilde{f_0} + \sum_{j=1}^{m} \widetilde{f_j(\mu + \theta_\mu)^j} \tag{1.24}$$

et

$$\overline{f_0} + \sum_{j=1}^{m} \overline{f_j(\mu + \theta_\mu)^j} = 0 \tag{1.25}$$

alors $\theta = \mu + \theta_\mu$ sera une solution de (4).

Soient $\varepsilon_{t_0} \in \widetilde{AC}(T)$, $\varepsilon'_{t_0} \in \widetilde{NBV}(T)$ donnés respectivement par (1.5) et (1.6). En prenant la convolution des deux côtés de (4) avec $\varepsilon'_0(t)$, on obtient

$$\widetilde{\theta} = \widetilde{f}_0 * \varepsilon'_0 + \sum_{j=1}^{m} \left(f_j(\mu + \widetilde{\theta})^j\right) * \varepsilon'_0 \tag{1.26}$$

puisque $\theta' * \varepsilon'_0 = \widetilde{\theta}$ et $f_0 * \varepsilon'_0 = \widetilde{f}_0 * \varepsilon'_0$. Étant donné $\mu \in \mathbb{R}$, résoudre (1.24) pour $\theta_\mu \in \widetilde{NBV}(T)$ est équivalent à résoudre (1.26) pour $\widetilde{\theta} \in \widetilde{NBV}(T)$ qui, à son tour, est équivalent à montrer l'existence d'un point fixe θ_μ pour l'opérateur

$$F_\mu(\theta) = \widetilde{f}_0 * \varepsilon'_0 + \sum_{j=1}^{m} \left(f_j(\mu + \theta)^j\right) * \varepsilon'_0 \tag{1.27}$$

sur $\widetilde{NBV}(T)$. De plus, si (1.25) est satisfait pour ce μ, alors $\theta = \mu + \theta_\mu$ sera une solution de (4) dans $NBV(T)$.

Notre résultat général au chapitre 3, admet la présence de sauts en θ' d'amplitudes dépendantes de l'état

$$a_k(\theta) = \begin{cases} \theta'(\tau_k(\theta)+) - \theta'(\tau_k(\theta)-) & \text{si } \ 0 < \tau_k(\theta) < T \\ \theta'(0+) - \theta'(T-) & \text{si } \ \tau_k(\theta) = 0 \end{cases}$$

aux instants $\tau_k(\theta) \in [0, T)$ dépendants de l'état, pour tout $k \in \{0, ..., m'\}$. On considère maintenant les conditions suivantes par rapport aux instants et amplitudes des discontinuités.

B1. $a_k : NBV(T) \to [-\alpha_k, \alpha_k]$ pour un certain $\alpha_k > 0$ et il existe $a'_k \geq 0$ tel que

$$|a_k(x) - a_k(y)| \leq a'_k v(x - y)$$

pour tout $k \in (0, ...m')$ et tout $x, y \in NBV(T)$. On pose

$$A = \sum_{k=0}^{m'} \alpha_k \qquad A' = \sum_{k=0}^{m'} a'_k$$

B2. $\tau_k : NBV(T) \to [0,T)$ et il existe $\tau_k' \geq 0$ tel que

$$|\tau_k(x) - \tau_k(y)| \leq \tau_k' v(x-y)$$

pour tout $k \in \{0,..,m'\}$ et tout $x, y \in NBV(T)$. On pose

$$C = \sum_{k=0}^{m'} \alpha_k \tau_k'.$$

Étant donné de telles discontinuités, on étudie (5) à la place de (4), restreinte à $[0,T]$ où, pour $t_0 \in [0,T)$ arbitraire, $I_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction T-périodique caractérisée par

$$I_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 < t < t_0 \\ 1/2 & \text{si } \ t = 0, t_0, T \\ 1 & \text{si } \ 0 \leq t_0 < t < T. \end{cases} \tag{1.28}$$

I_{t_0} ne satisfait pas (1.2) lorsque $t_0 = 0$. Cependant $\sum_{k=0}^{m'} a_k(\theta) I_{\tau_k(\theta)}$ le satisfait pourvu que

$$\sum_{k=0}^{m'} a_k(\theta) = 0. \tag{1.29}$$

Chaque terme $a_k(\theta) I_{\tau_k(\theta)}$ correspond à un saut en θ' d'amplitude $a_k(\theta)$ dépendante de l'état à l'instant $\tau_k(\theta)$ dépendant de l'état. Noter que la somme $\sum_{k=0}^{m'} a_k(\theta) I_{\tau_k(\theta)}$ est à variation bornée sur $[0,T]$ puisque c'est une somme finie. La propriété (1.29) garantie la T-périodicité de la solution θ de (5). En prenant la convolution des deux côtés de (5) avec $\varepsilon_0'(t)$ donné par (1.6), on obtient

$$\widetilde{\theta} = \tilde{f}_0 * \varepsilon_0' + \sum_{j=1}^{m} (f_j(\mu + \tilde{\theta})^j) * \varepsilon_0' + \sum_{k=0}^{m'} a_k \left(\mu + \tilde{\theta}\right) I_{\tau_k\left(\mu+\tilde{\theta}\right)} * \varepsilon_0'.$$

Ainsi, pour un $\mu \in \mathbb{R}$ donné, résoudre (5) pour $\theta \in NBV(T)$ soumise à $\bar{\theta} = \mu$ est équivalent à résoudre

$$\theta = \sum_{j=0}^{m} (f_j(\mu + \theta)^j) * \varepsilon_0' + \sum_{k=0}^{m'} a_k(\mu + \theta) I_{\tau_k(\mu+\theta)} * \varepsilon_0' \tag{1.30}$$

pour $\theta \in \widetilde{NBV}(T)$ qui, à son tour, est équivalent à montrer l'existence d'un point fixe θ_μ de l'opérateur

$$H_\mu(\theta) = F_\mu(\theta) + G_\mu(\theta) \tag{1.31}$$

sur $\widetilde{NBV}(T)$, où $F_\mu(\theta)$ est donné par (1.27) et

$$G_\mu(\theta) = \sum_{k=0}^{m'} a_k\,(\mu+\theta)\, I_{\tau_k(\mu+\theta)} * \varepsilon_0'. \tag{1.32}$$

Si de plus, il existe un $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$M^*(\mu) = M(\mu) + \overline{\sum_{k=0}^{m'} a_k\,(\mu+\theta_\mu)\, I_{\tau_k(\mu+\theta_\mu)}} = 0 \tag{1.33}$$

où

$$M(\mu) = \overline{f_0} + \overline{\sum_{j=1}^{m} f_j(\mu+\theta_\mu)^j}, \tag{1.34}$$

alors la fonction T-périodique $\theta = \theta_\mu + \mu$ sera une solution de (5) dans $NBV(T)$.

CHAPITRE 2

Solution anti-périodique de l'équation différentielle d'Abel avec des discontinuités dépendantes de l'état

2.1 Introduction

Soit $p_\star : [0, \infty) \to [0, \infty]$ la fonction convexe donnée par la série de Maclaurin

$$p_\star(r) = T \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_1 r^j \tag{2.1}$$

où $\|f_j\|_1$ est donnée par (1.1). Notre résultat général (voir Théorème 2.3), en l'absence de discontinuités, se réduit au théorème suivant.

Théorème 2.1 *Supposons que l'équation (1) sur* $[0, T]$ *est soumise aux deux conditions (2) et A1 et soient* B_r *et* $p_\star$ *donnés respectivement par (1.8) et (2.1) . Si* $\|f_0\|_1 \neq 0$ *et s'il existe* $r_0 > 0$ *tel que* $p_\star(r_0) \leq r_0$ *et* $p'_\star(r_0) < 1$ *simultanément alors, dans* $B_{p_\star(r_0)}$*, il* *existe une unique solution non triviale θ de (1). De plus, θ est absolument continue sur $[0, T]$ et $\theta' \in NBV$.*

Par conséquent, Théorème 2.1 entraîne le résultat suivant sur l'existence de solutions périodiques des équations différentielles de type Abel.

Corollaire 2.2 *Soit l'équation (1) sur $\mathbb{R}$ soumise aux deux conditions (1.7) et $A'1$ et soit $p_\star$ donné par (2.1). Si $\|f_0\|_1 \neq 0$ et s'il existe $r_0 > 0$ tel que $p_\star(r_0) \leq r_0$ et $p'_\star(r_0) < 1$ simultanément alors, dans $B_{p_\star(r_0)}(2T)$ donné par (1.9), il existe une unique solution non triviale θ de (1) qui satisfait (1.7). De plus, θ est absolument continue dans les intervalles bornés et $\theta' \in NBV(2T)$.*

Le corollaire peut être vu comme un résultat sur le nombre de cycles de période donnée $2T$ pour l'équation d'Abel (1) sur $\mathbb{R}$.

Dans ce travail, on obtient des conditions qui garantissent l'existence d'une solution de (3) sur $[0, T]$ soumise aux conditions (2) et A1-A5. D'après la section 1.2 le problème revient à montrer l'existence d'un point fixe de l'opérateur F sur $NBV_{Tap}(2T)$ définie par (1.17). En particulier, dans le cas sans discontinuités, le problème se réduit à trouver une solution de (1) sur $[0, T]$, soumise aux deux conditions (2) et A1, ce qui revient à trouver l'existence d'un point fixe de $F_0 - \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\theta) H_k(\theta)$ sur $NBV_{Tap}(2T)$.

2.2 Résultat principal

Avant d'énoncer notre résultat principal, nous introduisons les notions et notations suivantes. Pour tout $t \in [0, 2T]$, soit ρ_t le rayon de convergence de la série de Maclaurin $x \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(t)x^j$ et posons

$$\rho = \inf\{\rho_t \,:\, 0 \leq t \leq 2T\}. \tag{2.2}$$

Dans ce qui suit, on suppose que $\rho \neq 0$. La série de Maclaurin $r \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_1 r^j$ converge pour tout $r \in (0,\rho)$. Ainsi, pour tout $r \in (0,\rho)$ on a convergence des séries de Maclaurin dans les définitions

$$p_0(r) = p_\star(r) + TA/2 = T\left(\|f_0\|_1 + \frac{A}{2} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \|f_j\|_1 r^j\right), \tag{2.3}$$

$$p(r) = p_0(r) + B = T\left(\|f_0\|_1 + \frac{A}{2} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \|f_j\|_1 r^j\right) + B \tag{2.4}$$

et

$$q\,(r) = p'(r) + T\,(A' + 2C) + B'. \tag{2.5}$$

On peut énoncer maintenant notre résultat principal.

Théorème 2.3 *Supposons que l'équation (3) avec discontinuités sur* $[0,T]$ *est soumise aux conditions (2) et A1-A5. Soient* $p(r)$ *et* $q(r)$ *les fonctions données par (2.4) et (2.5), respectivement, et* B_r *définie par (1.8) pour tout* $r \in (0,\rho)$ *où* $\rho > 0$ *est donné par (2.2). S'il existe* $r_0 \in (0,\rho)$ *tel que* $p\,(r_0) \leq r_0$ *et* $q\,(r_0) < 1$ *simultanément alors, dans la boule* $B_{p(r_0)}$*, il existe une unique solution* θ *de (3) sur* $[0,T]$*. De plus, nous avons* $\theta - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J_{\sigma_l} = F_0(\theta) \in B_{p_0(r_0)} \cap AC_{Tap}$ *et* $\theta' - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J'_{\sigma_l} \in NBV_{Tap}$ *où* J_{σ_l} *est donné par (1.13) et* $F_0(\theta)$ *par (1.16).*

Remarque 2.4 *Dans le Théorème 2.3, la solution* θ *est non triviale (i.e.* $\theta \neq 0$*) pourvu que*

$$f_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\,(0)\, J_{\tau_k(0)} + \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l\,(0)\, J'_{\sigma_l} \neq 0 \tag{2.6}$$

comme c'est le cas quand $\|f_0\|_1 \neq 0$*. Pour cette raison* θ *dans le Théorème 2.1 est non triviale . Pour prouver le Théorème 2.3 nous allons montrer que* F *est une contraction par rapport à la norme variation totale sur* B_{r_0}*. De plus, sous les conditions du Théorème 2.3,* *pour tout* $\theta_0 \in B_{r_0}$*, les itérations* $\{F^n(\theta_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *convergent uniformément vers la solution* θ *avec la norme supremum* $\|\theta - F^n(\theta_0)\|_\infty$ *bornée par (voir(1.4))*

$$\|\theta - F^n(\theta_0)\|_\infty \leq v(\theta - F^n(\theta_0)) \leq \frac{2\lambda^n r_0}{1-\lambda}$$

pour $\lambda = q(r_0)$.

Nous allons prouver Théorème 2.3 dans la section 2.3. Pour $\theta' = \theta$ on a $p(r) = p_\star(r) = Tr$. Le graphe de $p(r)$ pour $r > 0$ ne rencontre pas celui de l'identité et donc le Théorème 2.3 n'est pas applicable ici. En fait, l'équation n'admet aucune solution non triviale T-anti-périodique pour $T > 0$ quelconque, comme mentionné dans l'introduction générale. D'autre part, pour $\theta' = \cos\omega t + \theta$ on a $p(r) = 2/\omega + Tr$ et donc le graphe de p intersecte celui de l'identité à $r_0 = 2/\omega(1-T)$ lorsque $0 < T < 1$. Dans ce cas on a $q(r_0) = p'(r_0) = T < 1$. Ainsi le théorème garantit l'existence d'une solution différentiable T-anti-périodique lorsque $0 < T < 1$. En réalité, il existe une telle solution pour tout $T > 0$, comme mentionné dans l'introduction générale. Donc, Théorème 2.3 donne uniquement des conditions suffisantes pour l'existence de solutions anti-périodique. Cependant, ces conditions peuvent être difficiles à obtenir, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 2.5 *Considérons*

$$\theta'(t) = (2t - T) + \sum_{j\in\mathbb{N}} (2t-T)^{j+1}\theta^j(t) + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\theta)\, J_{\tau_k(\theta)}(t) + \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta)\, J'_{\sigma_l}(t) \tag{2.7}$$

pour

$$a_k(\theta) = \frac{\sin\theta(T/k))}{k^2},\ \tau_k(\theta) = \frac{T}{2}\cos^2\theta(T/k),\ b_l(\theta) = \frac{\sin\theta(T/l))}{100l^2} \tag{2.8}$$

et $\sigma_l \in [0, T)$. *En choisissant* $\alpha_k = a'_k = 1/k^2$, $\beta_l = b'_l = 1/100l^2$ *et* $\tau'_k = T$ *on obtient* $A = A' = \zeta(2) = \pi^2/6$, $B = B' = \zeta(2)/100 = \pi^2/600$ *et* $C = T\pi^2/6$. *Puisque* $f_j(t) = (2t-T)^{j+1}$ *alors*

$$\|f_j\|_1 = \frac{T^{j+1}}{j+2}$$

pour tout $j \in \{0, 1, 2, ...\}$ *et donc* $\rho = 1/T$. *On a d'après (2.4) et (2.5) les fonctions continues monotones croissantes*

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{T}{2}(T+A) + T\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{T^{j+1}}{j+2} r^j + B \\ &= \frac{1}{2}(T^2 + T\frac{\pi^2}{6}) - \frac{1}{r^2}\left[\ln(1-Tr) + Tr + \frac{(Tr)^2}{2}\right] + \frac{\pi^2}{600} \\ &= T\pi^2/12 - \left[\ln(1-Tr) + Tr\right]/r^2 + \pi^2/600 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q(r) &= p'(r) + \frac{T\pi^2}{6}(1+4T) + \frac{\pi^2}{600} \\ &= 2\left[\ln(1-Tr) + Tr\right]/r^3 + T^2/(r - Tr^2) + T\pi^2(1+2T)/6 + \pi^2/600 \end{aligned}$$

pour $0 < r < 1/T$. *Par exemple, si on prend* $T = 0.1$ *et* $r_0 = 1$, *alors* $0 < r_0 < 1/T$, $p(r_0) = 0.30406 < r_0$ *et* $q(r_0) = 0.21423 < 1$. *Donc, d'après Théorème 2.3, (2.7) avec* $T = 0.1$ *admet, dans la boule* $B_{p(r_0)}$, *une unique solution non triviale* θ. *De plus, cette solution est telle que* $\theta - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J_{\sigma_l} \in AC_{Tap}$, $\theta' - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J'_{\sigma_l} \in NBV_{Tap}$ *et* $v(\theta) \leq 0.30406$.

Exemple 2.6 *Considérons, pour* ω *donné dans (1.5),*

$$\theta'(t) = \cos(\omega t) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \cos^{j+1}(\omega t)\theta^j(t) + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\theta) J_{\tau_k(\theta)}(t) \tag{2.9}$$

où

$$a_k(\theta) = \frac{\sin\theta(T/k))}{k^2}, \ \tau_k(\theta) = \frac{T}{2}\cos^2\theta(T/k), \ b_l(\theta) = 0$$

et $\sigma_l \in [0, T)$ *pour tout* $j, k, l \in \mathbb{N}$. *En choisissant* $\alpha_k = a'_k = 1/k^2$, $\beta_l = b'_l = 0$ *et* $\tau'_k = T$ *on obtient* $A = A' = \zeta(2) = \pi^2/6$, $B = B' = 0$ *et* $C = T\pi^2/6$. *Puisque* $f_j(t) = \cos^{j+1}(\omega t)$ *alors*

$$\|f_0\|_1 = \frac{2}{\pi}$$

et, d'après les intégrales de Wallis,

$$\|f_j\|_1 = \frac{2}{\pi} W_{j+1}$$

où

$$W_n(t) = \begin{cases} 4^p (p!)^2/(2p+1)! & \text{si} \quad n = 2p+1 \\ \pi(2p)!/2(p!)^2 4^p & \text{si} \quad n = 2p \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$*. Il est facile de voir que* $\rho_t = 1/|\cos(\omega t)|$ *et ainsi* $\rho = 1$*. Donc (2.4) et (2.5) deviennent*

$$p(r) = T\left(\frac{2}{\pi} + \frac{A}{2}\right) + \frac{2T}{\pi} \sum_{j \in \mathbb{N}} W_{j+1} r^j$$

et

$$q(r) = p'(r) + \frac{T\pi^2}{6}(1+2T) = \frac{2T}{\pi} \sum_{j \in \mathbb{N}} j W_{j+1} r^{j-1} + \frac{T\pi^2}{6}(1+2T)$$

pour $0 < r < 1$*. Pour* $T > 0$ *assez petit, on peut trouver* $r_0 \in (0,1)$ *tel que* $p(r_0) \leq r_0$ *et* $q(r_0) < 1$ *simultanément. Ainsi d'après Théorème 2.3 il existe pour tout* $T > 0$ *assez petit une unique solution non triviale* $\theta \in AC_{Tap}$ *de (2.9) sur* $[0,T]$ *telle que* $\theta' \in NBV_{Tap}$ *et* $v(\theta) \leq p(r_0)$*.*

Si (3) est de la forme

$$\theta' = f_0 + f_1 \theta^j + f_2 \theta^2 + f_3 \theta^3 + \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k(\theta) J_{\tau_k(\theta)} + \sum_{l \in \mathbb{N}} b_l(\theta) J'_{\sigma_l} \tag{2.10}$$

pour $f_3 \neq 0$ alors $\rho = \infty$. Donc, pour tout $r > 0$, (2.4) et (2.5) deviennent

$$p(r) = T\left(A/2 + \|f_0\|_1 + \|f_1\|_1 r + \|f_2\|_1 r^2 + \|f_3\|_1 r^3\right) + B \tag{2.11}$$

et

$$q(r) = T\left(A' + 2C + \|f_1\|_1 + 2\|f_2\|_1 r + 3\|f_3\|_1 r^2\right) + B' \tag{2.12}$$

respectivement. Supposons que le graphe de $p : (0,\infty) \to (0,\infty)$ rencontre celui de l'identité $\iota(r) = r$ à un point $r_0 > 0$, que nous supposons être le plus petit de ces points d'intersection. Or, le graphe de la fonction monotone croissante p intersecte celui de l'identité $\iota(r) = r$ à $r_0 > 0$ si et seulement si, il existe un point $\bar{r} \geq r_0$ tel que $p'(\bar{r}) = 1$ et $p(\bar{r}) \leq \bar{r}$ simultanément. D'après la formule quadratique, il existe $\bar{r}$ tel que $p'(\bar{r}) = 1$ si et seulement si $T\|f_1\|_1 < 1$, et dans ce cas

$$\bar{r} = \left(-T\|f_2\|_1 + \sqrt{T^2\|f_2\|_1^2 + 3T(1 - T\|f_1\|_1)\|f_3\|_1}\right) /3T\|f_3\|_1. \tag{2.13}$$

Ainsi, si $T\|f_1\|_1 < 1$ et si $p(\bar{r}) \leq \bar{r}$ et $q(\bar{r}) < 1$ pour $\bar{r}$ donné par (2.13) alors (2.10) remplit les conditions du Théorème 2.3 et donc admet, dans $B_{p(\bar{r})}$, une unique solution non triviale θ telle que $\theta - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta)J_{\sigma_l} = F_0(\theta) \in B_{p_0(r_0)} \cap AC_{Tap}$ et $\theta' - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta)J'_{\sigma_l} \in NBV_{Tap}$.

Exemple 2.7 *Considérons, pour ω donné dans (1.5),*

$$\theta' = \cos\omega t + \theta + J_0\left(t\right)\theta^2 + \left(\sin 2\omega t\right)\theta^3 + \sum_{k=1}^{m} a_k\left(\theta\right) J_{\tau_k(\theta)}\left(\theta\right) \tag{2.14}$$

où a_k et τ_k sont encore donnés par (2.8). Ici, nous avons $f_0(t) = \cos\omega t$, $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = J_0(t)$ et $f_3(t) = \sin 2\omega t$ et donc $\|f_0\|_1 = \|f_3\|_1 = 2/\pi$ et $\|f_1\|_1 = 2\|f_2\|_1 = 1$. Encore, nous avons $B = B' = 0$ et en choisissant $\alpha_k = a'_k = 1/k^2$ et $\tau'_k = T$ on obtient $A = A' = \zeta(2) = \pi^2/6$ et $C = T\pi^2/6$. Les équations (2.11) et (2.12) deviennent maintenant

$$p(r) = T\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi^2}{12} + r + \frac{1}{2}r^2 + \frac{2}{\pi}r^3\right)$$

et

$$q(r) = T\left(1 + r + \frac{6}{\pi}r^2 + \frac{\pi^2}{6}(1 + 2T)\right).$$

Ainsi, si $T < 1$ (i.e. $T < 1/\|f_1\|_1$), alors $p'(\bar{r}) = 1$ pour

$$\bar{r} = \frac{-T\pi + \sqrt{T^2\pi^2 + 24T\pi(1 - T)}}{12T} = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 24\pi(T^{-1} - 1)}}{12}$$

d'après (2.13). De plus, $p(\bar{r}) \leq \bar{r}$ et $q(\bar{r}) < 1$ pour tout $T > 0$ assez petit. Donc, (2.14) est dans les conditions du Théorème 2.3 pour tout $T \in (0, 1)$ assez petit. En d'autres termes, *pour tout $T \in (0,1)$ assez petit, (2.14) admet une unique solution non triviale $\theta \in AC_{Tap}$ telle que $\theta' \in NBV_{Tap}$ et $v(\theta) \leq \bar{r}$.*

Supposons maintenant que (3) est de la forme

$$\theta' = f_0 + f_1\theta^j + f_2\theta^2 + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\theta)\, J_{\tau_k(\theta)} + \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta)\, J'_{\sigma_l} \tag{2.15}$$

pour $f_0 \neq 0$ et $f_2 \neq 0$. Pour tout $r > 0$, (2.4) et (2.5) deviennent

$$p(r) = T\left(A/2 + \|f_0\|_1 + \|f_1\|_1 r + \|f_2\|_1 r^2\right) + B$$

et

$$q(r) = p'(r) + T\,(A' + 2C) + B' = T\,(A' + 2C + \|f_1\|_1 + 2\|f_2\|_1 r) + B'$$

respectivement. Supposons que le graphe de la fonction monotone croissante $p : (0,\infty) \to (0,\infty)$ intersecte celui de l'identité en un point $r_0 > 0$, que nous supposons être le plus petit de tous ces points d'intersection. Un tel point r_0 existe si et seulement si, il existe $\bar{r} > 0$ tel que $p'(\bar{r}) = 1$ et $p(\bar{r}) \leq \bar{r}$. Dans ce cas $r_0 \leq \bar{r}$. Puisque la condition $p'(\bar{r}) = 1$ entraîne

$$\bar{r} = (1 - T\|f_1\|_1)\,/2T\|f_2\|_1 \tag{2.16}$$

alors $\bar{r} > 0$ existe si et seulement si $0 < T\|f_1\|_1 < 1$. Ainsi, quand $0 < T\|f_1\|_1 < 1$, si $p(\bar{r}) \leq \bar{r}$ et $q(\bar{r}) < 1$ pour $\bar{r}$ donné par (2.16) alors (2.15) remplit les conditions du Théorème 2.3 et donc on a l'existence, dans $B_{p(\bar{r})}$, d'une unique solution non triviale θ telle que $\theta - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J_{\sigma_l} = F_0(\theta) \in B_{p_0(r_0)} \cap AC_{Tap}$ et $\theta' - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J'_{\sigma_l} \in NBV_{Tap}$.

Exemple 2.8 *Considérons, pour ω donné dans (1.5),*

$$\theta' = \cos\omega t + \theta + J_0(t)\,\theta^2 + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\, J_{\tau_k(\theta)}(\theta) \tag{2.17}$$

où a_k et τ_k sont donnés par (2.8). Alors $f_0(t) = \cos\omega t$, $f_1(t) = 1$ et $f_2(t) = J_0(t)$ et donc $\|f_0\|_1 = 2/\pi$ et $\|f_1\|_1 = 2\|f_2\|_1 = 1$. On a encore $B = B' = 0$. En choisissant

$\alpha_k = a'_k = 1/k^2$ et $\tau'_k = T$ on obtient $A = A' = \zeta(2) = \pi^2/6$ et $C = T\pi^2/6$. Donc nous avons

$$p(r) = T\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi^2}{12} + r + \frac{1}{2}r^2\right)$$

et

$$q(r) = T\left(1 + r + \frac{\pi^2}{6}(1 + 2T)\right).$$

En raisonnant comme dans l'exemple 2.7, il s'ensuit que pour tout $T \in (0,1)$ assez petit, (2.17) admet une unique solution non triviale $\theta \in AC_{Tap}$ telle que $\theta' \in NBV_{Tap}$ et $v(\theta) \leq p(\bar{r})$ où

$$\bar{r} = (1 - T)/T$$

d'après (2.16).

Si on suppose qu'il n'y a pas de sauts en θ et θ' (i.e. $A/2 = (A' + 4C') = B = B' = 0$), (3) devient (1), p se réduit à $p_\star$ donné par (2.1) et $q = p'_\star$. D'après Théorème 2.3 on obtient Théorème 2.1 et Corollaire 2.2. La condition $q(r_0) < 1$ devient inutile quand $p_\star(r) - r$ a exactement deux racines distinctes strictement positives. En fait, si on prend pour r_0 la plus petite des deux, alors le graphe de $p_\star$ intersecte celui de l'identité $\iota(r) = r$ à r_0 ayant pour pente $p'_\star(r_0) < 1$ (i.e. $q(r_0) < 1$). De plus, pour F donné par (1.17) et $\theta_0 \in B_{r_0}$, les itérations $\{F^n(\theta_0)\}_{n=1}^{\infty}$ convergent uniformément vers θ avec la norme uniforme $\|\theta - F^n(\theta_0)\|_\infty$ bornée par

$$\|\theta - F^n(\theta_0)\|_\infty \leq \frac{2\lambda^n r_0}{1 - \lambda}$$

où $\lambda = p'_\star(r_0)$.

2.3 Preuve du Théorème 2.3

D'après (1.17) et A2 on a, pour tout $\theta \in NBV_{Tap}(2T)$,

$$v\left(F_0\left(\theta\right)\right) \leq T\|f_0\|_1 + \sum_{j\in\mathbb{N}} v\left(G_j\left(\theta\right)\right) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k v\left(H_k\left(\theta\right)\right)$$

où, via (1.20) et (1.21),

$$v\left(G_j\left(\theta\right)\right) = T\|f_j\theta^j\|_1 \leq T\|f_j\|_1 v\left(\theta\right)^j$$

et via (1.19)

$$v\left(H_k\left(\theta\right)\right) = T\|J_{\tau_k(\theta)}\|_1 = \frac{T}{2}. \tag{2.18}$$

Ainsi, pour tout $r \in (0, \rho)$ et tout $\theta \in B_r(2T)$, on a

$$v(F_0(\theta)) \leq p_0(r)$$

pour p_0 donné par (2.3) et donc l'opérateur F_0 donné par (1.16) est telle que

$$F_0 : B_r(2T) \to B_{p_0(r)}(2T) \cap AC_{Tap}\left(2T\right)$$

d'après Corollaire 1.17. Nous avons aussi

$$v(b_l(\theta)J_{\sigma_l}) \leq \beta_l v(J_{\sigma_l}) = \beta_l. \tag{2.19}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} v(F(\theta)) &\leq v\left(F_0\left(\theta\right)\right) + v(\sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta)J_{\sigma_l}) \\ &\leq p_0(r) + B = p(r) \end{aligned}$$

pour tout $\theta \in NBV_{Tap}\left(2T\right)$ tel que $v(\theta) \leq r < \rho$, ce qui prouve le corollaire suivant.

Corollaire 2.9 *Si $\theta \in B_r(2T)$ pour $r \in (0, \rho)$ alors*

$$v\left(F\left(\theta\right)\right) \leq p\left(r\right)$$

où p est donné par (2.4).

Pour $\theta_1, \theta_2 \in B_r(2T)$ arbitraire, on a

$$v\left(F_0\left(\theta_2\right) - F_0\left(\theta_1\right)\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} v\left(G_j\left(\theta_2\right) - G_j\left(\theta_1\right)\right) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k v\left(H_k\left(\theta_2\right) - H_k\left(\theta_1\right)\right).$$

L'identité $x^j - y^j = \left(\sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k} y^k\right)(x-y)$ avec (1.20) et (1.21) entrainent

$$v\left(G_j\left(\theta_2\right) - G_j\left(\theta_1\right)\right) = T\|f_j\theta_2^j - f_j\theta_1^j\|_1 \leq T\|f_j \sum_{k=0}^{j-1} \theta_2^{j-1-k}\theta_1^k\|_1 v\left(\theta_2 - \theta_1\right)$$

et donc

$$v\left(G_j\left(\theta_2\right) - G_j\left(\theta_1\right)\right) \leq T\|f_j\|_1 j r^{j-1} v\left(\theta_2 - \theta_1\right).$$

En utilisant le fait que

$$a_k(\theta_2)H_k\left(\theta_2\right) - a_k(\theta_1)H_k\left(\theta_1\right) = (a_k(\theta_2) - a_k(\theta_1))H_k(\theta_2) + a_k(\theta_1)(H_k(\theta_2) - H_k(\theta_1))$$

on obtient

$$\begin{aligned} v\left(a_k(\theta_2)H_k\left(\theta_2\right) - a_k(\theta_1)H_k\left(\theta_1\right)\right) \quad &\leq \quad |a_k(\theta_2) - a_k(\theta_1)|v(H_k(\theta_2)) \\ &\quad + |a_k(\theta_1)|v(H_k(\theta_2) - H_k(\theta_1)). \end{aligned}$$

D'après (1.15), (1.21) et (1.22) on a

$$v(H_k(\theta_2) - H_k(\theta_1)) = T\|J_{\tau_k(\theta_2)} - J_{\tau_k(\theta_1)}\|_1 \leq 2T|\tau_k(\theta_2) - \tau_k(\theta_1)|$$

et à partir de là s'ensuit que

$$v(H_k(\theta_2) - H_k(\theta_1)) \leq 2T\tau_k' v(\theta_2 - \theta_1)$$

via A3. Ainsi

$$v(a_k(\theta_2)H_k\left(\theta_2\right) - a_k(\theta_1)H_k\left(\theta_1\right)) \leq T(A' + 2C) \tag{2.20}$$

via A2 et donc

$$v\left(F_0\left(\theta_2\right) - F_0\left(\theta_1\right)\right) \leq q_0(r)v(\theta_2 - \theta_1)$$

pour $q_0 = q - B'$.

D'après A4 et $\nu(J_{\sigma_l}) = 1$ on a

$$v(b_l(\theta_2)J_{\sigma_l} - b_l(\theta_1)J_{\sigma_l}) \leq |b_l(\theta_2) - b_l(\theta_1)|v(J_{\sigma_l}) \leq b_l' v(\theta_2 - \theta_1)$$

et donc, si $0 < r < \rho$, alors

$$v(F(\theta)) \leq v(F_0(\theta)) + \sum_{l\in\mathbb{N}} v(b_l(\theta)J_{\sigma_l}) \leq p_0(r) + B = p(r)$$

et

$$\begin{aligned} v(F(\theta_2) - F(\theta_1)) &\leq v(F_0(\theta_2) - F_0(\theta_1)) + B'v(\theta_2 - \theta_1) \\ &\leq (q_0(r) + B')\, v(\theta_2 - \theta_1) \\ &= q(r)v(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

pour tout $\theta \in B_r(2T)$. Donc, si $0 < r < \rho$, alors $F : B_r(2T) \to B_{p(r)}(2T)$ et F est une contraction sur $B_r(2T)$ quand $q(r) < 1$. D'après Corollaire 1.17, nous avons $F(\theta) - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta)J_{\sigma_l} = F_0(\theta) \in AC_{Tap}(2T)$ pour tout $\theta \in B_r(2T)$. Théorème 2.3 s'ensuit maintenant par le principe de contraction.

2.4 Une méthode plus raffinée

D'après (1.21) on a, pour ε_0 donné par (1.14),

$$v\left(\left(f_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j\theta^j\right) * \varepsilon_0'\right) = T\|f_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j\theta^j\|_1 \tag{2.21}$$

pour tout $\theta \in NBV_{Tap}(2T)$ tel que $v(\theta) < \rho$. Pour tout $r \in (0, \rho)$, la fonction

$$\varphi_r(t) = \sup\left\{|f_0(t) + \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(t)x^j| : -r \leq x \leq r,\, x \in \mathbb{Q}\right\}$$

est Lebesgue intégrable [43] et donc on peut définir la fonction monotone croissante

$$\chi(r) = T\|\varphi_r\|_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2T} \varphi_r(t)\, dt.$$

Par rapport à cette notation (2.21) entraine

$$\nu\left(\left(f_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j\theta^j\right) * \varepsilon_0'\right) \leq \chi(r)$$

pour tout $\theta \in B_r(2T)$. Ceci, combiné avec (2.18) et (2.19), donnent

$$v(F_0(\theta)) \leq P_0(r) \qquad (\theta \in B_r(2T)) \tag{2.22}$$

et

$$v(F(\theta)) \leq P(r) \qquad (\theta \in B_r(2T)) \tag{2.23}$$

pour

$$P_0(r) = \chi(r) + \frac{TA}{2} \tag{2.24}$$

et

$$P(r) = P_0(r) + B = \chi(r) + \frac{TA}{2} + B. \tag{2.25}$$

D'après Corollaire 1.17, (2.22) et (2.23) on a $F_0 : B_r(2T) \to B_{P_0(r)}(2T) \cap AC_{Tap}(2T)$ et $F : B_r(2T) \to B_{P(r)}(2T)$. De façon similaire, pour tout $r \in (0, \rho)$, la fonction

$$\psi_r(t) = \sup\left\{ |\frac{d}{dz}\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(t)z^j| : -r \leq z \leq r,\ z \in \mathbb{Q}\right\}$$

est Lebesgue intégrable et donc on peut introduire la fonction

$$\phi(r) = T\|\psi_r\|_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2T} \psi_r(t)\, dt$$

qui est monotone croissante en $r > 0$. D'après (1.21) on a

$$v\left(\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(\theta_2^j - \theta_1^j)\right) * \varepsilon_0'\right) = T\left\|\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(\theta_2^j - \theta_1^j)\right\|_1$$

pour tout $\theta_1, \theta_2 \in B_r(2T)$. Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le théorème de la valeur moyenne entraine

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(t)(\theta_2^j(t) - \theta_1^j(t)) = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(t) j \theta_t^{j-1}\right)(\theta_2(t) - \theta_1(t))$$

et donc

$$\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(t)(\theta_2^j(t) - \theta_1^j(t))\right| \leq \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(t) j \theta_t^{j-1}\right| v(\theta_2 - \theta_1)$$

pour un certain $\theta_t \in \mathbb{R}$ entre $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ (et donc entre $-r$ et r). Il s'en suit alors que

$$v\left(\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(\theta_2^j - \theta_1^j)\right) * \varepsilon_0'\right) \leq \phi(r) v(\theta_2 - \theta_1)$$

qui, combiné avec (2.20), entrainent

$$v(F(\theta_2) - F(\theta_1)) \leq Q(r) v(\theta_2 - \theta_1) \qquad (\theta_1, \theta_2 \in B_r(2T))$$

pour

$$Q(r) = \phi(r) + T(A' + 2C) + B'. \tag{2.26}$$

Le principe de contraction entraine maintenant le résultat suivant.

Théorème 2.10 *Étant donnés les équations (3) et (2) simultanément sur $[0, T]$ soumises à A1-A5, soient $P_0(r)$, $P(r)$ et $Q(r)$ définies par (2.24), (2.25) et (2.26) et B_r par (1.8) pour tout $r \in (0, \rho)$ où ρ est donné par (2.2). S'il existe $R_0 \in (0, \rho)$ tel que $P(R_0) \leq R_0$ et $Q(R_0) < 1$ simultanément alors il existe, dans $B_{P(R_0)}$, une unique solution θ de (3) sur $[0, T]$. De plus, $\theta - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J_{\sigma_l} = F_0(\theta) \in B_{P_0(R_0)} \cap AC_{Tap}$ et $\theta' - \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta) J'_{\sigma_l} \in NBV_{Tap}$ où J_{σ_l} est donné par (1.13) et $F_0(\theta)$ par (1.16).*

Dans le contexte du Théorème 2.10, θ est non triviale si et seulement si (2.6) est satisfait. De plus, pour F sur NBV_{Tap} donné par (1.17) et $\theta_0 \in B_{R_0}$, les itérations $\{F^n(\theta_0)\}_{n=1}^{\infty}$ convergent uniformément vers θ avec la norme uniforme $\|\theta - F^n(\theta_0)\|_\infty$ bornée par

$$\|\theta - F^n(\theta_0)\|_\infty \leq \frac{2\lambda^n R_0}{1 - \lambda}$$

pour $\lambda = Q\,(R_0)$.

On a

$$\varphi_r(t) \leq |f_0(t)| + \sum_{j\in\mathbb{N}} |f_j(t)| r^j$$

et donc

$$\chi(r) \leq \|f_0\|_1 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \|f_j\|_1 r^j.$$

À partir de là on obtient les deux inégalités

$$P_0(r) \leq p_0(r) \qquad P(r) \leq p(r) \qquad (0 < r < \rho). \tag{2.27}$$

De façon similaire nous avons

$$Q(r) \leq q(r) \qquad (0 < r < \rho). \tag{2.28}$$

L'exemple suivant montre que, dans certains cas, Théorème 2.3 et Théorème 2.10 donne le même résultat dans le sens que $P = p$ et $Q = q$.

Exemple 2.11 *Dans le contexte de l'exemple 2.5, (2.7) peut être écrit comme*

$$\theta'(t) = \frac{2t-T}{1-(2t-T)\theta(t)} + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\,(\theta)\, J_{\tau_k(\theta)}(t) + \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l\,(\theta)\, J'_{\sigma_l}(t)$$

pourvu que $(2t-T)\theta(t) < 1$. *Ainsi* $\rho_t = 1/|2t-T|$ *et donc* $\rho = 1/T$. *Il s'ensuit alors que*

$$\varphi_r(t) = \sup\left\{\left|\frac{2t-T}{1-(2t-T)x}\right| : -r \leq x \leq r,\, x \in \mathbb{Q}\right\} = \frac{|T-2t|}{1-(T-2t)r}$$

et

$$\psi_r(t) = \sup\left\{\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{2t-T}{1-(2t-T)z}\right)\right| : -r \leq z \leq r,\, z \in \mathbb{Q}\right\} = \frac{(2t-T)^2}{(1-(T-2t)r)^2}$$

pour tout $t \in [0, 2T]$ *et tout* $r \in (0, 1/T)$. *Ainsi nous avons*

$$\begin{aligned} \chi(r) &= 2\int_0^{T/2} \frac{T-2t}{1-(T-2t)r} dt \\ &= -\left[\ln(1-Tr) + Tr\right]/r^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi(r) &= 2\int_0^{T/2} \frac{(T-2t)^2}{(1-(T-2t)r)^2}dt \\ &= 2\left[\ln(1-Tr)+Tr\right]/r^3 + T^2/(r-Tr^2)\end{aligned}$$

et donc

$$P(r) = T\pi^2/12 - \left[\ln(1-Tr)+Tr\right]/r^2 + \pi^2/600$$

et

$$Q(r) = 2\left[\ln(1-Tr)+Tr\right]/r^3 + T^2/(r-Tr^2) + T\pi^2(1+2T)/6 + \pi^2/600$$

pour tout $r < 1/T$. *Donc* $P = p$ *et* $Q = q$, *ce qui montre qu'il n'y a aucun avantage à utiliser le raffinement de cette section pour cet exemple.*

Le prochain exemple montre que Théorème 2.10 peut entrainer des résultats plus précis que Théorème 2.3 dans le sens que $P \neq p$ et/ou $Q \neq q$.

Exemple 2.12 *Pour tout* $t \in [0, T]$, *considérons l'équation*

$$\theta'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2t-T)^{2n+2}}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}(t) + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(\theta)\, J_{\tau_k(\theta)}(t) + \sum_{l\in\mathbb{N}} b_l(\theta)\, J'_{\sigma_l}(t) \qquad (2.29)$$

où

$$a_k(\theta) = \frac{\sin\theta(T/k))}{k^2}, \quad \tau_k(\theta) = \frac{T}{2}\cos^2\theta(T/k) \quad , b_l(\theta) = \frac{\sin\theta(T/l))}{100l^2}$$

et $\sigma_l \in [0, T)$. *En choisissant* $\alpha_k = a'_k = 1/k^2$, $\beta_l = b'_l = 1/100l^2$ *et* $\tau'_k = T$ *on obtient* $A = A' = \zeta(2) = \pi^2/6$, $B = B' = \zeta(2)/100 = \pi^2/600$ *et* $C = T\pi^2/6$. *Nous avons aussi* $\rho_t = \infty$ *pour tout* $t \in [0, T]$ *et donc* $\rho = \infty$. *Ici, chaque* f_j *peut être prolongé à une fonction* T*-périodique sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$f_j(t) = \begin{cases} (-1)^n(2t-T)^{2n+2}/(2n+1)! & \text{si } \; j = 2n+1,\; 0 \le t \le T \\ 0 & \text{si } \; j = 2n,\; 0 \le t \le T \end{cases}$$

et donc

$$\|f_j\|_1 = \begin{cases} T^{2n+2}/(2n+1)!(2n+3) & \text{si} \quad j = 2n+1 \\ 0 & \text{si} \quad j = 2n. \end{cases}$$

Ainsi

$$p_0(r) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{T^{2n+2}}{(2n+1)!(2n+3)} r^{2n+1} + \frac{T\pi^2}{12}, \tag{2.30}$$

$$p(r) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{T^{2n+2}}{(2n+1)!(2n+3)} r^{2n+1} + \frac{T\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{600} \tag{2.31}$$

et

$$q(r) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{T^{2n+2}}{(2n)!(2n+3)} r^{2n} + \frac{T\pi^2(1+2T)}{6} + \frac{\pi^2}{600} \tag{2.32}$$

pour tout $r > 0$*. Évidemment*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2t-T)^{2n+2}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = (2t-T)\sin\left((2t-T)x\right)$$

pour tout $t \in [0,T]$ *et donc on a pour tout* $t \in [0, T/2]$ *et* $t_m = \max\{0, (T/2 - \pi/4r)\}$

$$\begin{aligned} \varphi_r(t) &= \sup\left\{|(2t-T)\sin\left((2t-T)x\right)| : -r \le x \le r,\, x \in \mathbb{Q}\right\} \\ &= \begin{cases} (T-2t)\sin((T-2t)r) & \text{si} \quad t_m < t \le T/2 \\ T-2t & \text{si} \quad 0 \le t \le t_m \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_r(t) &= \sup\left\{\left|\frac{d}{dz}\left((2t-T)\sin\left((2t-T)z\right)\right)\right| : -r \le z \le r,\, z \in \mathbb{Q}\right\} \\ &= \sup\left\{(2t-T)^2\left|\cos((2t-T)z)\right| : -r \le z \le r,\, z \in \mathbb{Q}\right\} \\ &= (2t-T)^2 \end{aligned}$$

pour tout $r > 0$*. À partir de là, on obtient alors*

$$\begin{aligned} \chi(r) &= 2\int_0^{t_m} (T-2t)\,dt + 2\int_{t_m}^{T/2} (T-2t)\sin((T-2t)r)\,dt \\ &= 2t_m(T-t_m) - 2\frac{d}{dr}\int_{t_m}^{T/2} \cos((T-2t)r)\,dt \\ &= 2t_m(T-t_m) - \frac{1}{r}(T-2t_m)\cos((T-2t_m)r) + \frac{1}{r^2}\sin((T-2t_m)r) \\ &= \begin{cases} (\sin Tr - Tr\cos Tr)/r^2 & t_m = 0 \\ T^2/2 - \pi^2/8r^2 + 1/r^2 & 0 < t_m \le T/2 \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\phi(r) = \frac{T^3}{3}$$

pour tout $r \in (0, \infty)$ *et donc*

$$P_0(r) = T\pi^2/12 + \begin{cases} (\sin Tr - Tr\cos Tr)/r^2 & 0 < r < \pi/2T \\ T^2/2 - \pi^2/8r^2 + 1/r^2 & r \geq \pi/2T \end{cases}$$

via (2.24),

$$P(r) = T\pi^2/12 + \frac{\pi^2}{600} + \begin{cases} (\sin Tr - Tr\cos Tr)/r^2 & 0 < r < \pi/2T \\ T^2/2 - \pi^2/8r^2 + 1/r^2 & r \geq \pi/2T \end{cases}$$

via (2.25) et

$$Q(r) = \frac{T^3}{3} + \frac{T\pi^2(1+2T)}{6} + \frac{\pi^2}{600}$$

via (2.26). Pour $T > 0$ *quelconque, il existe un point* $R_0 > 0$ *où le graphe de* P *intersecte celui de l'identité. Il s'ensuit maintenant d'après Théorème 2.10 et (2.6) que (2.29) admet, dans* $B_{P(R_0)}$*, une unique solution non triviale* T*-anti-périodique pour tout* T *tel que*

$$T^3/3 + T\pi^2(1+2T)/6 + \pi^2/600 < 1.$$

D'après (2.27), (2.30) et (2.31) on a $P_0(r) < p_0(r)$ *et* $P(r) < p(r)$*. Ainsi, si le graphe de* p *intersecte celui de l'identité à un point* $r_0 > 0$*, alors* $R_0 < r_0$ *et donc* $B_{P_0(R_0)} \subsetneq B_{p_0(r_0)}$ *et* $B_{P(R_0)} \subsetneq B_{p(r_0)}$*. De plus, via (2.28) et (2.32) on obtient* $Q(r) < q(r)$ *pour tout* $r > 0$*. Donc, pour cet exemple, le raffinement de cette section donne des résultats plus précis.*

CHAPITRE 3

Solution périodique de l'équation différentielle d'Abel avec des discontinuités dépendantes de l'état

3.1 Introduction

Étant donnés $T > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, on se propose dans ce chapitre d'étudier l'existence d'une solution T-périodique de (4) sur $\mathbb{R}$ avec $\{f_j\}_{j=0}^{m}$ dans l'espace $NBV(T)$. D'après la section 1.3, le problème se réduit à trouver l'existence d'un point fixe θ_μ de (1.27) pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$ qui vérifie (1.25).

Par exemple, l'équation logistique de Verhulst $\theta' = \rho_1\theta - \rho_2\theta^2$ pour $\rho_1 > 0$ et $\rho_2 > 0$ devient $\theta'_\mu = \rho_1(\mu + \theta_\mu) - \rho_2(\mu + \theta_\mu)^2$. En choisissant $\theta_\mu = 0$ pour tout μ, on obtient (1.24). En prenant $\mu = 0$ ou $\mu = \rho_1/\rho_2$ on obtient (1.25). Ainsi, les fonctions constantes $\theta = 0$ et $\theta = \rho_1/\rho_2$ sont des solutions périodiques de l'équation logistique. Il est bien connu que ce sont les seules solutions périodiques de cette équation.

Dans le cas impulsif, le problème plus général revient à étudier (5) à la place de (4), qui à son tour se réduit à trouver l'existence d'un point fixe θ_μ de (1.31) pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$ qui vérifie (1.33). Dans ce travail, on obtient des conditions simples qui garantissent l'existence d'une solution T-périodique de (5) qui devient (4) dans le cas sans discontinuités.

3.2 Résultat principal

Avant d'énoncer notre résultat principal, nous introduisons le résultat suivant. Il s'agit d'une généralisation de Proposition 1.16 dans le cas où ε_0 est donné par (1.5).

Proposition 3.1 *Si $f \in NBV(T)$ et ε_0 est donné par (1.5) alors $f * {\varepsilon_0}' \in \widetilde{AC}(T)$ et donc*

$$v(f * {\varepsilon_0}') = T\big\|\widetilde{f}\big\|_1 \leq \begin{cases} 2T\|f\|_1 \\ T\|f\|_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

De plus

$$F_\mu : NBV(T) \to \widetilde{AC}(T) \tag{3.2}$$

pour $\mu \in \mathbb{R}$ arbitraire.

Démonstration. Pour $t_0 \in [0, T)$ arbitraire, on a ${\varepsilon_0}'(t_0 - s) = -\varepsilon'_{t_0}(s)$ pour tout $s \in [0, T]$. Ainsi, si $0 \leq t_1 \leq t_2 < T$ alors, d'après (1.4) et le fait que $v(f) = v(\widetilde{f})$, on a

$$|(f * {\varepsilon_0}')(t_2) - (f * {\varepsilon_0}')(t_1)| = \|\widetilde{f}({\varepsilon_{t_2}}' - {\varepsilon_{t_1}}')\|_1 \leq v(\widetilde{f})\|{\varepsilon_{t_2}}' - {\varepsilon_{t_1}}'\|_1$$

où

$$\begin{aligned} \|{\varepsilon_{t_2}}' - {\varepsilon_{t_1}}'\|_1 &= \frac{1}{T}\int_{[t_1,t_2]} |{\varepsilon_{t_2}}' - {\varepsilon_{t_1}}'| + \frac{1}{T}\int_{[0,T]\setminus[t_1,t_2]} |{\varepsilon_{t_2}}' - {\varepsilon_{t_1}}'| \\ &\leq \frac{1}{T}\left(\int_{[t_1,t_2]} T\right) + \frac{1}{T}\left(\int_{[0,T]\setminus[t_1,t_2]} |t_2 - t_1|\right) \\ &\leq 2|t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|(f * \varepsilon_0{}')(t_2) - (f * \varepsilon_0{}')(t_1)| \leq 2v(f)|t_2 - t_1|.$$

Ainsi $f * \varepsilon_0{}' \in \widetilde{AC}(T)$ et donc $v(f * \varepsilon_0{}') = \int_0^T \left|(f * \varepsilon_0{}')'\right| = \int_0^T \left|\widetilde{f}\right| = T\left\|\widetilde{f}\right\|_1 = T\|f - \bar{f}\|_1 \leq 2T\|f\|_1$ entraînant ainsi l'inégalité au-dessus dans (3.1). La seconde inégalité en dessous dans (3.1) vient du fait que $\|\widetilde{f}\|_1 \leq \|\widetilde{f}\|_2 \leq \|f\|_2$. On obtient également (3.2) via (1.27).
■

On peut maintenant énoncer notre résultat principal.

Théorème 3.1 *Supposons $T > 0$, $B_r(T)$ donné par (1.23) pour tout $r \geq 0$, $\{f_j\}_0^m \subset NBV(T)$ avec $f_m \neq 0$ et $p_\mu : [0, \infty) \to [0, \infty)$ donné par*

$$p_\mu(r) = T\|\tilde{f}_0\|_1 + T\sum_{j=1}^{m} \|f_j\|_2 \left(|\mu| + r\right)^j \tag{3.3}$$

pour $\mu \in \mathbb{R}$ arbitraire. Si, pour un μ donné, il existe $r_\mu \geq 0$ tel que $p_\mu(r_\mu) = r_\mu$ et $p'_\mu(r_\mu) < 1$ alors, dans $B_{r_\mu}(T) \cap AC(T)$, il existe une unique solution θ_μ de (1.24). De plus, si (1.25) est satisfait pour ce μ alors $\theta = \mu + \theta_\mu$ est une solution de (4) qui est absolument continue sur les intervalles bornés.

S'il existe $r_0 \geq 0$ tel que $p_0(r_0) = r_0$ et $p'_0(r_0) < 1$ alors, puisque le graphe de p_{μ_2} se trouve au-dessus de celui de p_{μ_1} lorsque $0 \leq \mu_1 < \mu_2$, il existe $\mu' > 0$ tel que $p_{\mu'}(r_{\mu'}) = r_{\mu'}$ et $p'_{\mu'}(r_{\mu'}) = 1$. De plus, pour tout $\mu \in (-\mu', \mu')$, r_μ existe et est tel que $p_\mu(r_\mu) = r_\mu$ et $p'_\mu(r_\mu) < 1$, ce qui va vérifier les conditions du théorème. On a $r_\mu \nearrow r_{\mu'}$ quand $|\mu| \nearrow \mu'$. L'unicité de θ_μ dans le Théorème 3.1 justifie la fonction bien définie (1.34) pour tout $\mu \in (-\mu', \mu')$. Comme nous allons montrer (voir Proposition 3.5), $M(\mu)$ est continue sur $(-\mu', \mu')$. Ainsi, si

$$\inf_{-\mu' \leq \mu \leq \mu'} M(\mu) < 0 < \sup_{-\mu' \leq \mu \leq \mu'} M(\mu) \tag{3.4}$$

alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\mu_0 \in (-\mu', \mu')$ tel que $M(\mu_0) = 0$, et dans ce cas (1.24) et (1.25) sont satisfaits simultanément pour $\mu = \mu_0$. Donc nous avons le résultat suivant.

Corollaire 3.2 *Dans le contexte du théorème, soit*

$$\mu' = \sup\left\{|\mu| : p_\mu(r_\mu) = r_\mu,\ p'_\mu(r_\mu) < 1\right\}.$$

Si (3.4) est vérifié alors il existe $\mu_0 \in (-\mu', \mu')$ tel que la fonction T-périodique $\theta = \mu_0 + \theta_{\mu_0}$ est une solution de (4) qui est absolument continue sur $[0, T]$.

Exemple 3.3 *Considérons l'équation*

$$\theta' = c + \frac{\pi\alpha}{2}\sin\omega t + \beta\theta + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma(\cos\omega t)^2\theta^2 \tag{3.5}$$

avec $\omega = 2\pi/T$, $c \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$. On a $m = 2$, $\overline{f_0} = c$, $\widetilde{f_0} = \pi\alpha(\sin\omega t)/2$, $f_1 = \beta$ et $f_2(t) = 2\sqrt{2/3}\gamma(\cos^2\omega t)$ et donc $\|\widetilde{f_0}\|_1 = \alpha$, $\|f_1\|_2 = \beta$ et $\|f_2\|_2 = \gamma$. Donc (3.3) devient

$$p_\mu(r) = T\alpha + T\beta(|\mu| + r) + T\gamma(|\mu| + r)^2.$$

En écrivant $p_\mu(r_\mu) = r_\mu$ comme

$$|\mu| + p_\mu(r_\mu) = |\mu| + r_\mu$$

on obtient

$$|\mu| + r_\mu = \frac{(1 - T\beta) - \sqrt{(1 - T\beta)^2 - 4T\gamma(T\alpha + |\mu|)}}{2T\gamma} \tag{3.6}$$

pourvu que $T\beta < 1$ et

$$4T\gamma(T\alpha + |\mu|) \leq (1 - T\beta)^2. \tag{3.7}$$

Si $\alpha, \gamma \in (0, \infty)$ sont tels que

$$4T^2\alpha\gamma < (1 - T\beta)^2 \tag{3.8}$$

alors μ' *donné par*

$$\mu' = \frac{(1-T\beta)^2}{4T\gamma} - T\alpha \tag{3.9}$$

se trouve dans $(0,\infty)$ *et (3.7) est vérifié pour tout* $\mu \in [-\mu', \mu']$*. En remplaçant (3.9) dans (3.6) on obtient*

$$|\mu| + r_\mu = \frac{(1-T\beta) - \sqrt{4T\gamma(\mu' - |\mu|)}}{2T\gamma}$$

et donc

$$\mu' + r_{\mu'} = \frac{1-T\beta}{2T\gamma}. \tag{3.10}$$

De là s'ensuit que (puisque, $|\theta_\mu(t)| \leq r_\mu \leq r_{\mu'}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*)*

$$-\frac{1-T\beta}{2T\gamma} \leq \mu + \theta_\mu(t) \leq \frac{1-T\beta}{2T\gamma}$$

pour $\mu \in (-\mu', \mu')$ *et* θ_μ *donné dans le Théorème 3.1. Puisque* $\overline{\theta_\mu} = 0$*, la partie gauche de (1.25) devient la fonction continue en* μ

$$M(\mu) = c + \beta\mu + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\overline{cos^2\omega t(\mu + \theta_\mu)^2}$$

sur $(-\mu', \mu')$*. On a*

$$\inf_{-\mu' \leq \mu \leq \mu'} M(\mu) \leq c - \beta\mu' + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma(\mu' + r_{\mu'})^2 = c - \beta\mu' + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\left(\frac{1-T\beta}{2T\gamma}\right)^2$$

(d'après $\|\cos^2(\omega t)\|_1 = 1/2$ *et (3.10)) et*

$$\sup_{-\mu' \leq \mu \leq \mu'} M(\mu) \geq c + \beta\mu'.$$

Supposons que

$$T\beta < 1 < \sqrt{6}T\beta$$

où la première inégalité est simplement la condition imposée ci-dessus pour obtenir (3.6). La seconde inégalité nous permet d'écrire

$$0 < \left(2\beta - \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{(1-T\beta)^2}{4T\gamma}$$

ou de façon équivalente

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\gamma}{T\gamma}\frac{(1-T\beta)^2}{4T\gamma} < 2\beta\frac{(1-T\beta)^2}{4T\gamma}.$$

Pour tout $\alpha > 0$ assez petit, ceci entraine

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\left(\frac{1-T\beta}{2T\gamma}\right)^2 < 2\beta\left(\frac{(1-T\beta)^2}{4T\gamma} - T\alpha\right) = 2\beta\mu' \tag{3.11}$$

d'après (3.9) et donc

$$-\beta\mu' + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\left(\frac{1-T\beta}{2T\gamma}\right)^2 < \beta\mu'.$$

Donc, étant donné i) $\beta > 0$ tel que (3.3) est vérifié, ii) $\alpha, \gamma \in (0, \infty)$ tel que (3.8) et l'inégalité dans (3.11) sont satisfaites et iii) $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$c - \beta\mu' + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\left(\frac{1-T\beta}{2T\gamma}\right)^2 < 0 < c + \beta\mu'$$

pour μ' donné par (3.9) alors

$$\inf_{-\mu'\leq\mu\leq\mu'} M(\mu) < 0 < \sup_{-\mu'\leq\mu\leq\mu'} M(\mu)$$

et donc d'après le corollaire 3.2 il existe $\mu \in (-\mu', \mu')$ tel que $M(\mu) = 0$ et pour ce μ la fonction $\theta = \mu + \theta_\mu$ est une solution T-périodique de (3.5) qui est absolument continue sur $[0, T]$.

Dans Théorème 3.1, si $\{f_j\}_{j=0}^m \subset AC(T)$ alors ${\theta_\mu}' \in \widetilde{AC}(T)$ et donc l'orbite $\{\big(\theta(t), \theta'(t)\big) : t \in \mathbb{R}\}$ pour $\theta = \mu + \theta_\mu$ est une courbe fermée dans l'espace des phases. Corollaire 3.2 peut être alors vu comme un résultat sur le nombre de cycles pour l'équation différentielle d'Abel.

3.3 Preuve du Théorème 3.1 et du Corollaire 3.2

Pour $\theta \in \widetilde{NBV}(T)$ on a $\|\theta\|_\infty \leq v(\theta)$ d'après (1.3) et donc

$$\big\|f_j(\mu+\theta)^j\big\|_2 \leq \big\|f_j\big\|_2\big(|\mu| + r\big)^j$$

pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ donné, $r \geq 0$ et $\theta \in B_r(T)$. Ceci entraîne

$$v\big(F_\mu(\theta)\big) \leq p_\mu(r)$$

pour $\theta \in B_r(T)$, F_μ donné par (1.27) et p_μ donné par (3.3). Ainsi, on a

$$F_\mu : B_r(T) \to B_{p_\mu(r)}(T) \cap AC(T) \tag{3.12}$$

pour tout $r \geq 0$. De plus, étant donné $\theta_1, \theta_2 \in B_r(T)$, on a alors, d'après le théorème de la valeur moyenne,

$$\big(\mu + \theta_2(t)\big)^j - \big(\mu + \theta_1(t)\big)^j = j\big(\mu + \theta_{t_j}\big)^{j-1}\big(\theta_2(t) - \theta_1(t)\big)$$

est vérifiée pour un certain θ_t entre $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ et donc

$$\Big\|\big(\mu + \theta_2(t)\big)^j - \big(\mu + \theta_2(t)\big)^j\Big\|_\infty \leq j\big(|\mu| + r\big)^{j-1} v(\theta_2 - \theta_1).$$

On en déduit que

$$v\big(F_\mu(\theta_2) - F_\mu(\theta_1)\big) \leq p'_\mu(r) v(\theta_2 - \theta_1). \tag{3.13}$$

Ainsi, d'après (3.12), (3.13) et le principe de contraction nous avons non seulement Théorème 3.1 mais aussi le résultat suivant.

Corollaire 3.4 *Dans le contexte du Théorème 3.1, étant donné $\theta_0 \in B_{r_\mu}(T)$, $F^n_\mu(\theta_0)$ converge vers θ_μ quand $n \to \infty$ à une vitesse bornée par*

$$\big\|\theta_\mu - F^n_\mu(\theta_0)\big\|_\infty \leq v\big(\theta_\mu - F^n_\mu(\theta_0)\big) \leq \frac{2\lambda^n r_\mu}{1 - \lambda} \tag{3.14}$$

pour $\lambda = p'_\mu(r_\mu)$.

La première inégalité dans (3.14) vient de (1.4) et la seconde vient du principe de contraction.

Proposition 3.5 *Dans le contexte du Théorème 3.1, la fonction $M(\mu)$ donnée par (1.34) est continue sur $(-\mu', \mu')$.*

Démonstration. Pour un $\mu_0 \in [-\mu'', \mu''] \subsetneq (-\mu', \mu')$ quelconque, on montre que $M(\mu) \to M(\mu_0)$ quand $\mu \to \mu_0$ pour $\mu \in [-\mu'', \mu'']$. On a

$$\begin{aligned} v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0}) &= v\big(F_\mu(\theta_\mu) - F_{\mu_0}(\theta_{\mu_0})\big) \\ &= v\Big(\sum_{j=1}^{m} f_j\big((\mu+\theta_\mu)^j - (\mu_0+\theta_{\mu_0})^j\big) * \varepsilon_0'\Big) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} T\|f_j\big((\mu+\theta_\mu)^j - (\mu_0+\theta_{\mu_0})^j\big)\|_2 \end{aligned}$$

où l'inégalité est déduite via (3.1). D'après le théorème de la valeur moyenne, on a pour $j \in \{1, ..., m\}$,

$$(\mu + \theta_\mu(t))^j - (\mu_0 + \theta_{\mu_0}(t))^j = j z_t^{j-1}\big((\mu + \theta_\mu(t)) - (\mu_0 + \theta_{\mu_0}(t))\big)$$

pour un certain z_t entre $\mu + \theta_\mu(t)$ et $\mu_0 + \theta_{\mu_0}(t)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \left|(\mu + \theta_\mu(t))^j - (\mu_0 + \theta_{\mu_0}(t))^j\right| &\leq j(\mu'' + r_{\mu''})^{j-1}\Big(|\mu - \mu_0| + \Big|\theta_\mu(t) - \theta_{\mu_0}(t)\Big|\Big) \\ &\leq j(\mu'' + r_{\mu''})^{j-1}\Big(|\mu - \mu_0| + v\big(\theta_\mu - \theta_{\mu_0}\big)\Big) \end{aligned}$$

et donc

$$v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0}) \leq p'_{\mu''}(r_{\mu''})\Big(|\mu - \mu_0| + v\big(\theta_\mu - \theta_{\mu_0}\big)\Big)$$

où $0 \leq p'_{\mu''}(r_{\mu''}) < 1$. On en déduit que

$$\big(1 - p'_{\mu''}(r_{\mu''})\big)v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0}) \leq p'_{\mu''}(r_{\mu''})|\mu - \mu_0|$$

ce qui entraîne $v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0}) \to 0$ quand $\mu \to \mu_0$. D'après (1.4) on a $\left\|\theta_\mu - \theta_{\mu_0}\right\|_\infty \leq v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0})$ et donc $M(\mu) \to M(\mu_0)$ quand $\mu \to \mu_0$ pour $\mu \in [-\mu'', \mu'']$.

■

3.4 Cas avec des discontinuités dépendantes de l'état

Dans cette section, on admet la présence de sauts en θ'. L'équation (4) est alors remplacée par (5), où I_{t_0} est donné par (1.28). Sous les conditions B1, B2, et (1.29) (voir Section 1.3), on a les résultats suivants.

Lemme 3.6 *Pour $\mu \in \mathbb{R}$ arbitraire, H_μ définie par (1.31) envoie $\widetilde{NBV}(T)$ vers $\widetilde{AC}(T)$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que $G_\mu(\theta) \in \widetilde{AC}(T)$ (voir 1.32) puisque $F_\mu(\theta) \in \widetilde{AC}(T)$ d'après la proposition 3.1. Pour tout $\theta \in \widetilde{NBV}(T)$ on a

$$G_\mu(\theta) = \sum_{k=0}^{m'} a_k\,(\mu+\theta)\,I_{\tau_k(\mu+\theta)} * \varepsilon_0'$$

où $I_{\tau_k(\mu+\theta)} \in NBV(T)$. Ainsi, d'après proposition 3.1 nous avons également que $G_\mu(\theta) \in \widetilde{AC}(T)$. ■

D'après (3.1) on obtient

$$v\left(\sum_{j=0}^{m} f_j(\mu+\theta)^j * \varepsilon_0' + \sum_{k=0}^{m'} a_k\,(\mu+\theta)\,I_{\tau_k(\mu+\theta)} * \varepsilon_0'\right) \leqslant T\|\tilde{f}_0\|_1 + T\|\sum_{j=1}^{m} f_j(\mu+\theta)^j\|_2 + TA$$

pour tout $\theta \in \widetilde{NBV}(T)$. Ainsi, nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.7 *Pour $\mu \in \mathbb{R}$ arbitraire, $r \geq 0$ et $\theta \in B_r$ on a*

$$v(H_\mu(\theta)) \leq p_\mu(r) + TA$$

où $p_\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est la fonction continue monotone croissante donnée par (3.3) et H_μ par (1.31).

On pose

$$p_\mu^*(r) = p_\mu(r) + TA. \tag{3.15}$$

Noter que $p_\mu^* : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est une fonction continue monotone croissante.

Les deux lemmes précédents sont résumés comme suit :

Proposition 3.8 *Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$ on a*

$$H_\mu : B_r \to B_{p_\mu^*(r)} \bigcap \widetilde{AC}(T) \tag{3.16}$$

où $p_\mu^* : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est la fonction continue croissante donnée par (3.15) et H_μ par (1.31).

Remarque 3.9 *Dans le contexte de la Proposition 3.8, s'il existe $r_\mu > 0$ tel que $p_\mu^*(r) \leq r_\mu$ pour tout $r \in [0, r_\mu]$ alors H_μ envoie la boule fermée B_{r_μ} dans $\widetilde{NBV}(T)$ vers elle-même. Puisque p_μ^* est non décroissante, il suffit de montrer l'existence de (au plus deux) points $r > 0$ tels que*

$$p_\mu^*(r) = r \tag{3.17}$$

et prendre pour r_μ le plus petit de ces points.

Pour $\theta_1, \theta_2 \in B_r$ arbitraire, on a

$$v\left(H_\mu\left(\theta_2\right) - H_\mu\left(\theta_1\right)\right) \leq v\left(F_\mu\left(\theta_2\right) - F_\mu\left(\theta_1\right)\right) + v\left(G_\mu\left(\theta_2\right) - G_\mu\left(\theta_1\right)\right).$$

Or d'après (3.13)

$$v(F_\mu(\theta_2) - F_\mu(\theta_1)) \leq p'_\mu(r) v(\theta_2 - \theta_1)$$

pour tout $\theta_2, \theta_1 \in B_r$. D'autre part, en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} a_k(\theta_2+\mu)J_k\left(\theta_2+\mu\right) - a_k(\theta_1+\mu)J_k(\theta_1+\mu) \quad &= \quad (a_k(\theta_2+\mu) - a_k(\theta_1+\mu))J_k(\theta_2+\mu) \\ &\quad + a_k(\theta_1+\mu)(J_k(\theta_2+\mu) - J_k(\theta_1+\mu)) \end{aligned}$$

où

$$J_k\left(\theta\right) = I_{\tau_k(\theta)} * \varepsilon'_0 \tag{3.18}$$

et en posant $\theta_1^\mu = \theta_1 + \mu$ et $\theta_2^\mu = \theta_2 + \mu$, on obtient

$$\begin{aligned} v\left(a_k(\theta_2^\mu)J_k\left(\theta_2^\mu\right) - a_k(\theta_1^\mu)J_k\left(\theta_1^\mu\right)\right) &\leq |a_k(\theta_2^\mu) - a_k(\theta_1^\mu)|v(J_k(\theta_2^\mu)) \\ &\quad + |a_k(\theta_1^\mu)|v(J_k(\theta_2^\mu) - J_k(\theta_1^\mu)). \end{aligned}$$

D'après (3.18) et (3.1) on a

$$v(J_k(\theta_2) - J_k(\theta_1)) \leq 2T\|I_{\tau_k(\theta_2)} - I_{\tau_k(\theta_1)}\|_1 \leq 2|\tau_k(\theta_2) - \tau_k(\theta_1)|.$$

De là s'ensuit que

$$v(J_k(\theta_2^\mu) - J_k(\theta_1^\mu)) \leq 2\tau_k' v(\theta_2^\mu - \theta_1^\mu)$$

d'après B2. Donc

$$v(a_k(\theta_2^\mu)J_k\left(\theta_2^\mu\right) - a_k(\theta_1^\mu)J_k\left(\theta_1^\mu\right)) \leq (a_k'T + 2\alpha_k\tau_k')v(\theta_2 - \theta_1)$$

d'après B1 et B2 et donc

$$v\left(H_\mu\left(\theta_2\right) - H_\mu\left(\theta_1\right)\right) \leq \phi_\mu(r)v(\theta_2 - \theta_1)$$

où

$$\phi_\mu(r) = p_\mu'(r) + (TA' + 2C). \tag{3.19}$$

Ceci prouve le théorème suivant.

Théorème 3.10 *Étant donnés $T > 0$, (5) sur $[0, T]$ soumise à B1,B2 et (1.29), $B_r(T)$ donné par (1.23) pour tout $r \geq 0$, $\{f_j\}_0^m \subset NBV(T)$ avec $f_m \neq 0$, $p_\mu^* : [0, \infty) \to [0, \infty)$ donné par (3.15) et $\phi_\mu : [0, \infty) \to [0, \infty)$ donné par (3.19) pour $\mu \in \mathbb{R}$ arbitraire. Si, pour un μ donné, il existe $r_\mu \geq 0$ tel que $p_\mu^*(r_\mu) = r_\mu$ et $\phi_\mu(r_\mu) < 1$ alors, dans $B_{r_\mu}(T) \cap AC(T)$, il existe une unique solution θ_μ de (1.30). De plus, si (1.33) est satisfait pour ce μ, alors (5) admet une unique solution $\theta = \mu + \theta_\mu$ qui est absolument continue sur $[0, T]$.*

Corollaire 3.11 *Dans le contexte du Théorème 3.10, étant donné $\theta_0 \in B_{r_\mu}(T)$, $H_\mu^n(\theta_0)$ converge vers θ_μ quand $n \to \infty$ à une vitesse bornée par*

$$\left\|\theta_\mu - H_\mu^n(\theta_0)\right\|_\infty \leq v\big(\theta_\mu - H_\mu^n(\theta_0)\big) \leq \frac{2\lambda^n r_\mu}{1-\lambda} \tag{3.20}$$

pour $\lambda = \phi_\mu(r_\mu)$.

Comme dans Corollaire 3.4, la première inégalité dans (3.20) vient de (1.4) et la seconde vient du principe de contraction. S'il existe $r_0 \geq 0$ tel que $p_0^*(r_0) = r_0$ et $\phi_0(r_0) < 1$ alors, puisque le graphe de $p_{\mu_2}^*$ se trouve au-dessus de celui de $p_{\mu_1}^*$ lorsque $0 \leq \mu_1 < \mu_2$, il existe $\mu' > 0$ tel que $p_{\mu'}^*(r_{\mu'}) = r_{\mu'}$ et $\phi_{\mu'}(r_{\mu'}) = 1$. De plus, pour tout $\mu \in (-\mu', \mu')$, r_μ existe et est tel que $p_\mu^*(r_\mu) = r_\mu$ et $\phi_\mu(r_\mu) < 1$, ce qui va vérifier les conditions du Théorème 3.10. On a $r_\mu \nearrow r_{\mu'}$ quand $|\mu| \nearrow \mu'$. Encore une fois, l'unicité de θ_μ dans le Théorème 3.10 fait de $M^*(\mu)$ donnée par (1.33) une fonction bien définie pour tout $\mu \in (-\mu', \mu')$.

Remarque 3.12 *Il est facile de vérifier que si on a (1.29), alors la fonction $M^*(\mu)$ donnée par (1.33) peut s'écrire de la façon suivante*

$$M^*(\mu) = \overline{f_0} + \overline{\sum_{j=1}^{m} f_j(\mu+\theta_\mu)^j} - \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{m'} a_k\left(\theta_\mu + \mu\right)\tau_k\left(\theta_\mu+\mu\right).$$

Proposition 3.13 *Dans le contexte du Théorème 3.10, la fonction $M^*(\mu)$ est continue sur $(-\mu', \mu')$.*

Démonstration. D'après Proposition 3.5 on a que $M(\mu)$ est continue. Donc il suffit de montrer que la fonction

$$N(\mu) = a_k\left(\theta_\mu+\mu\right)\tau_k\left(\theta_\mu+\mu\right)$$

est continue. Pour un $\mu_0 \in [-\mu'', \mu''] \subsetneq (-\mu', \mu')$ quelconque, on montre que $N(\mu) \to N(\mu_0)$ quand $\mu \to \mu_0$ où $\mu \in [-\mu'', \mu'']$. En posant $\theta^\mu = \theta_\mu + \mu$ et $\theta^{\mu_0} = \theta_{\mu_0} + \mu_0$, on utilise le fait que

$$\begin{aligned} a_k(\theta^{\mu})\tau_k(\theta^{\mu}) - a_k(\theta^{\mu_0})\tau_k(\theta^{\mu_0}) &= (a_k(\theta_\mu+\mu) - a_k(\theta_{\mu_0}+\mu_0))\tau_k(\theta_\mu+\mu) \\ &\quad + a_k(\theta_{\mu_0}+\mu_0)(\tau_k(\theta_\mu+\mu) - \tau_k(\theta_{\mu_0}+\mu_0)). \end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} |a_k(\theta^{\mu})\tau_k(\theta^{\mu}) - a_k(\theta^{\mu_0})\tau_k(\theta^{\mu_0})| &\le |a_k(\theta_\mu+\mu) - a_k(\theta_{\mu_0}+\mu_0)||\tau_k(\theta_\mu+\mu)| \\ &\quad + |a_k(\theta_{\mu_0}+\mu_0)||\tau_k(\theta_\mu+\mu) - \tau_k(\theta_{\mu_0}+\mu_0)| \end{aligned}$$

et d'après B1 et B2 on a

$$\begin{aligned} |\ a_k(\theta^{\mu})\tau_k(\theta^{\mu}) - a_k(\theta^{\mu_0})\tau_k(\theta^{\mu_0})\ | &\le Ta'_k v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0} + \mu - \mu_0) \\ &\quad + \alpha_k \tau'_k v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0} + \mu - \mu_0) \\ &\le (Ta'_k + \alpha_k\tau'_k) v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0} + \mu - \mu_0) \\ &= (Ta'_k + \alpha_k\tau'_k) v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0}) \end{aligned}$$

ce qui entraîne $|\ N(\mu) - N(\mu_0)\ | \to 0$ quand $\mu \to \mu_0$ puisque, d'après proposition 3.5, $v(\theta_\mu - \theta_{\mu_0}) \to 0$ et donc $N(\mu) \to N(\mu_0)$ quand $\mu \to \mu_0$ pour $\mu \in (-\mu'', \mu'')$. ■

Ainsi, si

$$\inf_{-\mu' \le \mu \le \mu'} M^*(\mu) < 0 < \sup_{-\mu' \le \mu \le \mu'} M^*(\mu) \tag{3.21}$$

alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\mu_0 \in (-\mu', \mu')$ tel que $M^*(\mu_0) = 0$, et dans ce cas (1.30) et (1.33) sont satisfaits en même temps pour $\mu = \mu_0$.

Corollaire 3.14 *Dans le contexte du Théorème 3.10, soit*

$$\mu' = \sup\left\{|\mu| : p^*_\mu(r_\mu) = r_\mu,\ \phi_\mu(r_\mu) < 1\right\}.$$

Si (3.21) est vérifié alors il existe $\mu_0 \in (-\mu', \mu')$ *tel que la fonction* T*-périodique* $\theta = \mu_0 + \theta_{\mu_0}$ *est une solution de (5) qui est absolument continue sur* $[0, T]$.

Exemple 3.15 *Considérons l'équation*

$$\theta' = c + \frac{\pi\alpha}{2}\sin\omega t + \beta\theta + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma(\cos\omega t)^2\theta^2 + \sum_{k=1}^{m'} a_k(\theta)\, I_{\tau_k(\theta)} \tag{3.22}$$

avec $\omega = 2\pi/T$, $c \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$. *Comme à l'exemple 3.3 on a* $m = 2$, $\overline{f_0} = c$, $\widetilde{f}_0 = \pi\alpha(\sin\omega t)/2$, $f_1 = \beta$ *et* $f_2(t) = 2\sqrt{2/3}\gamma(\cos^2\omega t)$ *et donc* $\|\widetilde{f}_0\|_1 = \alpha$, $\|f_1\|_2 = \beta$ *et* $\|f_2\|_2 = \gamma$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et posons*

$$a_k(\theta) = \varepsilon\frac{\sin\theta(T/k))}{k^2}, k \in (1, 2, ..m' - 1),\ a_{m'}(\theta) = -\sum_{k=1}^{m'-1} a_k(\theta),\ \tau_k(\theta) = \frac{T}{2}\cos^2\theta(T/k).$$

En choisissant $\alpha_k = a'_k = \varepsilon\zeta(2)$ *et* $\tau'_k = T$ *on obtient* $A = A' = \varepsilon\zeta(2)m' = \varepsilon m'\pi^2/6$ *et* $C = T\varepsilon m'\pi^2/6$. *Donc (3.15) devient*

$$p^*_\mu(r) = T\alpha + T\beta(|\mu| + r) + T\gamma(|\mu| + r)^2 + TA.$$

En écrivant $p^*_\mu(r_\mu) = r_\mu$ *comme*

$$|\mu| + p^*_\mu(r_\mu) = |\mu| + r_\mu$$

on obtient

$$|\mu| + r_\mu = \frac{(1 - T\beta) - \sqrt{(1 - T\beta)^2 - 4T\gamma(T(\alpha + A) + |\mu|)}}{2T\gamma} \tag{3.23}$$

pourvu que $T\beta < 1$ *et*

$$4T\gamma(T(\alpha + A) + |\mu|) \leq (1 - T\beta)^2. \tag{3.24}$$

Si $\alpha, \gamma \in (0, \infty)$ *sont tels que*

$$4T^2(\alpha + A)\gamma < (1 - T\beta)^2$$

alors μ' *donné par*

$$\mu' = \frac{(1 - T\beta)^2}{4T\gamma} - T(\alpha + A) \tag{3.25}$$

se trouve dans $(0,\infty)$ *et (3.24) est vérifié pour tout* $\mu \in [-\mu', \mu']$. *En remplaçant (3.25) dans (3.23) on obtient*

$$|\mu| + r_\mu = \frac{(1-T\beta) - \sqrt{4T\gamma(\mu' - |\mu|)}}{2T\gamma}$$

et donc

$$\mu' + r_{\mu'} = \frac{1-T\beta}{2T\gamma}. \tag{3.26}$$

D'autre part (3.19) devient

$$\phi_\mu(r_\mu) = 1 - (\sqrt{4T\gamma(\mu' - |\mu|)} - (TA + 2C)).$$

En prenant ε *assez petit, tel que* $\sqrt{4T\gamma(\mu' - |\mu|)} - (TA+2C) > 0$, *on a* $\phi_\mu(r_\mu) < 1$, *et donc* θ_μ *existe pour* $\mu \in (-\mu', \mu')$ *et est donné par le Théorème 3.10. On a* $|\theta_\mu(t)| \leq r_\mu \leq r_{\mu'}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *donc*

$$-\frac{1-T\beta}{2T\gamma} \leq \mu + \theta_\mu(t) \leq \frac{1-T\beta}{2T\gamma}$$

Puisque $\overline{\theta_\mu} = 0$, *on a la fonction continue en* μ

$$M^*(\mu) = c + \beta\mu + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\overline{cos^2\omega t(\mu+\theta_\mu)^2} - \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{m'} \varepsilon\frac{\sin(\theta_\mu(T/k)+\mu)}{k^2}\frac{T}{2}\cos^2(\mu + \theta_\mu(T/k))$$

sur $(-\mu', \mu')$. *D'autre part* $|M^*(\mu) - M(\mu)| < \frac{\varepsilon}{2}\zeta(2)$, *où* $M(\mu)$ *est la fonction continue donnée par*

$$M(\mu) = c + \beta\mu + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\overline{cos^2\omega t(\mu+\theta_\mu)^2}.$$

Notons que pour ε *assez petit, les choix de* α, β, γ *dans cet exemple peuvent être les mêmes que dans l'exemple 3.3. Donc, en utilisant la même technique, et en montrant que* M *change de signe, on en déduit que* M^* *aussi change de signe. Alors*

$$\inf_{-\mu' \leq \mu \leq \mu'} M^*(\mu) < 0 < \sup_{-\mu' \leq \mu \leq \mu'} M^*(\mu)$$

et donc d'après le corollaire 3.14 il existe $\mu \in (-\mu', \mu')$ *tel que* $M^*(\mu) = 0$ *et pour ce* μ, *la fonction* $\theta = \mu + \theta_\mu$ *est une solution* T*-périodique de (3.22) qui est absolument continue sur* $[0, T]$.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons étudié l'existence des solutions T-périodiques et T-anti-périodiques de l'équation différentielle d'Abel généralisée aux cas impulsifs avec des discontinuités dépendantes de l'état. La méthode utilisée est celle du théorème de point fixe de Banach.

Le premier chapitre a été un rappel d'outils généraux d'analyse réelle et fonctionnelle que nous avons utilisé tout au long des chapitres 2 et 3.

Au deuxième chapitre, nous avons développé deux techniques nous permettant de prouver des théorèmes d'existence d'une solution T-anti-périodique de cette équation pour les cas impulsifs et non impulsifs. Par le principe de contraction de Banach, nous obtenons une suite d'itérations de Picard qui converge uniformément vers la solution, ce qui entraine la possibilité de trouver la solution numériquement. Nous avons appuyé nos résultats par divers exemples.

Au troisième chapitre, nous avons obtenu des résultats d'existence de solutions T-périodiques pour la même équation différentielle d'Abel dans les cas impulsifs et non impulsifs. Encore, par le théorème de contraction de Banach, nous obtenons une suite d'itérations de Picard qui converge uniformément. Ceci nous permet de trouver la solution numériquement. Cependant, les calculs sont beaucoup plus difficiles que dans le cas T-anti-périodique. Nous avons appuyé nos résultats par des exemples.

Nos résultats sur l'existence d'une solution T-périodique et T-anti-périodique peuvent être raffinés davantage. Il s'agit de trouver des polynômes plus raffinés que ceux utilisés dans les chapitres 2 et 3.

Bibliographie

[1] A.R. Aftabizadeh, S. Aizicovici et N.H. Pavel, *On a class of second-order anti-periodic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. **171** (1992) 301-320.

[2] B. Ahmad et J.J. Nieto, *Existence and approximation of solutions for a class of nonlinear impulsive functional differential equations with anti-periodic boundary conditions*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications **69** (2008) 3291-3298.

[3] C. D. Aliprantis et O. Burkinshaw, *Principles of real analysis. Second edition*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[4] N.M.H. Alkoumi et P.J. Torres, *Estimates on the number of limit cycles of a generalized Abel equation*, Discrete contin. Dyn. Syst. **31** (2011) 25-34.

[5] N.M.H. Alkoumi et P.J. Torres, *On the number of limit cycles of a generalized Abel equation*, Czechoslovak Math. J. **61(136)** (2011) 73-83.

[6] Alkoumi, Naeem, *The number of periodic solutions of some analytic equations of Abel type*, Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 16, 5352–5358.

[7] M.A.M. Alwash, *Periodic solutions of Abel differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 329 (2007), no. 2, 1161–1169.

[8] A. Álvarez, J.L. Bravo, et M. Fernández, *Limit cycles of Abel equations of the first kind*, J. Math. Anal. Appl. **423** (2015) 734-745.

[9] A. Álvarez, J.L. Bravo, et M. Fernández, *Existence of non-trivial limit cycles in Abel equations with symmetries*, Nonlinear Anal. **84** (2013) 18-28.

[10] A. Álvarez, J.L. Bravo, et M. Fernández, *Abel-like differential equations with unique limit cycle*, Nonlinear Anal. **74** (2011) 3694-3702.

[11] A. Álvarez, J.L. Bravo, et M. Fernández, *The number of limit cycles for generalized Abel equations with periodic coefficients of definite sign*, J. Math. Anal. Appl. **360** (2009) 168-189.

[12] A. Álvarez, J.L. Bravo, et M. Fernández, *Existence of non-trivial limit cycles in Abel equations with symmetries*, Commun. Pure Appl.. Anal. **8** (2009) 1493-1501.

[13] M.J Álvarez, A. Gasull et H. Giacomini, *A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations*, J. Differential Equations 234 (2007), no. 1, 161–176.

[14] M. J Álvarez, J.L Bravo, M Fernández, R Prohens , *Centers and limit cycles for a family of Abel equations* J. Math. Anal. Appl. 453 (2017), no. 1, 485–501.

[15] D. Batenkov et G. Binyamini, *Uniform upper bounds for the cyclicity of the zero solution of the Abel differential equation*, J. Differential Equations **259** (2015) 5769-5781.

[16] J-M. Belley et A. Gueye, *Anti-periodic solutions of Abel differential equations with state dependent discontinuities*, Differ. Equ. Appl. 9 (2017), no. 2, 219–239.

[17] J-M. Belley et É. Bondo, *Anti-periodic solutions of Liénard equations with state dependent impulses*, J. Differential Equations 261 (2016), no. 7, 4164–4187.

[18] J.L. Bravo et M. Fernández, *Stability of singular limit cycles for Abel equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **35** (2015) 1873-1890.

[19] J.L. Bravo et J.Torregrosa, *Abel-like differential equations with no periodic solutions*, J. Math. Anal. Appl. 342 (2008), no. 2, 931–942.

[20] J.L. Bravo, M Fernández et A. Gasull, *Limit cycles for some Abel equations having coefficients without fixed signs*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 19 (2009), no. 11, 3869–3876.

[21] T. Chen et W. Liu, *Anti-periodic solutions for higher-order Liénard type differential equation with p-Laplacian operator*, Bull. Korean Math. Soc. **49** (2012) 455-463.

[22] Y. Chen, J.J. Nieto et D. O'Regan, *Anti-periodic solutions for fully nonlinear first order differential equations*, Mathematics and Computer Modelling **46** (2007) 1183-1190.

[23] Y. Chen, J.J. Nieto et D. O'Regan, *Anti-periodic solutions for evolution equations associated with maximal monotone mappings*, Applied Mathematics Letters **24** (2011) 302-307.

[24] H.F. Davis, *Fourier series and orthogonal functions*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, MA, 1963.

[25] W. Ding, Y. Xing et M. Han, *Anti-periodic boundary value problems for first order impulsive functional differential equations*, Applied mathematics and Computation **186** (2007) 45-53.

[26] D. Franco, J.J. Nieto et D. O'Regan, *Anti-periodic boundary value problem for nonlinear first order ordinary differential equations*, Mathematical Inequalities & Applications**6** (2003) 477-485.

[27] A. Gasull et A. Guillamon, *Limit cycles for generalized Abel equations*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 16 (2006), no. 12, 3737–3745.

[28] A. Gasull et Y. Zhao, *On a family of polynomial differential equations having at most three limit cycles*, Huston J. Math. **39** (2013) 191-203.

[29] T. Jankowski, *Ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions of antiperiodic type*, Computers & Mathematics with Applications **6** (2004) 1419-1428.

[30] G. Jaume, G. Maite et L. Jaume, *Universal centres and composition conditions*, Proc. Lond. Math. Soc. **106** (2013) 481-507.

[31] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1968.

[32] Y. Li et L. Huang, *Anti-periodic solutions for a class of Liénard-type systems with continuously distributed delays*, Nonlinear Analysis : Real World Applications **10** (2009) 2127-2132.

[33] L. Liu et Y. Li, *Existence and uniqueness of anti-periodic solutions for a class of nonlinear n-th order functional differential equations*, Opuscula Mathematica **31** (2011) 61-74.

[34] M. Nakao et H. Okochi, *Anti-periodic solution for* $u_{xx}-(\sigma(u_x))_x-u_{xxt}=f(x,t)$, J. Math. Anal. Appl. **197** (1996) 796-809.

[35] H. Okochi, *On the existence of anti-periodic solutions to a nonlinear evolution equation associated with odd subdifferential operators*, J. Funct. Anal. **91** (1990) 246-258.

[36] H. Okochi, *On the existence of anti-periodic solutions to nonlinear parabolic equations in non cylindrical domains*, Nonlinear Anal. **14** (1990) 771-783.

[37] H. Okochi, *On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988) 541-553.

[38] Josep M. Olm, Xavier. Ros-Oton, *Existence of periodic solutions with non-constant sign in a class of generalized Abel equations* Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), no. 4, 1603–1614.

[39] C. Ou, *Antiperiodic solutions for high-order Hopfield neural networks*, Computers & Mathematics with Applications **56** (2008) 1838-1844.

[40] F. Pahovich, *Weak and strong composition conditions for the Abel differential equation*, Bull. Sci. math. **138** (2014) 993-998.

[41] A.A. Panov, *On the number of periodic solutions of polynomial differential equations* , (Russian) Mat. Zametki 64 (1998), no. 5, 720–727 ; translation in Math. Notes 64 (1998), no. 5-6, 622–628 (1999)

[42] H.L. Royden, *Real Analysis. Third edition*, Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[43] W.Rudin, *Real and Complex Analysis. Third edition*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[44] Steve. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Mathematics : frontiers and perspectives, 271–294, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[45] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, Cambridge **66** (1980). 13.

[46] Pedro J. Torres, *Existence of closed solutions for a polynomial first order differential equation*, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), no. 2, 1108–1116.

[47] K. Wang, *A new existence result for nonlinear first-order anti-periodic boundary value problems*, Applied Mathematics Letters **21** (2008) 1159-1154.

[48] R. Wu, *An anti-periodic LaSalle oscillatory theorem*, Applied Mathematics Letters **21** (2008) 928-933.

[49] Y. Yin, *Remarks on first order differential equations with anti-periodic boundary conditions*, Nonlinear Times and Digest **2** (1995) 83-94.

[50] Y. Yin, *Monotone iterative technique and quasilinearization for some anti-periodic problems*, Nonlinear World **3** (1996) 253-266.

[51] A.H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, Dover Publications, Inc., Minneola, N.Y., 1987.